

А. Ф. Баранник (Пед. ун-т, Слупськ, Польща),

І. І. Юрик (Укр. держ. ун-т харч. технологій)

КЛАСИФІКАЦІЯ МАКСИМАЛЬНИХ ПІДАЛГЕБР РАНГУ n КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ $AC(1, n)$

We obtain the complete classification of I -maximal subalgebras of rank n of the conformal algebra $AC(1, n)$.

Одержана повна класифікація I -максимальних підалгебр рангу n конформної алгебри $AC(1, n)$.

Вступ. Відомо, що існує багато нелінійних рівнянь теоретичної і математичної фізики, інваріантних відносно групи $C(1, n)$ конформних перетворень простору Мінковського $R_{1,n}$. Тому питання редукції і класифікації інваріантних розв'язків таких рівнянь тісно пов'язані з задачею дослідження підгрупової структури групи $C(1, n)$. Оскільки вивчення зв'язних підгруп групи Лі $C(1, n)$ зводиться до вивчення підалгебр відповідної алгебри Лі $AC(1, n)$, то приходимо до задачі класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$. Підалгебри алгебри $AC(1, n)$ для невеликих розмірностей n вивчалися в ряді робіт (див. [1] і цитувану там літературу), в яких класифікація підалгебр проводилась з точністю до sprzęженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. На основі цієї класифікації неважко зробити класифікацію підалгебр за рангами.

В даній роботі запропоновано принципово новий метод класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$ довільної розмірності n за рангами, який не вимагає при цьому повної класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$.

1. Реалізація конформної алгебри $AC(1, n)$. Нехай $R_{1,n}$ ($n \geq 2$) — простір Мінковського з метрикою $g_{\alpha\beta}$, де $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$); $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$. Відображення $x_i = x_i(y_0, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) області $U \subset R_{1,n}$ називається конформним, якщо

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{ki} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} = \lambda(x) g_{\alpha\beta},$$

де $\lambda(x) \neq 0$; $x = (x_0, \dots, x_n)$. Згідно з теоремою Ліувілля конформне перетворення є композицією руху, дилатації і інверсії або композицією руху і дилатації. Під рухами розуміють елементи псевдоортогональної групи $O(1, n)$ і зсуви (трансляції) T_a ; $x \rightarrow x + a$, а під дилатаціями (розтяганнями) — відображення $\lambda \rightarrow \lambda x$ ($\lambda \in R$; $\lambda > 0$), а інверсіями називають відображення

$$\hat{S}: x \rightarrow \left(\frac{x_0}{x^2}, \frac{x_1}{x^2}, \dots, \frac{x_n}{x^2} \right) \text{ або } \hat{S}T_a,$$

де $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$.

Алгебра Лі $AC(1, n)$ групи $C(1, n)$ конформних перетворень простору $R_{1,n}$ породжується векторними полями [1]:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\begin{aligned}
 J_{0a} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}, & J_{ab} &= x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b}, \\
 D &= -x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, & K_\alpha &= 2g_\alpha^\beta x_\beta x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} g^{\beta\nu} x_\beta x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де $\alpha = 0, 1, \dots, n$; $a, b = 0, 1, \dots, n$. Ці генератори задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 [J_{\alpha\beta}, J_{\nu\delta}] &= g_{\alpha\delta} J_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu} J_{\alpha\delta}; \\
 [P_\alpha, J_{\beta\nu}] &= g_{\alpha\beta} P_\nu - g_{\alpha\nu} P_\beta; & [P_\alpha, P_\beta] &= 0; \\
 [K_\alpha, J_{\beta\nu}] &= g_{\alpha\beta} K_\nu - g_{\alpha\nu} K_\beta; \\
 [K_\alpha, K_\beta] &= 0; & [D, P_\alpha] &= P_\alpha; & [D, K_\alpha] &= -K_\alpha; \\
 [D, J_{\alpha\beta}] &= 0; & [K_\alpha, P_\beta] &= 2(g_{\alpha\beta} D - J_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta, \nu, \delta = 0, 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Нехай $O(2, n+1)$ — група ізометрій псевдоевклідового простору $R_{2, n+1}$ з метрикою ρ_{ab} ($a, b = 1, 2, \dots, n+3$), де $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \dots = -\rho_{n+3, n+3} = 1$, $\rho_{ab} = 0$ при $a \neq b$. Позначимо через I_{ab} матрицю порядку $n+3$, яка має одиницю на перетині a -го рядку і b -го стовпця, і нулі на всіх решта місцях ($a, b = 1, \dots, n+3$). Базис алгебри $AO(2, n+1)$ утворюють матриці

$$\begin{aligned}
 \Omega_{12} &= I_{12} - I_{21}, & \Omega_{ab} &= -I_{ab} - I_{ba} \quad (a < b; a, b = 3, \dots, n+3), \\
 \Omega_{ia} &= -I_{ia} - I_{ai} \quad (i = 1, 2; a = 3, \dots, n+3).
 \end{aligned}$$

Вони пов'язані між собою такими комутаційними співвідношеннями:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad} \Omega_{bc} + \rho_{bc} \Omega_{ad} - \rho_{ac} \Omega_{bd} - \rho_{bd} \Omega_{ac},$$

де $a, b, c, d = 1, \dots, n+3$. Алгебра $AO(2, n+1)$ діє в псевдоевклідовому просторі $R_{2, n+1}$, який складається з $(n+3)$ -мірних стовпців, способом множення стовпця $X \in R_{2, n+1}$ зліва на матрицю $A \in AO(2, n+1)$. Базис $R_{2, n+1}$, елементи якого є одиничні стовпці, позначимо через $\{Q_1, \dots, Q_{n+3}\}$. Відображення $f: AO(2, n+1) \rightarrow AC(1, n)$ алгебри Лі $AO(2, n+1)$ на алгебру Лі $AC(1, n)$, яке задається за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta} &= f(\Omega_{\alpha+2, \beta+2}), & P_\alpha &= f(\Omega_{1, \alpha+2} - \Omega_{\alpha+2, n+3}), \\
 K_\alpha &= f(\Omega_{1, \alpha+2} + \Omega_{\alpha+2, n+3}), & D &= -f(\Omega_{1, n+3}),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

є ізоморфізмом. Тому $AO(2, n+1)$ і $AC(1, n)$ можна ототожнювати. В результаті одержуємо два набори позначень для одного і того ж базиса:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\alpha+2, \beta+2} &= J_{\alpha\beta}, & \Omega_{1, \alpha+2} &= \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha), \\
 \Omega_{\alpha+2, n+3} &= \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), & \Omega_{1, n+3} &= -D \quad (\alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Задача класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$ з точністю до $C(1, n)$ -спряженості рівносильна задачі класифікації підалгебр алгебри $AO(2, n+1)$ з точністю до $O(2, n+1)$ -спряженості. Це означає, що якщо Φ_1 — повний список $C(1, n)$ -неспряжених підалгебр алгебри $AC(1, n)$, то, замінивши генератори в кожній підалгебрі $L \in \Phi_1$ відповідними генераторами алгебри

$AO(2, n + 1)$ згідно із співвідношенням (3), одержимо повний список $\Phi_2 O(2, n + 1)$ -неспряжених підалгебр алгебри $AO(2, n + 1)$, і навпаки.

Група $O(2, n + 1)$ породжує дію алгебри $AO(2, n + 1)$ на просторі $R_{2, n+1}$. Це дозволяє множині всіх підалгебр алгебри $AO(2, n + 1)$ розбити на три класи:

1) **перший клас** складається із всіх підалебр, які не мають в $R_{2, n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів;

2) **другий клас** складається із підалебр, які мають в $R_{2, n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності одиниця. Це підалгебри, які спряжені з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$, що породжена генераторами $P_\alpha, J_{\alpha\beta}, D$, де $\alpha < \beta, \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$. Прикладом підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ є класична алгебра Галілея $A\tilde{G}(1, n)$, породжена генераторами $P_a, \tilde{G}_a, M, T, J_{ab}$, де

$$G_a = J_{oa} - J_{an}, \quad M = P_0 - P_n,$$

$$T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n) \quad (a < b; a, b = 1, \dots, n - 1);$$

3) **третій клас** складають підалебри, які мають в $R_{2, n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності два і не мають в $R_{2, n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів розмірності одиниця. Нехай $AOpt(1, n)$ — підалгебра алгебри $AC(1, n)$, породжена генераторами $M, P_a, G_a, J_{ab}, C, S, T, Z$ ($a < b$ і $a, b = 1, \dots, n - 1$) де

$$G_a = J_{oa} - J_{an}, \quad C = -(J_{on} + D),$$

$$Z = J_{on} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n).$$

Цей клас складають ті підалгебри алгебри $AOpt(1, n)$, які не спряжені з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1, n)$.

В даній роботі будемо використовувати такі позначення:

$$AO[r, s] = \langle J_{ab}, a, b = r, \dots, s \rangle;$$

$$AE[r, s] = \langle P_r, \dots, P_s \rangle \oplus AO[r, s];$$

$$AE_1[r, s] = \langle G_r, \dots, G_s \rangle \oplus AO[r, s];$$

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \dots, G_s + \gamma P_s \rangle \oplus AO[r, s],$$

де $r \leq s, \gamma \in R$. Позначимо через $d_1 \dots d_t$ натуральні числа, які задовольняють співвідношення $0 = d_1 < \dots < d_t = m \leq n$.

2. І-максимальні підалгебри алгебри конформної алгебри $AC(1, n)$.

Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних порядку s

$$F(u, u, \dots, u) = 0, \tag{4}$$

де $u = u(x), x \in R_{1, n}$; u — сукупність частинних похідних m -го порядку.

Нехай AG — алгебра Лі групи Лі G , яка є алгеброю інваріантності рівняння (4). Будемо передбачати також, що рівняння (4) інваріантне відносно групи G . Якщо H — довільна s -параметрична підгрупа групи G і $u = u(x)$ — H -інваріантний розв'язок рівняння (4), то під дією перетворення $g \in G$ розв'язок $u =$

$= u(x)$ переходить в gHg^{-1} -інваріантний розв'язок рівняння (4). Таким чином, задача класифікації H -інваріантних розв'язків рівняння (4) зводиться до задачі класифікації s -параметричних підгруп групи G з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів.

Відношення спряженості є відношенням еквівалентності на множині всіх s -параметричних підгруп групи G , тому воно розбиває множини всіх таких підгруп на класи. До одного класу належать ті і тільки ті підгрупи групи G , які спряжені між собою відносно групи внутрішніх автоморфізмів. Взявши по одному представнику з кожного класу еквівалентності, одержимо систему підгруп, попарно не спряжених між собою. Така система підгруп називається оптимальною системою s -параметричних підгруп групи G . Внаслідок відповідності між зв'язними підгрупами групи G і підгрупами алгебри Лі AG системі s -параметричних підгруп відповідає система s -мірних підалгебр алгебри AG і позначається θ_s [2]. Для алгебр Лі невеликих розмірностей побудувати оптимальну систему підалгебр порівняно неважко. Але, на жаль, скласти список всіх G -неспряжених підалгебр алгебри Лі AG великої розмірності практично неможливо.

Подолати це можна таким чином. Відомо, що важливою числовою характеристикою H -інваріантного розв'язку $u = u(x)$ є його ранг $n - r^*$, де r^* — ранг підгрупи H . Ранг $n - r^*$ може приймати значення $0, 1, \dots, n - 1$. Тому класифікацію підалгебр алгебри AG зручно проводити за рангами $r^* = 1, 2, \dots, n$. Дві підалгебри L_1 і L_2 алгебри AG , які мають один і той же ранг, можуть визначати несуттєво різні множини S_1 і S_2 розв'язків рівняння (4), тобто такі, які переводяться одна в одну деякими перетвореннями з групи G . Це буде, наприклад, в тому випадку, коли множина інваріантів підалгебри L_1 переводиться в множину інваріантів підалгебри L_2 деяким перетворенням з групи G . Тому дві підалгебри $L_1, L_2 \subset AG$ доцільно назвати еквівалентними, якщо існує такий елемент $g \in G$, що gL_1g^{-1} і L_2 мають одні і ті ж інваріанти. Відношення еквівалентності є більш сильним, ніж відношення спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. Воно розбиває множини всіх підалгебр алгебри AG на класи еквівалентних між собою підалгебр. В множині всіх підалгебр, які мають одні і ті ж інваріанти, існує одна (максимальна) підалгебра, яка містить всю решту підалгебр з цією властивістю. Таку підалгебру будемо називати I -максимальною підалгеброю алгебри AG . Дві I -максимальні підалгебри алгебри AG еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони спряжені. Таким чином, основною метою класифікації підалгебр алгебри AG інваріантності диференціального рівняння є задача перерахування всіх I -максимальних підалгебр даного рангу з точністю до спряженості. I -максимальні підалгебри мають порівняно просту структуру, їх кількість значно менша, ніж кількість неспряжених підалгебр. Дійсно, розглянемо такі підалгебри конформної алгебри $AC(1, n)$:

$$L_1 = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \ni AO[1, n];$$

$$L_2 = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \ni F,$$

де F — довільна підалгебра алгебри $AO[1, n]$. Оскільки L_1 і L_2 мають одні і ті ж інваріанти, то вони еквівалентні. Підалгебра L_1 є I -максимальною в алгебрі $AC(1, n)$ і її структура значно простіша від структури підалгебри L_2 . В той же час опис всіх неспряжених підалгебр вигляду $\langle P_1, \dots, P_n \rangle \ni F$, де $F \subset AO[1, n]$, викликає вже значні труднощі.

При дослідженні I -максимальних підалгебр конформної алгебри $AC(1, n)$ використовуємо метод [3 – 5], який дозволяє описати I -максимальні підалгебри

алгебри Лі групи перетворень псевдоевклідового простору $R_{1,n}$. За допомогою цього методу була проведена, зокрема, класифікація I -максимальних підалгебр рангу n і $n - 1$ алгебри Пуанкаре $AP(1, n)$ [3, 6], а також класифікація I -максимальних підалгебр рангу n і $n - 1$ розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$ [3, 4]. Цей метод придатний для описання I -максимальних підалгебр конформної алгебри $AC(1, n)$ і не залежить від реалізації цієї алгебри інфінітезимальними операторами першого порядку.

3. Підалгебри першого класу. Підалгебри різних класів неспряжені відносно групи $C(1, n)$ -автоморфізмів і кожен з них інваріантний при дії будь-якого автоморфізма. Тому доцільно класифікувати підалгебри кожного класу окремо. При цьому виключимо з розгляду ті підалгебри алгебри $AC(1, n)$, які з точністю до спряженості містять $P_0 + P_n$ або P_0 .

Теорема 1. *Нехай L — максимальна підалгебра рангу n алгебри $AC(1, n)$ першого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тоді $L \subset C(1, n)$ -спряжена з однією з наступних алгебр:*

1) $L_1 = \langle K_1 - P_1 \rangle$, якщо $n = 1$;

2) $L_2 = \langle K_1 - P_1, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus AO[1, n]$, якщо $n > 1$;

3) $L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle$, якщо $n = 1$;

4) $L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n]$, якщо $n \geq 2$;

5) $L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n - 1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$;

6) $L_6 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, t - 2] \oplus$

$\oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus AO[t - 1, n])$, $t = 4, \dots, n$; $n \geq 4$;

7) $L_7 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t - 2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t - 1, \dots, n \rangle$, $t = 4, \dots, n + 1$, $n \geq 4$;

8) $L_8 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t - 2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t - 1, \dots, n - 1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $t = 4, \dots, n - 1$, $n \geq 5$;

9) $L_9 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t - 2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t - 1, \dots, t + s - 2 \rangle \oplus$

$\oplus (\langle K_{t+s-1} - P_{t+s-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = n + s - 1, \dots, n \rangle)$, $t = 4, \dots, n - 2$, $s = 2, \dots, n - t$, $n \geq 6$;

10) $L_{10} = \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n - 1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$;

11) $L_{11} = \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, t - 2 \rangle \oplus$

$\oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = t - 1, \dots, n \rangle)$,

$t = 4, \dots, n$, $n \geq 4$;

12) $L_{12} = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle$, $0 < \alpha < 1$, $n = 1$;

13) $L \oplus AO(2, k_1)$, де L — незвідна 1-максимальна підалгебра рангу $k_2 - 2$ алгебри $AO(k_2)$, $k_1 + k_2 = n + 1$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 3$;

14) $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle$.

Доведення. Позначимо через Q_1, \dots, Q_{n+3} ортогональний базис псевдо-евклідового простору $R_{2,n+1}$, який задовольняє умови: $(Q_1, Q_1) = 1$, $(Q_2, Q_2) = 1$, $(Q_3, Q_3) = -1, \dots, (Q_{n+3}, Q_{n+3}) = -1$. Тут (Q_i, Q_j) — скалярний добуток векторів Q_i і Q_j ($i, j = 1, \dots, n + 3$). Нехай L — деяка підалгебра рангу n алгебри $AO(2, n + 1)$ з першого класу і

$$R_{2,n+1} = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$$

є розкладом простору $R_{2,n+1}$ в пряму ортогональну суму незвідних L -підпросторів. Якщо $s = 1$, то L є незвідною підалгеброю алгебри $AO(2, n + 1)$. У випадку, коли $n + 1$ — непарне число і $n + 1 > 3$, незвідна підалгебра L алгебри $AO(2, n + 1)$ збігається з $AO(2, n + 1)$ [7]. Оскільки ранг алгебри $AO(2, n + 1)$ дорівнює $n + 2$, а ранг підалгебри L дорівнює n , то розглянутий випадок неможливий. Якщо $n + 1 = 3$, то незвідна підалгебра L алгебри $AO(2, 3)$ спряжена з підалгеброю [7]

$$\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \rangle,$$

а значить, ранг підалгебри L дорівнює 3, що також неможливо. Якщо $n + 1 = 2k$ — парне число, то L спряжена з одною з таких алгебр [7]: 1) $AO(2, n + 1)$; 2) $ASU(1, k)$; 3) $AS(1, k) \oplus \langle Z \rangle$. У всіх трьох випадках ранг підалгебри L відмінний від n . Тому в (5) $s \geq 2$. Припустимо, що в розкладі (5) існують два одномірні підпростори V_1 і V_2 , які мають різні сигнатури. Можна припустити при цьому, що $V_1 = \langle Q_1 \rangle$ і $V_2 = \langle Q_3 \rangle$. Але тоді $V_1 \oplus V_2$ містить L -інваріантний ізотропний підпростір $\langle Q_1 + Q_3 \rangle$ або $\langle Q_1 - Q_3 \rangle$, а це неможливо.

Припустимо, що $V_1 = \langle Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_t \rangle$, де $t \geq 3$, і $L = L_1 + \dots + L_s$ — розклад алгебри L в пряму суму незвідних підалгебр L_1, \dots, L_s . В цьому випадку L_1 , як незвідна підалгебра алгебри $AO(V_1)$, виділяється прямим доданком в алгебрі L [1]. Отже, L містить підалгебру $\langle \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23} \rangle$, яка спряжена з $\langle \Omega_{12}, \Omega_{1,n+3}, \Omega_{2,n+3} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_0, K_0, D \rangle$, а це неможливо, оскільки за умовою $P_0 \notin L$.

Нехай в розкладі (5) $s = 3$. З наведених вище досліджень і на основі теореми Віта можна вважати, що розклад (5) простору $R_{2,n+1}$ є одним з наступних:

$$1) R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \dots, Q_{n+3} \rangle;$$

$$2) R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3 \rangle \oplus \langle Q_4 \rangle, n = 1;$$

$$3) R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \dots, Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle, n \geq 2;$$

$$4) R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \dots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle, n \geq 3;$$

$$5) R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle, t = 4, \dots, n; n \geq 4;$$

$$6) R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle,$$

$$t = 4, \dots, n + 1; n \geq 4;$$

- 7) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle,$
 $t = 4, \dots, n - 1; n \geq 5;$
- 8) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{t+s} \rangle \oplus \langle Q_{t+s+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle,$
 $t = 4, \dots, n - 2; s = 2, \dots, n - t; n \geq 6;$
- 9) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, \dots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle, n \geq 3;$
- 10) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle,$
 $t = 4, \dots, n; n \geq 4.$

У випадку 1 $L = \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+2, n+3} \rangle = AO[3, n + 3]$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle K_1 - P_1 \rangle$, якщо $n = 1$, і $\langle K_1 - P_1, \dots, K_n - P_n \rangle \supseteq AO[1, n]$, якщо $n > 1$. У випадку 2 $L = \langle K_0 - P_0 \rangle$. Якщо маємо розклад 3, то одержуємо підалгебру $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+1, n+2} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(1, n)$, $n \geq 2$. У випадку 4 $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+1} \rangle \oplus \langle \Omega_{n+2, n+3} \rangle$, а значить, їй відповідає підалгебра $\langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n - 1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$. Якщо маємо розклад 5, то алгебра L належить до виду 6 теореми 1. У випадку 6 одержуємо таку підалгебру алгебри $AO(2, n + 1)$:

$$L = \langle \Omega_{13}, \dots, \Omega_{1t}, \Omega_{34}, \dots, \Omega_{t-1,t} \rangle \oplus \langle \Omega_{2,t+1}, \dots, \Omega_{2, n+2}, \dots, \Omega_{n+1, n+2} \rangle.$$

Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра виду 4 теореми 1. Решту випадків 7 – 10 розглядають аналогічно.

Нехай далі в розкладі 5 маємо $s = 2$. Підалгебра L є підпрямою сумою двох незвідних підалгебр L_1 і L_2 , де $L_1 \subset AO(V_1)$, $L_2 \subset AO(V_2)$. Якщо $n = 1$, то $L = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle$, $0 < \alpha < 1$. Якщо $n > 1$ і підалгебри L_1 і L_2 — неізоморфні, то $L = L_1 \oplus L_2$. При цьому можна вважати, що ранг підалгебри L_1 дорівнює $\dim V_1 - 2$, а ранг підалгебри L_2 дорівнює $\dim V_2 - 1$. Таким чином, підалгебра L відноситься до виду 13 теореми 1. Якщо підалгебри L_1 і L_2 ізоморфні, то $L \neq L_1 \oplus L_2$. В цьому випадку $L_1 = AO(V_1) \cong AO(V_2) = L_2$. Можна припустити, що $V_1 = \langle Q_1, Q_3, \dots, Q_t \rangle$, $V_2 = \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$. Оскільки ранг підалгебри L дорівнює $t - 1$, то $t = 1 + n$. Отже, $n = 3$, а тому $L = \langle \Omega_{13} + \Omega_{25}, \Omega_{14} + \Omega_{16}, \Omega_{34} + \Omega_{56} \rangle$. Відповідною підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle$. Теорему доведено.

4. Підалгебри другого класу. Максимальні підалгебри рангу n алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ з точністю до $\tilde{P}(1, n)$ -спряженості класифіковані в [4]. Оскільки конформна спряженість більш сильна спряженість, то тут виникає задача класифікації підалгебр алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ з точністю до $C(1, n)$ -спряженості. Дослідження підалгебр алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ на спряженість відносно групи $C(1, n)$ -автоморфізмів було проведено в [8]. З цих результатів, зокрема, впливає: якщо L_1 і L_2 — дві довільні підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ спряжені відносно групи $C(1, n)$ -автоморфізмів, то $L_1 = \varphi(L_2)$, де $\varphi = \varphi_h \varphi_1$, $\varphi_1 \in \tilde{P}(1, n)$ -автоморфізмом, а $\varphi_h \in C(1, n)$ -автоморфізмом, визначеним елементом

$$h = \exp \frac{\pi}{4} (K_0 + P_0 + K_n - P_n).$$

Автоморфізм $\varphi_h \in$ автоморфізмом алгебри $\langle P_0 + P_n, P_a, G_a, J_{ab}, J_{on}, D \rangle$ ($a < b$; $a, b = 1, 2, \dots, n-1$) і діє на її елементи таким чином:

$$\begin{aligned} hG_a h^{-1} &= P_a, & hP_a h^{-1} &= -G_a, & hJ_{on} h^{-1} &= D, \\ hD h^{-1} &= -J_{on}, & hM h^{-1} &= M, & hJ_{ab} h^{-1} &= J_{ab}. \end{aligned}$$

Застосовуючи його, наприклад, до алгебри $AE_1[1, n-1] \boxplus \langle D \rangle$, одержуємо, що розглядувана підалгебра спряжена з $AE[1, n-1] \boxplus \langle J_{on} \rangle$. Це дозволяє скоротити перелік підалгебр рангу n алгебри $AC(1, n)$, які розглядаються з точністю до $\tilde{P}(1, n)$ -спряженості.

Теорема 2. *Нехай L — максимальна підалгебра рангу n алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ другого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тоді $L \in C(1, n)$ -спряженою з однією з наступних алгебр:*

I. Підалгебрами алгебри $AP(1, n)$:

- 1) $AE[1, n]$ ($n \geq 1$);
- 2) $\langle J_{01} \rangle$ ($n = 1$);
- 3) $AE[1, n-1] + \langle J_{0n} \rangle$ ($n > 1$);
- 4) $AO[0, n]$ ($n \geq 2$);
- 5) $AO[0, k] \oplus AE[k+1, n]$ ($k = 2, \dots, n-1$; $n \geq 3$).

II. Підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ з ненульовою проекцією на $\langle D \rangle$:

- 1) $AE[1, n-1] \boxplus \langle D \rangle$ ($n \geq 2$);
- 2) $AE[1, n-1] \boxplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$ ($\alpha \neq 0$; $n \geq 2$);
- 3) $AE[1, n-1] \boxplus \langle J_{0n} + D + M \rangle$ ($n \geq 2$);
- 4) $AO[1, n] \boxplus \langle D \rangle$;
- 5) $(AO[1, m] \oplus AE[m+1, n]) \boxplus \langle D \rangle$ ($m = 2, \dots, n-1$; $n \geq 3$);
- 6) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \boxplus \langle D \rangle$ ($m = 1, \dots, n-2$; $n \geq 3$);
- 7) $AE_1[1, n-1] \boxplus \langle D \rangle$ ($n \geq 2$);
- 8) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \boxplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$
($m = 1, \dots, n-2$; $n \geq 3$; $\alpha \neq 0$);
- 9) $AE_1[1, n-1] \boxplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$ ($n \geq 2$; $\alpha \neq 0$);
- 10) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \boxplus \langle J_{0n} + D + M \rangle$
($m = 1, \dots, n-2$; $n \geq 3$);
- 11) $AE_1[1, n-1] \boxplus \langle J_{0n} + D + M \rangle$ ($n \geq 2$);
- 12) $(AO[1, m] \oplus AE[m+1, n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \boxplus \langle D \rangle$ ($m = 1, \dots, n-2$; $n \geq 3$);
- 13) $(AO[1, n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \boxplus \langle D \rangle$ ($n \geq 2$);
- 14) $(AO[0, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \boxplus \langle D \rangle$ ($m = 2, \dots, n-2$; $n \geq 4$);

15) $AO[0, n - 1] \oplus \langle D \rangle \quad (n \geq 3);$

16) $(\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2, n - 1]) \oplus \langle J_{0n} - 2D \rangle \quad (n \geq 3);$

17) $(\langle G_1 + P_0 - P_2 \rangle \oplus \langle J_{02} - 2D \rangle) \quad (n = 2);$

18) $(AO[0, m] \oplus AO[m + 1, q] \oplus AE[q + 1, n]) \oplus \langle D \rangle$
 $(m = 2, \dots, n - 2; q = m + 1, \dots, n; n \geq 4).$

5. Підалгебри третього класу. Нехай $A\tilde{G}_0(1, n - 1) = \langle M, P_i, G_a, J_{ab} \rangle$ ($a < b$; $a, b = 1, \dots, n - 1$) — ізохронна алгебра Галілея і L — деяка підалгебра третього класу. Якщо $L \cap A\tilde{G}_0(1, n - 1) = 0$, то проєкція $\tau(L)$ підалгебри L на алгебру $AGL(2, R) = \langle C, S, T, Z \rangle$ збігається з однією з алгебр: $\langle S + T \rangle$, $\langle S + T + \lambda Z \rangle$ ($\lambda > 0$), $\langle S + T, Z \rangle$. Дійсно, якщо $\tau(L) = \langle C, S, T \rangle$, то за теоремою Уайтхеда [9] $L = \langle C, S, T \rangle$. Отже, L містить підалгебру $\langle T \rangle$, спряжену з підалгеброю $\langle M \rangle$, а це протирічить припущенню. Якщо $\tau(L) = \langle C, S, T, Z \rangle$, то $\langle C, S, T \rangle \subset L$ і знову приходимо до протиріччя.

Припустимо, що $\tau(L) = \langle S + T \rangle$, тоді ранг підалгебри L дорівнює одиниці, а значить, $n = 1$. В розглянутому випадку L спряжена з однією з таких підалгебр: $\langle S + T \rangle$, $\langle S + T \pm M \rangle$. Якщо $\tau(L) = \langle S + T + \lambda Z \rangle$ ($\lambda > 0$), то знову $n = 1$ і L спряжена з підалгеброю $\langle S + T + \lambda Z \rangle$ ($\lambda > 0$). У випадку $\tau(L) = \langle S + T, Z \rangle$ маємо $n = 2$, а значить, L спряжена з підалгеброю $\langle S + T, Z \rangle$.

Нехай $L_1 = L \cap A\tilde{G}_0(1, n - 1) \neq 0$. Оскільки L є I -максимальною підалгеброю рангу n , то L_1 є I -максимальною підалгеброю рангу $n - 1$ або $n - 2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$. Якщо L_1 є I -максимальною підалгеброю рангу $n - 1$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$, то L є розширенням підалгебри L_1 з допомогою одномірної підалгебри виду $\langle S + T + X \rangle$, або $\langle S + T + \lambda Z + X \rangle$ ($\lambda > 0$), де $X \in A\tilde{G}_0(1, n - 1)$. Алгебра $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$ містить тільки такі I -максимальні підалгебри рангу $n - 1$:

1) $AE[1, n - 1] \quad (n \geq 2);$

2) $AE_1[1, n - 1] \quad (n \geq 2);$

3) $AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1] \quad (m = 1, \dots, n - 2; n \geq 3);$

4) $\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1}, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$

$(m = 1, \dots, n - 1; n \geq 2).$

Розглянемо, наприклад, підалгебру $L_1 = AE[1, n - 1]$. Її нормалізатор в алгебрі $AOpt(1, n)$ збігається з підалгеброю $L_1 \oplus K$, де $K = \langle M, Z, T, C \rangle$. Звідси випливає, що алгебра L_1 не має потрібного розширення в алгебрі $AC(1, n)$.

Нехай далі L_1 є I -максимальною підалгеброю рангу $n - 2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$. I -максимальна алгебра L рангу n є розширенням підалгебри L_1 з допомогою підалгебри виду $\langle S + T + X_1, Z + X_2 \rangle$, де $X_1, X_2 \in A\tilde{G}_0(1, n - 1)$. Повна класифікація I -максимальних підалгебр рангу $n - 2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$ проведена в [6]. Використовуючи опис цих підалгебр, можна одержати повний опис I -максимальних підалгебр рангу n алгебри $AOpt(1, n)$, проєкції яких на $\langle C, S, T, Z \rangle$ збігаються з $\langle S + T, Z \rangle$. Розглянемо, наприклад, I -максимальну підалгебру $L_1 = AO[1, n - 1]$ рангу $n - 2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$. Її нормалізатор в алгебрі $AOpt(1, n)$ збігається з підалгеброю $L_1 \oplus K$, де $K = \langle S, T, Z, C \rangle$.

M). З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів алгебра K має тільки одну підалгебру, проекція якої на $\langle S, T, Z \rangle$ дорівнює $\langle S + T, Z \rangle$. Ця підалгебра збігається з $\langle S + T, Z \rangle$. Отже, для підалгебри $L_1 = AO[1, n - 1]$ існує тільки одне розширення рангу n в алгебрі $AOpt(1, n)$, яке збігається з $AO[1, n - 1] \oplus \langle S + T, Z \rangle$.

Оскільки для довільної I -максимальної підалгебри L_1 рангу $n - 2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n - 1)$ відповідні генератори X_1 і X_2 мають громіздкий вигляд, то обмежимося лише тими підалгебрами L_1 , у яких проекція $\omega(L_1)$ на підалгебру $AO[1, n - 1]$ є нульовою, або примарною алгеброю [1], яка розкладається в підпряму суму не більше трьох незвідних підалгебр.

Теорема 3. Нехай L — максимальна підалгебра рангу n алгебри $AC(1, n)$ третього класу. Якщо $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$ і $\omega(L) = 0$, або $\omega(L)$ є примарною алгеброю, яка розкладається в підпряму суму трьох незвідних підалгебр, то $L \in C(1, n)$ -спряженою з однією з наступних алгебр:

- 1) $\langle S + T \rangle$, якщо $n = 1$;
- 2) $\langle S + T \pm M \rangle$, якщо $n = 1$;
- 3) $\langle S + T + \lambda Z \rangle$, якщо $\lambda > 0$; $n = 1$;
- 4) $\langle S + T, Z \rangle$, якщо $n = 2$;
- 5) $AO[1, n - 1] \oplus \langle S + T, Z \rangle$, якщо $n > 2$;
- 6) $\langle G_1 + P_{d+1}, G_2 + P_{d+2}, \dots, G_d + P_{2d} \rangle \oplus (K \oplus \langle J, Z \rangle)$; де K — діагональ в $AO[1, d] \oplus AO[d + 1, 2d]$, а $J = S + T + \sum_{a=1}^d J_{a, a+d}$ ($n - 1 = 2d$; $d > 1$);
- 7) $\left\langle G_a + \frac{1}{\sqrt{3}}P_a + \frac{2}{\sqrt{3}}P_{2d+a}, G_{d+a} - \frac{1}{\sqrt{3}}P_{d+a} + \frac{2}{\sqrt{3}}P_{2d+a} \mid a = 1, \dots, d \right\rangle \oplus \oplus (K \oplus \langle J, Z \rangle)$,

де K — діагональ в $AO[1, d] \oplus AO[d + 1, 2d] \oplus AO[2d + 1, 3d]$, а $J = S + T + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{a=1}^d (J_{a, d+a} + J_{a, 2d+a} J_{d+a, 2d+a})$ ($n - 1 = 3d$; $d > 1$).

6. I-максимальні підалгебри рангу 2 алгебри $AC(1, 2)$

А. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_0 + K_0, J_{12} \rangle, \quad L_2 = \langle K_1 - P_1, K_2 - P_2, J_{12} \rangle.$$

В. Підалгебри другого класу:

$$\begin{aligned} L_3 &= \langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle, & L_4 &= \langle P_1, P_2, J_{12} \rangle, \\ L_5 &= \langle J_{02}, P_1 \rangle, & L_6 &= \langle J_{12}, D \rangle, \\ L_7 &= \langle P_1, J_{02} + \alpha D \rangle \quad (\alpha > 0), \\ L_8 &= \langle G_1 + P_0 - P_2; J_{02} - 2D \rangle, & L_9 &= \langle J_{02}, D \rangle, \\ L_{10} &= \langle P_1, J_{02} + D + M \rangle. \end{aligned}$$

С. Підалгебри третього класу:

$$L_{11} = \langle S + T, Z \rangle.$$

7. І-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1, 3)$

А. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle,$$

$$L_2 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, K_3 - P_3 \rangle, \quad L_3 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,$$

$$L_4 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}, K_3 - P_3 \rangle,$$

$$L_5 = \langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + K_0 - P_0, D + J_{02} - \sqrt{3}J_{01}, P_0 + K_0 - 2(K_2 - P_2) \rangle,$$

$$L_6 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3 \rangle.$$

В. Підалгебри другого класу:

$$L_7 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \quad L_8 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,$$

$$L_9 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{03} \rangle, \quad L_{10} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, P_3 \rangle,$$

$$L_{11} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D \rangle, \quad L_{12} = \langle G_1 + P_0 - P_3, P_2, J_{03} - D \rangle,$$

$$L_{13} = \langle G_1, P_2, D \rangle, \quad L_{14} = \langle G_1, P_2, J_{03} + \alpha D \rangle \quad (\alpha \neq 0),$$

$$L_{15} = \langle P_2, P_3, J_{23}, D \rangle, \quad L_{16} = \langle P_1, P_2, J_{12}, J_{03} + \alpha D \rangle \quad (\alpha > 0),$$

$$L_{17} = \langle P_1, P_2, J_{12}, J_{03} + D + M \rangle, \quad L_{18} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, D \rangle,$$

$$L_{19} = \langle J_{12}, P_3, D \rangle,$$

$$L_{20} = \langle J_{03}, P_3, D \rangle, \quad L_{21} = \langle J_{03}, J_{12}, D \rangle,$$

$$L_{22} = \langle G_1, J_{03} + D + P_0 + P_3, P_2 \rangle.$$

С. Підалгебри третього класу:

$$L_{23} = \langle S + T + J_{12}, Z, G_1 + P_2 \rangle, \quad L_{24} = \langle J_{12}, S + T, Z \rangle.$$

8. І-максимальні підалгебри рангу 4 алгебри $AC(1, 4)$

А. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24} \rangle,$$

$$L_2 =$$

$$\langle P_0 + K_0 - 4J_{23}, P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, -K_4 - P_4 \rangle,$$

$$L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(3) \oplus \langle K_4 + P_4 \rangle,$$

$$L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus$$

$$\oplus \left\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}(K_3 - P_3) \right\rangle,$$

$$L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(4),$$

$$L_6 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle,$$

$$L_7 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4 \rangle,$$

$$L_8 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34} \rangle.$$

В. Підалгебри другого класу:

$$L_9 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle,$$

$$\begin{aligned}
L_{10} &= \langle J_{04}, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, & L_{11} &= \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12} \rangle, \\
L_{12} &= \langle J_{01}, J_{02}, J_{04}, J_{12}, J_{14}, J_{24}, P_3 \rangle, & L_{13} &= AO(1, 4), \\
L_{14} &= \langle J_{12}, D, P_3, P_4, J_{34} \rangle, & L_{15} &= \langle J_{04}, D, P_1, P_2, J_{12} \rangle, \\
L_{16} &= \langle J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \quad (\alpha > 0), \\
L_{17} &= \langle J_{04}, J_{12}, D, P_3 \rangle, & L_{18} &= \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D, P_1 \rangle, \\
L_{19} &= \langle G_3, J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, J_{12} \rangle \quad (\alpha \neq 0), \\
L_{20} &= \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3 \rangle, & L_{21} &= AO(4) \oplus \langle D \rangle, \\
L_{22} &= \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D \rangle, & L_{23} &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D \rangle, \\
L_{24} &= \langle J_{01}, J_{02}, J_{04}, J_{12}, J_{14}, J_{24}, D \rangle, \\
L_{25} &= \langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \\
L_{26} &= \langle J_{04} - 2D, G + 2T, P_1, P_2, J_{12} \rangle, \\
L_{27} &= \langle J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2, J_{12} \rangle.
\end{aligned}$$

С. Підалгебри третього класу:

$$\begin{aligned}
L_{28} &= \langle Z, S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3 \rangle, \\
L_{29} &= \langle Z, S + T \rangle \oplus AO(3).
\end{aligned}$$

Таким чином, нами повністю класифіковані підалгебри рангу n алгебри $AC(1, n)$. Одержана класифікація дозволяє здійснити симетричну редукцію багатомірних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи $C(1, n)$, до звичайних диференціальних рівнянь. Така редукція в багатьох випадках дозволяє знаходити багатопараметричні сімейства точних розв'язків інваріантних рівнянь.

1. Фуцич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Фуцич В. И., Баранник А. Ф. Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 11. – С. 1250–1256.
4. Фуцич В. И., Баранник А. Ф. Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Там же. – 1990. – 42, № 12. – С. 1693–1700.
5. Баранник А. Ф., Марченко В. А., Фуцич В. И. О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // Теорет. и мат. физика. – 1991. – 87, № 2. – С. 220–234.
6. Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фуцич В. И. Редукция общего волнового уравнения к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 10. – С. 1311–1323.
7. Тауфик М. С. О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. – Ярославль: Ярославл. ун-т, 1980. – С. 86–115.
8. Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фуцич В. И. Связные подгруппы конформной группы $C(1, 4)$ // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 7–8. – С. 870–884.
9. Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 356 с.

Одержано 04.03.97