УДК 517.5

М. В. Костич (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ ВЕЙЛЯ – НАДЯ СЕРЕДНІМИ ЗИГМУНДА

For functions from the Weyl – Nagy classes, in a uniform metric, we calculate exact-order estimates of deviations of the Zygmund sums.

Знайдено точні за порядком величини оцінки відхилень сум Зигмунда для функцій з класів Вейля – Надя в рівномірній метриці.

Нехай L_p — множина 2π-періодичних функцій φ із скінченною нормою $\|\varphi\|_p$, де $\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$ при $p \in [1, \infty)$ і $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)|$, C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ з нормою $\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|$. Нехай далі $W^r_{\beta,p}$ — клас 2π-періодичних функцій f, які зображаються у вигляді згорток

$$f(t) = c_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} B^1_{r,\beta}(x-t)\,\varphi(t)\,dt \ := \ c_0 + (B^1_{r,\beta} * \varphi)(x),$$

де $c_0 \in \mathbb{R}$, $\|\varphi\|_p \le 1$, $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0$, $B^n_{r,\beta}(t) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\cos(kt + \beta\pi/2)}{k^r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Сумами Зигмунда $Z^s_n(f;t)$ сумовної 2π-періодичної функції f називають тригонометричні поліноми вигляду

$$Z^s_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right)(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt),$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, s — деяке додатне число.

Далі вважатимемо, що для параметрів p і r виконуються такі співвідношення: $r > 1/p$ при $1 < p < \infty$, або $r \ge 1$ при $p = 1$. Ці співвідношення забезпечують вкладення $W^r_{\beta,p} \subset C$ (див., наприклад, [1, с. 196, 197]).

Символ $A(n) = O(B(n))$ означає, що існує така стала $c > 0$, що виконується нерівність $A(n) \le cB(n)$, де $n \in \mathbb{N}$, а символ $A(n) \asymp B(n)$ означає, що $A(n) = O(B(n))$ і $B(n) = O(A(n))$.

Мета роботи — знайти порядкові оцінки величини

$$E(W^r_{\beta,p};\, Z^s_n)_C := \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \left\| f(\cdot) - Z^s_n(f;\cdot) \right\|_C. \tag{1}$$

Теорема. *Нехай r, p, β і s — фіксовані числа, тоді справедливі такі співвідношення*:

$$E(W^r_{\beta,p}; Z^s_n)_C \asymp \begin{cases} n^{-s}, & r > s + 1/p, \quad 1 \le p < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}; \\ n^{-(r-1/p)}, & 1/p < r < s + 1/p, \quad 1 \le p < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}; \\ n^{-s}\ln n, & r = s+1, \quad p = 1, \quad \beta \ne 2k+1, \ k \in \mathbb{Z}; \\ n^{-s}, & r = s+1, \quad p = 1, \quad \beta = 2k+1, \ k \in \mathbb{Z}; \\ n^{-s}(\ln n)^{1/p'}, & r = s + 1/p, \quad 1 < p < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

де $1/p + 1/p' = 1$.

У випадку, коли $p = \infty$, $s > 0$, порядки величини (1) були знайдені А. Зигмундом [2] та Б. Надєм [3]. При $s = 1$, $p \ge 1$ вона була досліджена А. І. Камзоловим [4]. Оцінка $E(W^r_{\beta,\infty}; Z^s_n)_C$ випливає із роботи С. А. Теляковського [5]. Відразу зауважимо, що з роботи [5] і з наведеної тут теореми випливають порядкові оцінки величини $E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C$ для всіх p, r, β і s.

При доведенні цієї теореми використовуються наступні оцінки:

$$\left\| B^n_{r,\beta}(\cdot) \right\|_{p'} = O\left(n^{-(r-1/p)} \right), \tag{2}$$

$$\left\| D_{k,\beta}(\cdot) \right\|_{p'} = O\left(k^{1/p} \right), \tag{3}$$

де

$$D_{k,\beta}(t) := \frac{1}{2}\cos\beta\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos\left(jt + \beta\frac{\pi}{2} \right).$$

Співвідношення (2), (3) у випадку, коли $\beta = r$, встановлено, наприклад, в [1, с. 198, 199], а для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ ці оцінки встановлюються аналогічно. Крім того, потрібні будуть також співвідношення

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k(\cdot)}{k^{1/p}} \right\|_{p'} = O((\ln n)^{1/p'}), \quad p \ge 1, \tag{4}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos k(\cdot)}{k^{1/p}} \right\|_{p'} = \begin{cases} O(\ln n), & p = 1, \\ O((\ln n)^{1/p'}), & p > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Оцінки (4) і (5) легко отримати, наприклад, з формул (2.26) і (2.27) роботи [6, с. 306].

Оскільки класи функцій $W^r_{\beta,p}$ інваріантні відносно зсуву, то

$$E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \left| f(0) - Z^s_n(f;0) \right|.$$

Легко бачити, що для кожної f, яка належіть $W^r_{\beta,p}$, вірне зображення

$$f(0) - Z^s_n(f;0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\tau + \beta\frac{\pi}{2})}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\tau) \right) \varphi(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

(див., наприклад, [7, с. 51], гл. 2.3).

Використовуючи нерівність Гельдера і враховуючи, що $\|\varphi\|_p \le 1$, одержуємо

$$E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C \le \frac{1}{\pi} \left\| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k(\cdot) + \beta\frac{\pi}{2})}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\cdot) \right\|_{p'}. \tag{7}$$

Оцінимо праву частину цієї нерівності при різних значеннях параметрів r, p, β, s. Застосовуючи перетворення Абеля, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\tau + \beta\frac{\pi}{2})}{k^{r-s}} = -\frac{\cos\beta\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{k=1}^{n-2}\left(k^{-(r-s)} - (k+1)^{-(r-s)}\right) \times$$

$$\times D_{k,\beta}(\tau) + (n-1)^{-(r-s)} D_{n-1,\beta}(\tau).$$

Звідси з урахуванням (2) і (3) у випадку, коли $r \neq s + 1/p$, маємо

$$\left\| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k(\cdot) + \beta\frac{\pi}{2})}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\cdot) \right\|_{p'} =$$

$$= \begin{cases} O(n^{-s}), & r > s + 1/p, \quad 1 \le p < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}; \\ O(n^{-(r-1/p)}), & \frac{1}{p} < r < s + 1/p, \quad 1 \le p < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $r = s + 1$, а $p = 1$. Скориставшись оцінками (4) і (5) при $p = 1$, одержуємо

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\tau + \beta\frac{\pi}{2})}{k} \right| \le \left|\cos\beta\frac{\pi}{2}\right| \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos k\tau}{k} \right| + \left|\sin\beta\frac{\pi}{2}\right| \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k\tau}{k} \right| =$$

$$= \left|\cos\beta\frac{\pi}{2}\right| O(\ln n) + \left|\sin\beta\frac{\pi}{2}\right| O(1).$$

Звідси з урахуванням оцінки (2) випливає

$$\left\| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k(\cdot) + \beta\frac{\pi}{2})}{k} + B^n_{s+1,\beta}(\cdot) \right\|_{\infty} =$$

$$= \begin{cases} O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right), & r = s+1, \ p = 1, \ \beta \neq 2k+1, \ k \in \mathbb{Z}; \\ O\left(\frac{1}{n^s}\right), & r = s+1, \ p = 1, \ \beta = 2k+1, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{9}$$

Нехай тепер $r = s + 1/p$, а $1 < p < \infty$. Враховуючи оцінки (2), (4) і (5), маємо

$$\left\| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k(\cdot) + \beta\frac{\pi}{2})}{k^{1/p}} + B^n_{s+1/p,\beta}(\cdot) \right\|_{p'} \le$$

$$\le \frac{\left|\cos\beta\frac{\pi}{2}\right|}{n^s} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos k(\cdot)}{k^{1/p}} \right\|_{p'} + \frac{\left|\sin\beta\frac{\pi}{2}\right|}{n^s} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k(\cdot)}{k^{1/p}} \right\|_{p'} + \left\| B^n_{s+1/p,\beta}(\cdot) \right\|_{p'} =$$

$$= \left|\cos\beta\frac{\pi}{2}\right| O\left(\frac{\ln^{1/p'} n}{n^s}\right) + \left|\sin\beta\frac{\pi}{2}\right| O\left(\frac{\ln^{1/p'} n}{n^s}\right) + O\left(\frac{1}{n^s}\right) = O\left(\frac{\ln^{1/p'} n}{n^s}\right). \tag{10}$$

Підставляючи оцінки (8) – (10) в (7), одержуємо потрібні оцінки зверху величини $E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C$.

Знайдемо тепер оцінки знизу величини (1). Неважко бачити (див., наприклад, [7, с. 50]), що величини $E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C$ не можуть прямувати до нуля швидше, ніж $1/n^s$. Звідси випливає непокращуваність оцінок знизу величини (1) у випадках $r > s + 1/p$, $1 \le p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $r = s + 1$, $p = 1$, $\beta = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

При $r = s + 1$, $p = 1$, $\beta \ne 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо функцію $f_1 = B^1_{r,\beta} * \varphi_1$, де φ_1 — 2π-періодична функція, що визначається на періоді $(-\pi;\pi)$ рівністю

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} -(2\pi)^{-1}, & -\pi < \tau < 0; \\ -(2\pi)^{-1} n^2, & 0 < \tau < \pi n^{-2}; \\ 0, & \pi n^{-2} < \tau < \pi. \end{cases}$$

Неважко показати, що $f_1 = B^r_{\beta,1}$ і $\left| f_1(0) - Z^s_n(f_1; 0) \right| \ge c n^{-s} \ln n$. Таким чином, теорему доведено у випадку $r = s + 1$, $p = 1$, $\beta \ne 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

При $1/p < r < s + 1/p$, $1 \le p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ розглянемо функцію $f_2 = \left\| \varphi_2 \right\|_p^{-1} B^1_{r,\beta} * \varphi_2$, $\varphi_2(\tau) = \frac{1}{n^{1/p'}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k\tau - \beta\frac{\pi}{2})$. Оскільки $\varphi_2 \in L_p$, то $f_2 \in W^r_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$. Використовуючи формулу (6), можна довести, що $\left| f_2(0) - Z^s_n(f_2; 0) \right| \ge c' n^{-r+1/p}$. Ця нерівність показує непокращуваність оцінки зверху $E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C$, коли $1/p < r < s + 1/p$, $1 \le p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Аналогічно можна довести потрібну оцінку знизу величини $E(W^r_{\beta,p};\ Z^s_n)_C$ і в останньому випадку $r = s + 1/p$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, але при цьому замість f_2 розглядається функція $f_3 = \left\| \varphi_3 \right\|_p^{-1} B^1_{r,\beta} * \varphi_3$, де

$$\varphi_3(\tau) := (\ln n)^{-1/p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\tau - \beta\frac{\pi}{2})}{k^{1/p'}}$$

(детальний виклад останніх двох випадків див. у [8]).

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
2. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Forier series // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 695–704.
3. *Nagy B.* Sur une classe general de proceder de sommation pour les series de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – N3.
4. *Камзолов А. И.* О равномерном приближении классов функций $\tilde{W}^{\alpha}_{p}(M)$ линейными положительными полиномиальными операторами // Вестн. Моск. ун-та. – 1976. – № 5. – С. 13–25.
5. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближение дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61–97.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. – Т.1. – 616 с.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 262 с.
8. *Костич М. В.* Наближення функцій з класів Вейля–Надя сумами Зигмунда і Рогозинського в рівномірній метриці. – Київ, 1997. – 34 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 97.5).

Одержано 20.06.97