УДК 512. 544

В. В. Сергейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПОДГРУППАХ, ПОДНИМАЮЩИХСЯ ПО МОДУЛЮ ЦЕНТРАЛЬНОГО КОММУТАНТА

We consider a finitely generated group G with the commutant of odd order $p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$ located at the center and prove that there exists a decomposition of G/G' into the direct product of indecomposable cyclic groups such that every factor except at most $n_1 + \dots + n_s$ factors lifts modulo commutant.

Для скінченнопороджуваної групи G з комутантом непарного порядку $p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$, що міститься у центрі, існує розклад G/G' у прямий добуток нерозкладних циклічних груп такий, що майже кожний співмножник, за винятком не більше $n_1 + \dots + n_s$, підіймається за модулем комутанта.

Пусть G — группа с коммутантом G'. Коммутант назовем *центральным*, если он содержится в центре группы. Будем говорить, что подгруппа $\overline{H} \subset G / G'$ *поднимается по модулю коммутанта*, если существует набор представителей $h \in \overline{h}$ (по одному для каждого $\overline{h} \in \overline{H}$), образующий подгруппу группы G (очевидно, изоморфную $\overline{H}$).

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть A — конечная абелева группа нечетного порядка $p_1^{n_1} \dots$ $\dots p_s^{n_s}$. Тогда для любой конечнопорожденной группы G с центральным коммутантом $G' \simeq A$ существует разложение G / G' в прямое произведение неразложимых циклических групп, в котором число сомножителей, не поднимающихся по модулю коммутанта, меньше или равно $n_1 + \dots + n_s$. Более того, существует G, для которой это число нельзя сделать меньше $n_1 + \dots + n_s$.*

Доказательство. Пусть

$$G / G' = \overline{G}_\infty \times \overline{G}_{q_1} \times \dots \times \overline{G}_{q_k},$$

где $\overline{G}_\infty$ — группа без кручения, $\overline{G}_{q_i}$ — силовские q_i-подгруппы.

Неразложимые прямые сомножители группы $\overline{G}_\infty$ поднимаются по модулю коммутанта.

Пусть $p \in \{ q_1, \dots, q_k \}$,

$$\overline{G}_p = \langle \overline{g}_1 \rangle_{p^{m_1}} \times \dots \times \langle \overline{g}_r \rangle_{p^{m_r}}, \quad m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1, \tag{1}$$

и $g_i \in \overline{g}_i$, $g_i^{p^{m_i}} = a \in G'$, $|a| = l p^n$, $p \nmid l$, $n \geq 0$. Взяв g_i^l и $\overline{g}_i^l$ в качестве новых g_i и $\overline{g}_i$, получим $|a| = p^n$. Если $p \notin \{ p_1, \dots, p_s \}$, то $a = 1$ и $\langle \overline{g}_i \rangle_{p^{m_i}}$ поднимается до подгруппы $\langle g_i \rangle_{p^{m_i}}$.

Поэтому можем считать, что $p \in \{ p_1, \dots, p_s \}$. Тогда $g_i^{p^{m_i}} = a_1^{\alpha_{1i}} \dots a_t^{\alpha_{ti}}$, где

$$A_p = \langle a_1 \rangle_{p^{k_1}} \times \dots \times \langle a_t \rangle_{p^{k_t}} \tag{2}$$

— силовская p-подгруппа группы G'. Рассмотрим целочисленную матрицу

$$S_p = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{t1} & \alpha_{t2} & \cdots & \alpha_{tr} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

i-я строка которой определяется по модулю p^{k_i}.

Покажем, что, перевыбирая в разложении (1) прямые сомножители и порождающие их элементы, мы можем делать с матрицей S_p следующие преобразования:

i) i-й столбец умножить на целое число $\gamma \not\equiv 0 \pmod p$;

ii) к i-му столбцу прибавить j-й $(j < i)$, умноженный на любое целое число δ;

iii) к i-му столбцу прибавить j-й $(j > i)$, умноженный на целое число $\delta p^{m_i - m_j}$.

Действительно, преобразование i) получаем, заменяя $\langle \bar{g}_i \rangle_{p^{m_i}}$ на $\langle \bar{g}_i^{\gamma} \rangle_{p^{m_i}}$ и, соответственно, g_i на $g_i' = g_i^{\gamma}$, так как $g_i'^{\,p^{m_i}} = a_1^{\gamma\alpha_{1i}} \ldots a_t^{\gamma\alpha_{ti}}$.

Преобразование ii) получаем, заменяя $\langle \bar{g}_i \rangle_{p^{m_i}}$ на $\left\langle \bar{g}_i \bar{g}_j^{\delta p^{m_j - m_i}} \right\rangle_{p^{m_i}}$ и, соответственно, g_i на $g_i' = g_i g_j^{\delta p^{m_j - m_i}}$, так как при центральном коммутанте, $p \neq 2$ и $g_i^{p^{m_i}} \in G'$ выполняется

$$g_i'^{\,p^{m_i}} = g_i^{p^{m_i}} g_j^{\delta p^{m_j}} \left[g_j^{\delta p^{m_j - m_i}}, g_i \right]^{1+2+\ldots+(p^{m_i}-1)} = g_i^{p^{m_i}} g_j^{\delta p^{m_j}} \left[g_j^{\delta p^{m_j - m_i}}, g_i \right]^{\frac{(p^{m_i}-1)\,p^{m_i}}{2}} =$$

$$= g_i^{p^{m_i}} g_j^{\delta p^{m_j}} \left[g_j^{\delta p^{m_j}}, g_i \right]^{\frac{p^{m_i}-1}{2}} = g_i^{p^{m_i}} g_j^{\delta p^{m_j}} = a_1^{\alpha_{1i} + \delta\alpha_{1j}} \ldots a_t^{\alpha_{ti} + \delta\alpha_{tj}}.$$

Преобразование iii) получаем, заменяя $\langle \bar{g}_i \rangle_{p^{m_i}}$ на $\langle \bar{g}_i \bar{g}_j^{\delta} \rangle_{p^{m_i}}$ и, соответственно, g_i на $g_i' = g_i g_j^{\delta}$, так как

$$g_i'^{\,p^{m_i}} = g_i^{p^{m_i}} g_j^{\delta p^{m_i}} \left[g_j^{\delta}, g_i \right]^{1+2+\ldots+(p^{m_i}-1)} = g_i^{p^{m_i}} g_j^{(\delta p^{m_i - m_j})\, p^{m_j}} =$$

$$= a_1^{\alpha_{1i} + \delta p^{m_i - m_j} \alpha_{1j}} \ldots a_t^{\alpha_{ti} + \delta p^{m_i - m_j} \alpha_{tj}}.$$

Очевидно, что если взять новое разложение (1) и новые представители $g_i \in \bar{g}_i$, то от матрицы S_p можно перейти к новой, используя преобразования i) – iii).

Учитывая, что элементы 1-й строки матрицы S_p определяются по модулю p^{k_1}, преобразованием i) приведем их к виду p^l, $0 \le l \le k_1$, или 0, затем преобразованием ii) приведем 1-ю строку к виду

$$(0, \ldots, 0, p^{l_1}, 0, \ldots, 0, p^{l_2}, 0, \ldots\ldots, 0, p^{l_d}, 0, \ldots, 0), \tag{4}$$

где $k_1 > l_1 > \ldots > l_d \ge 0$. Столбцы с ненулевым элементом первой строки назовем *выделенными*, их число не превышает k_1.

Затем так же приведем элементы второй строки, кроме элементов, расположенных в выделенных столбцах (при этом первая строка не меняется), и назовем *выделенными* столбцы с ненулевыми элементами первой или второй строк, их число не превышает $k_1 + k_2$ и т. д. После приведения последней строки получим матрицу S_p, в которой не более $k_1 + \ldots + k_r = n(p)$ выделенных столбцов (где $p^{n(p)} = |A_p|$), остальные столбцы нулевые. Нулевому столбцу с номером i соответствует (новый) элемент $g_i \in \bar{g}_i$, порядок которого равен порядку $\bar{g}_i$, поэтому подгруппа $\langle \bar{g}_i \rangle_{p^{m_i}}$ поднимается по модулю G' до подгруппы $\langle g_i \rangle_{p^{m_i}}$. Поскольку $n(p_i)=n_i$, то, проделав этот процесс для всех $p \in \{q_1, \ldots, q_k\}$, получим разложение G/G' в прямое произведение неразложимых циклических групп, в котором почти каждый сомножитель, за исключением не более $n_1+\ldots+n_s$, поднимается по модулю коммутанта.

Осталось показать, что для каждой A существует группа G_A, для которой число неподнимаемых сомножителей не меньше $n_1+\ldots+n_s$. Достаточно построить G_{A_p} для p-групп A_p, так как тогда для любой $A=A_{p_1}\times\ldots\times A_{p_s}$ $(3\le$ $\le p_1\le\ldots\le p_s)$ можно положить $G_A=G_{A_{p_1}}\times\ldots\times G_{A_{p_s}}$. Пусть A_p имеет вид (2) с $k_1\ge\ldots\ge k_t$. Рассмотрим целочисленную матрицу $S_p=(\alpha_{ij})=(M_{k_1}\mid M_{k_1-1}\mid\ldots$ $\ldots\mid M_0)$ размера $t\times r$, где $r=(k_1+1)t$, $M_i=\operatorname{diag}(p^i,\ldots,p^i,0,\ldots,0)$, причем ненулевые элементы i-й строки матрицы S_p образуют последовательность $p^{k_i-1}, p^{k_i-2},\ldots, p, 1$ (в частности, $M_{k_1}=0$). Пусть G_p — группа с образующими $a_1,\ldots,a_t, g_1,\ldots,g_r$ и определяющими соотношениями $a_i^{p^{k_i}}=1$, $g_i^{p^{m_i}}=a_1^{\alpha_{1i}}\ldots a_t^{\alpha_{ti}}$, $m_i=2(r-i)+k_1$, $[g_i, g_{t+i}]=a_i$, $1\le i\le t$, остальные пары образующих коммутируют. Поскольку число ненулевых столбцов матрицы S_p равно $n(p)=k_1+\ldots+k_r$ и преобразованиями i)– iii) их число нельзя уменьшить, то число неподнимаемых сомножителей нельзя сделать меньше $n(p)$ перевыбором разложения (1) и можно положить $G_{A_p}=G_p$. Теорема доказана.

Близкий результат был получен Томпсоном (см. [1], теорема 12.2): если G — конечная p-группа $(p>2)$, у которой все элементы порядка p содержатся в ее центре $Z(G)$, то минимальное число образующих G не больше минимального числа образующих $Z(G)$.

Замечания. **1.** Если изучаемая выше группа G имеет конечный порядок, то для ее задания надо для каждого $p\in\{q_1,\ldots,q_k\}\cap\{p_1,\ldots,p_s\}$ задать не только матрицу S_p, но и набор кососимметрических $r\times r$-матриц $C_p^{(1)}=$ $=(\beta_{ij}^{(1)}),\ \ldots\ ,\ C_p^{(t)}=(\beta_{ij}^{(t)})$, определяющих коммутаторы $[g_i g_j]=a_1^{\beta_{ij}^{(1)}}\ldots a_t^{\beta_{ij}^{(t)}}$ (и, конечно, порядки неразложимых прямых сомножителей групп G' и G/G'); в этой заметке мы приводим только матрицы S_p. Отметим, что уже задача о классификации конечных p-групп с центральным коммутантом типа (p, p) и задача о классификации конечных p-групп с центральным коммутантом типа (p^2) сводятся к классической нерешенной задаче о каноническом виде пары матриц относительно преобразований одновременного подобия (см. [2]). Полная классификация конечнопорожденных групп с коммутантом порядка p получена в [3].

2. Теорема верна и для бесконечнопорожденных групп G, для которых G/G' есть (возможно, бесконечное) прямое произведение неразложимых локально циклических групп (т. е. групп $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, (p^∞), (p^n)), надо только несколько изменить доказательство. Именно, вместо (1) рассмотрим прямое произведение $\overline{G}_p=\times_{i<r} H_i$ (r — ординальное число), где H_i имеет тип (p^{m_i}), $\infty\ge m_1\ge m_2\ge\ldots$. Для каждого i зафиксируем m_i элементов $\overline{g}_{il}\in H_i$, $1\le l\le$ $\le m_i+1$, для которых $\overline{g}_{i1}^{\,p}=1$, $\overline{g}_{i2}^{\,p}=\overline{g}_{i1}$, $\overline{g}_{i3}^{\,p}=\overline{g}_{i2},\ldots$ и выберем $g_{il}\in\overline{g}_{il}$ так, чтобы $g_{i2}^{\,p}=g_{i1}$, $g_{i3}^{\,p}=g_{i2},\ldots$ Как и при доказательстве теоремы, можем считать, что порядок элемента $g_{i1}^{\,p}\in G'$ есть степень p, поэтому достаточно рассмотреть случай $p\in\{p_1,\ldots,p_s\}$. Тогда $g_{i1}^{\,p}\in A_p$ (см. (2)), $g_{i1}^{\,p}=a_1^{\alpha_{1i}}\ldots a_t^{\alpha_{ti}}$, и

получаем целочисленную матрицу S_p вида (3), но, возможно, с бесконечным множеством столбцов. С ней можно делать преобразования i) и ii) с помощью замен $g'_{il} = g_{il}^{\gamma}$ и, соответственно, $g'_{il} = g_{il}\, g_{jl}^{\delta}$ для всех $l < m_i + 1$. Применяя трансфинитную индукцию, приводим первую строку к виду (4) и т. д. Как следует из [4] (теорема 1), эти результаты можно перенести на группы с (нецентральным) коммутантом, являющимся конечным прямым произведением циклических групп простого порядка.

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin: Springer, 1967. – 793 p.
2. *Сергейчук В. В.* О классификации метабелевых групп // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 150 – 161.
3. *Сергейчук В. В.* Конечнопорожденные группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, №6. – С. 789 – 795.
4. *Мазурок О. О.* Групи з елементарним абелевим комутантом порядку не більше ніж p^2 // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №4. – С. 534 – 539.

Получено 09.06.97