УДК 512.544

С. В. Мазніченко (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПРО СКІНЧЕННІ ГРУПИ З ЦИКЛІЧНИМИ АБЕЛЕВИМИ ПІДГРУПАМИ

Solvable and minimal unsolvable finite groups with the Abelian cyclic subgroups are constructively described.

Конструктивно описані розв'язні та мінімальні нерозв'язні скінченні групи з циклічними абелевими підгрупами.

При дослідженні скінченних груп важливе значення мають групи, у яких всі власні підгрупи абелеві [1, 2]. Частинним випадком таких груп є групи з циклічними власними підгрупами [3]. Опис скінченних p-груп, у яких циклічними є тільки всі абелеві підгрупи, можна знайти в [4]. Всі неодиничні групи такого роду мають єдину підгрупу порядку p. За теоремою 12.5.2 із [4] скінченні нециклічні p-групи D з циклічними абелевими підгрупами вичерпуються 2-групами типу $D = \langle c\rangle \cdot \langle f\rangle$, $|c| = 2^{\gamma}$, $|f| = 4$, $\gamma > 1$, $|\langle c\rangle \cap \langle f\rangle| = 2$, $f^{-1}cf = c^{-1}$. В подальшому D називається групою кватерніонів з уточненням, при необхідності, її порядку.

Вже існує опис всіх скінченних груп з метациклічними власними підгрупами [3]. Більше того, в роботах [5, 6] започатковано дослідження груп, у яких метациклічними є тільки абелеві підгрупи. Незважаючи на це, не існує опису всіх скінченних груп з циклічними абелевими підгрупами. Легко бачити, що групи такого роду вичерпуються скінченними групами, у яких силовські підгрупи непарного порядку є циклічними групами, а силовська 2-підгрупа циклічна чи є групою кватерніонів. У даній роботі повністю описані скінченні розв'язні та мінімальні нерозв'язні групи з циклічними абелевими підгрупами (теореми 1, 2).

Теорема 1. *Всі скінченні розв'язні групи G з циклічними абелевими підгрупами вичерпуються групами типів*:

1) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ — *холлівські підгрупи із* G, $G' = \langle a\rangle$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \times D)$, *де* $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ — *холлівські підгрупи із* G *без інволюцій*, D — *група кватерніонів*, $G' = \langle a\rangle \times D'$;

3) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \times (D \leftthreetimes T))$, *де* $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ — *холлівські підгрупи із* G *без інволюцій*, D — *група кватерніонів*, $|D| = 8$, T — *циклічна силовська 3-підгрупа із* G, $G' = \langle a\rangle \times D$;

4) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \times ((Q \leftthreetimes T) \cdot \langle x\rangle))$, *де* $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ — *холлівські підгрупи із* G *без інволюцій*, Q — *група кватерніонів*, $|Q| = 8$, T — *циклічна силовська 3-підгрупа із* G, $|x| = 4$, $Q \cdot \langle x\rangle = D$ — *група кватерніонів*, $|D| = 2^4$, $G' = \langle a\rangle \times (Q \leftthreetimes T)$.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що всі силовські підгрупи із G — циклічні. Тоді за теоремою 9.4.3 із [4] G — група типу 1. Тепер силовська 2-підгрупа D є групою кватерніонів. Якщо G — нільпотентна група, то вона є групою типу 2. Нехай G — не нільпотентна, але надрозв'язна група. Тоді відомо (див., наприклад, [7]), що $G' = \langle a\rangle \times D'$, де $\langle a\rangle$ — холлівська підгрупа із G' без інволюцій, і $G = A \leftthreetimes B$, де A — холлівська $\pi(\langle a\rangle)$-підгрупа із G, $B = \langle b\rangle \times D$, $\langle b\rangle$ — холлівська підгрупа із G без інволюцій. Оскільки G — не нільпотентна, то $a \neq 1$. Легко встановити, що $[A, B] = A = \langle a\rangle$, і G є групою типу 2. Нехай G — не надрозв'язна група. Тоді G' — нециклічна, а значить, неабелева група, $G'' \neq 1$. Звідси існують такі члени ряду комутантів K і H, що $K \neq 1$, $K' = 1$, $H' = K$. За умовою K — циклічна група, $H \leq G'$ і $G/Z_G(K)$ —

підгрупа із $\mathrm{Aut}(K)$ — абелева група. Зрозуміло, що $K \le Z(H)$ і $H = Q \times H_1$ є групою типу 2 теореми, де Q — силовська 2-підгрупа із H, $H_1' = 1$, $H' = Q' \ne \ne 1$. Звідси Q — група кватерніонів, $Q \lhd G$, $Q \le D$, G/Q — група типу 1 теореми. Оскільки G — не надрозв'язна група, то легко встановити, що $|Q| = 8$, $|D| \in \{2^3, 2^4\}$. Нехай $C = Z_G(Q)$. Тоді $C \lhd G$, G/C — підгрупа із $\mathrm{Aut}(Q)$, $\mathrm{Aut}(Q) \cong S_4$. Звідси $|G:C|$ може ділитись лише на прості числа 2 та 3. Оскільки G/Q — група типу 1, комутант якої не містить інволюцій і $Q \le G'$, то Q — силовська 2-підгрупа із $G' = Q \leftthreetimes \langle a_1 \rangle$, де $\langle a_1 \rangle = \langle a \rangle \times T_1$ — холлівська підгрупа із G без інволюцій, T_1 — силовська 3-підгрупа із $\langle a_1 \rangle$. Група C містить $\langle a \rangle$ — холлівську підгрупу із G без інволюцій. Звідси $G = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, $G' = = \langle a \rangle \times (Q \leftthreetimes T_1)$, $G' \cap B = Q \leftthreetimes T_1$. Зрозуміло, що $B = V \leftthreetimes \langle b \rangle$, де $V = D \cdot T$ — холлівська підгрупа із G, T — циклічна силовська 3-підгрупа із G, B — холлівська підгрупа із G без інволюцій, $B \le C$. Зрозуміло, що $[T, \langle b \rangle] = 1 = [D, \langle b \rangle]$, і, значить, $B = V \times \langle b \rangle$. Нехай $|D| = 2^3$. Тоді $D = Q$, $T_1 = 1$ і G є групою типу 3. Нехай $|D| = 2^4$. При $T \lhd V$ одержимо $Q \not\le G'$, отже, $T \ntriangleleft V$. При $D \lhd V$ одержимо $\Phi(D) = \langle c^2 \rangle \lhd V$, $Q = \langle c^2, f \rangle$, $[\langle c^2 \rangle, T] = [Q, T] = [D, T] = 1$, і знову $Q \not\le G'$, отже, і $D \ntriangleleft V$. Покладемо $N = Q \leftthreetimes T$. Тоді $N \lhd V$. За лемою Фраттіні $V = N \cdot N_V(T) = Q \cdot N_V(T)$. Легко бачити, що $N_V(T) = T \leftthreetimes \leftthreetimes \langle x \rangle$, $\langle x \rangle = D \cap N_V(T)$, $|x| = 4$, $[T, \langle x \rangle] = T$, і G — група типу 4 теореми. Необхідність доведено. *Достатність* очевидна. Теорему доведено.

Лема. *Група G, ізоморфна $GL(2, p)$ для будь-якого простого p, має вигляд $G = U \leftthreetimes \langle x \rangle$, де $|x| = p - 1$, $U \cong SL(2, p)$. Всі абелеві підгрупи із $SL(2, p)$ є циклічними групами.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді згідно з [6] $|G| = (p^2 - - 1)(p^2 - p)$, $|SL(2, p)| = (p + 1)p(p - 1)$. Нехай $x = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, де r — твірний корінь за модулем p. Маємо $GL(2, p) = SL(2, p) \leftthreetimes \langle x \rangle$. Покладемо $SL(2, p) = = U$. Тоді $G = U \leftthreetimes \langle x \rangle$. Нехай $d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тоді $d \in Z(GL(2, p))$, $d \in \in Z(SL(2, p))$ і $d \in Z(D)$, де D — силовська 2-підгрупа із $SL(2, p)$, $SL(2, p)/\langle d \rangle \cong PSL(2, p)$. За відомою теоремою Діксона [6] $D/\langle d \rangle$ — група діедра. При $p = 2$ $GL(2, 2) = SL(2, 2) \cong PSL(2, 2) \cong S_3$, і, значить, всі абелеві підгрупи із $SL(2, 2)$ циклічні. Нехай $p > 2$. Для циклічності абелевих підгруп із $SL(2, p)$ досить показати, що D — група кватерніонів. Нехай $t = \begin{pmatrix} u & v \\ y & z \end{pmatrix}$, $t \in D$, $|t| = 2$. Тоді справедливі співвідношення $uz - vy = 1$ і $t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Використовуючи ці рівності, одержуємо $t = d$, і, значить, в D тільки одна підгрупа порядку 2. Зрозуміло, що D не є циклічною групою, а тому D — група кватерніонів. Лему доведено.

Теорема 2. *Всі скінченні мінімальні нерозв'язні групи G з циклічними абелевими підгрупами вичерпуються групами, ізоморфними групам $SL(2, p)$ для всіх простих чисел $p > 3$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді за результатами із [8] G містить таку нормальну розв'язну підгрупу N найбільшого порядку, що G/N — неабелева проста група одного з типів: $PSL(2, 2^q)$, $PSL(2, 3^q)$, $PSL(2, p)$, $PSL(3, 3)$, група Судзукі $Sz(2^q)$, q — непарне просте число, p — просте число, більше 3. Зрозуміло, що N є групою одного з типів

1 – 4 теореми 1. Припустимо, що N — група типу 3 чи 4. Тоді N містить характеристичну підгрупу кватерніонів Q, $Q \lhd G$, G/Q — група типу 1 теореми 1 і G — розв'язна група. Нехай N — група одного з типів 1 чи 2. Тоді $N = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, $\langle a \rangle$ — характеристична підгрупа із N. Звідси $Z_G(\langle a \rangle) \lhd G$, $G/Z_G(\langle a \rangle)$ — підгрупа із $\mathrm{Aut}(\langle a \rangle)$ — абелева група, і, значить, $G' \leq Z_G(\langle a \rangle)$. Якщо $Z_G(\langle a \rangle) < G$, то G' і G — розв'язні групи. З цього випливає, що $Z_G(\langle a \rangle) = G$ і $\langle a \rangle \leq Z(G)$. Звідси N — нільпотентна група. Оскільки G/N не є розв'язною групою, то силовська 2-підгрупа із N циклічна і $N = \langle b \rangle$. Як і раніше, $\langle b \rangle \leq Z(G)$. Припустимо, що G/N ізоморфна одній із груп $PSL(2, 2^q)$, $PSL(2, 3^q)$, $PSL(3, 3)$, $Sz(2^q)$. Тоді G/N містить підгрупу H/N типу $(2, 2, 2)$ або підгрупу порядку 3^3 експоненти 3, але H/N — підгрупа циклічної чи метациклічної силовської підгрупи із G/N, що неможливо. Отже, $G/N \cong PSL(2, p)$, $p > 3$. Зрозуміло, що $D \cap N = \langle d \rangle$, $|d| = 2$, D — група кватерніонів. Нехай $\langle u \rangle$ — силовська r-підгрупа із G, r — просте число, $r > 2$. Тоді $\langle u \rangle \not\leq N$ і за теоремою Діксона [6] G/N містить підгрупу Фробеніуса $H/N = (\langle u \rangle \cdot N)/N \leftthreetimes D/N$. Звідси $H = \langle u \rangle \leftthreetimes D_1$, $[\langle u \rangle, D_1] = \langle u \rangle$, але тоді $Z(G) \cap \langle u \rangle = 1$. Отже, r не ділить $|N|$. Зрозуміло, що $N = \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, де $x = 1$, $N = \langle d \rangle$. Тоді $G \cong SL(2, p)$. Необхідність доведено. Достатність доведено в лемі. Теорему доведено.

1. *Redei L.* Das „Schiefe Produkt" in Gruppentheorie mit Auwendungen // Comment. math. helv. – 1947. – **20**. – P. 225–264.
2. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 8. – С. 1313–1315.
3. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп // Киев: Ин-т математики НАН Украины. 1997. – 230 с.
4. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
5. *Blackburn N.* Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**, № 41. – P. 1–22.
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
8. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, № 3. – P. 383–437.

Одержано 01.08.97