УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ РІДІЮЧИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПЕРЕМІШУВАННЯМ. І

The limit theorem on the approximation of point raring mixing processes by general renewal processes is proved. This theorem contains a weaker condition on mixing coefficient than the known conditions.

Доведено граничну теорему про апроксимацію точкових рідіючих процесів із перемішуванням загальними процесами відновлення. Теорема містить слабкішу умову на коефіцієнт перемішування, ніж уже відомі.

Мета цієї статті — поліпшення результату автора [1] у напрямку ослаблення умов на коефіцієнт перемішування. У згаданій статті коефіцієнт перемішування прямує до нуля зі швидкістю порядку $o(n^{-2})$, $n \to \infty$. В даній роботі, зокрема, доведено, що достатньо мати швидкість порядку $o(n^{-1})$.

Припустимо, що послідовність додатних випадкових величин $\{\tau_i,\ i \geq 0\}$, $\tau_0 = 0$, яка з ймовірністю одиниця є строго монотонно зростаючою: $\tau_{i+1} > \tau_i$, $i \geq 0$. Ця послідовність природно визначає на часовій осі течію точок-подій Λ: момент τ_i вважається моментом появи події під номером i. Наприклад, це може бути момент надходження до системи обслуговування i-ї вимоги. Далі, коли ми маємо деяку процедуру вибору подій з течії Λ, то визначаємо течію $\overline{\Lambda}$ вибраних подій. Течія $\overline{\Lambda}$ є підтечією течії $\Lambda : \overline{\Lambda} \subseteq \Lambda$. Таким чином, i-а подія в течії $\overline{\Lambda}$ має "старий" номер $\beta(i)$ у течії Λ. У термінах τ_i: i-а подія в течії $\overline{\Lambda}$ з'являється у момент $\tau_{\beta(i)}$.

Течія $\overline{\Lambda}$ називається рідіючою відносно Λ. Вона задається рідіючим процесом $\tau_{\beta(i)}$.

У статті доведено граничну теорему для послідовності $\beta(i)$.

1. Гранична теорема. Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$ з дискретним часом та фазовим простіром з натуральних чисел:

$$t,\ \xi(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\beta(m+1) = \beta(m) + \xi(\beta(m)), \quad m \geq 0;$$

$$v(t) = \max\{m \geq 1, \quad \beta(m) \leq t\},$$

$$v(k, t) = \max\{m \geq 1, \quad \beta(m) \leq t, \quad \beta(0) = k\};$$

$$\alpha(k) = \sup_{x \geq 0} \sup_{A \in F_{\leq x},\ B \in F_{\geq x+k}} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

$$F_{\leq x} = \sigma(\xi(s), \quad s \leq x), \quad F_{\geq x} = \sigma(\xi(s), \quad s \geq x).$$

Для деякої характеристики випадкової послідовності $\beta(m)$ наведемо прості твердження для загального процесу $\xi(k)$.

Твердження 1. *Послідовність $\beta(m)$ утворює зростаючу послідовність марковських моментів відносно течії σ-алгебр $F_{\leq x}$.*

Доведення проводиться індукцією по m.

Твердження 2. *Для довільного $x > 0$ виконується нерівність*

$$P(\beta(m) < x) \leq \sup_{t \leq x} P\left(\xi(t) > \frac{x}{n}\right)([x] + 1).$$

Доведення. Із означення $\beta(m)$ одержуємо

$$\{\beta(m) > x\} \in \left\{ \bigcup_{i=1}^{[x]+1} \left\{ \xi(i) > \frac{x}{n} \right\} \right\},$$

звідки випливає доведення.

Для послідовності випадкових величин $\beta(m)$ отримаємо граничну теорему у схемі серій, коли процесс $\xi(t)$ залежить від деякого параметру n. Залежність від n у нашому випадку означає, що процес $\xi_n(t)$ при кожному t має збігатися у деякому розумінні до нескінченності при $n \to \infty$. Така ситуація виникає у багатьох прикладних задачах.

Параметр n у вигляді індекса буде міститися у всіх величинах, визначених за допомогою $\xi_n(t)$. Наприклад, величини $\upsilon(t)$, $\upsilon(k, t)$ замінимо на $\upsilon_n(t)$, $\upsilon_n(k, t)$.

Символом $\Rightarrow_{n\to\infty}$ позначимо слабку збіжність випадкових величин або їх функцій розподілів, а символом $N(t)$ — число відновлень на проміжку $[0, T]$ процссу відновлення $\{\eta_i\}_{i \ge 1}$, причому

$$P(\eta_0 < x) = R_1(x), \quad P(\eta_i < x) = R_2(x), \quad i \ge 1.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови: існує така послідовність чисел* $c_n \to \infty$, *коли* $n \to \infty$, *що*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_n(0)\, c_n^{-1} < x) = R_1(x)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{a \le \delta \le t} \left| P(\xi_n(c_n\delta)\, c_n^{-1} < y) - R_2(y) \right| = 0.$

Тут x *та* y *є точками неперервності для функцій розподілу* $R_i(\cdot)$; a — *довільне додатне число, відокремлене від нуля* $(a > 0)$; *розподіли* $R_i(\cdot)$ *не мають атома у нулі* $(R_i(0) = 0)$, $t < \infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(c_n)c_n = 0$, тоді

$$\upsilon_n(c_n t) \Rightarrow_{n\to\infty} N(t), \quad t \not\subseteq T,$$

де T *не більш ніж зчисленна множина.*

Доведення. З визначення $\upsilon(t)$ випливає стохастичне зображення (права та ліва частини рівності з однаковим розподілом)

$$\upsilon(t) \doteq \sum_{l=0}^{[t]} I(\xi(0) = l)(\upsilon(l, t - l) + 1),$$

де $I(\cdot)$ — індикаторна функція множин.

Використовуючи індикаторну тотожність

$$s^{I(\cdot)x} = 1 + I(\cdot)\left(s^x - 1\right),$$

маємо

$$M s^{\upsilon(t)} = 1 + \sum_{l=0}^{[t]} M\, I(\xi(0) = l)\left(s^{\upsilon(l,\, t - l) + 1} - 1\right),$$

де $s \in (0, 1)$. Покладемо

$$M s^{\upsilon_n(c_n(t))} = g_n(c_n t,\ s), \quad M s^{\upsilon_n(l,\ c_n(t))} = f_{n,l}(c_n t,\ s).$$

З визначення величин $\upsilon_n(t)$, $\upsilon_n(l,t)$ отримаємо

$$g_n(c_n t,\ s) = 1 - P(\xi_n(0) \geq c_n t) + \sum_{l=0}^{[c_n t]} M I_n(\xi_n(0) = l) s^{\upsilon_n(l, c_n t - l)}; \qquad (1)$$

$$f_{n,l}(c_n t,\ s) = 1 - P(\xi_n(l) \leq c_n t) + s \sum_{l=0}^{[c_n t]} M I\Big(\xi_n(l) = k\Big) s^{\upsilon_n(l+k,\ c_n t - k - l)}.$$

Розіб'ємо суми у правих частинах (1) на дві:

$$\sum_{0}^{[c_n \delta]} + \sum_{[c_n \delta]+1}^{[c_n t]}. \qquad (2)$$

Першу з них можно зробити меншу за наперед задане число, використовуючи умови 1, 2 та відсутність атома у нулі для граничних функцій $R_i(\cdot)$. Друга має ту властивість, що складається з математичних сподівань двох випадкових множників за модулем обмежених одиницею та вимірних відносно сигма-алгебр $F_{\leq x}$, $F_{\geq x + c_n\delta}$ відповідно. Останнє дозволяє замінити кожний доданок у другій частині (2) добутком математичних сподівань вказаних випадкових величин з похибкою не більшою ніж $2\alpha_n(c_n\delta)$ (див., наприклад, оцінку (20.29) у [2]):

$$\Big| M I(\xi_n(0) = l) s^{\upsilon_n(l,\ c_n t\ -\ l)} - M I(\xi_n(0) = l) M s^{\upsilon_n(l,\ c_n t\ -\ l)} \Big| \leq$$

$$\leq 2\alpha_n(c_n\delta), \quad l \geq c_n\delta;$$

$$\Big| M I(\xi_n(l) = k) s^{\upsilon_n(l\ +\ k,\ c_n t\ -\ l)} - M I(\xi_n(l) = k) M s^{\upsilon_n(l\ +\ k,\ c_n t\ -\ l\ -\ k)} \Big| \leq$$

$$\leq 2\alpha_n(c_n\delta), \quad k \geq c_n\delta;$$

$$g_n(c_n t, s) = 1 - P(\xi_n(0) \leq c_n t) + a_n(\delta) + s \sum_{l=[c_n t]}^{[c_n t]} P(\xi_n(0) = l) f_{n,l}(c_n t - l),$$

$$f_{n,p}(c_n t - p) = 1 - P(\xi_n(p) \leq c_n t) + a_{n,p}(\delta) + b_n +$$

$$+ s \sum_{k=[c_n\delta]}^{[c_n t]} P(\xi_n(p) = k) f_{n,\ p+k}\big(c_n t - k - p\big), \quad p \geq [c_n\delta]. \qquad (3)$$

Тут

$$|b_n| \leq 2\alpha_n(c_n\delta)[c_n t], \quad |a_n(\delta)| \leq P(\xi_n(0) \leq c_n\delta),$$

$$|a_{n,p}(\delta)| \leq \sup_{q \geq [c_n\delta]} P(\xi_n(q) \leq c_n\delta).$$

Зафіксуємо дві величини $x > 0$, $t > 0$. Функції $g_n(c_n t, s)$ та $f_{n, c_n x}(c_n t, s)$ при кожному фіксованому s визначають міри на числовій осі $\hat{g}_{n,s}$ та $\hat{f}_{n, c_n x, s}$ відповідно:

$$\hat{g}_{n,s}((\alpha,\ \beta]) = g_n(c_n\alpha,\ s) - g_n(c_n\beta,\ s),$$

$$\hat{f}_{n, c_n x, s}((\alpha,\ \beta]) = f_{n, c_n x}(c_n\alpha,\ s) - f_{n, c_n x}(c_n\beta,\ s),$$

коли $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Розглянемо послідовність мір $\Gamma = \{\, \hat{g}_{n,s},\ n \ge 1 \,\}$. У сукупності всіх обмежених мір на R^+ визначимо, як і звичайно, топологію слабкої збіжності та відповідно поняття граничної точки. Варіацією міри μ на вимірній множині B з борелівської σ-алгебри $\mathfrak{J}$ назвемо число

$$\operatorname{Var}\mu(B) = \sup_{A\in\mathfrak{J},\, A\subset B} \mu(A) - \inf_{A\in\mathfrak{J},\, A\subset B} \mu(A).$$

Далі, коли послідовність мір μ_n, $n \ge 1$ така, що

$$\sup_n \operatorname{Var}\mu_n\left(R^+\right) < \infty, \tag{4}$$

має єдину граничну точку μ, то, за лемою 5.1 з [3], має місце слабка збіжність мір $\mu_n \Rightarrow_{n\to\infty} \mu$. У нашому випадку Γ, очевидно, задовольняє умову (4). Далі, нехай g_s є граничною точкою для Γ. Тоді з (3) випливає, що g_s є розв'язком системи

$$\begin{gathered}\hat{g}_{s,\delta} = 1 + \varepsilon_1(\delta) + \left(s\hat{f}_{s,\delta} - 1\right) * \hat{R}_1,\\ \hat{f}_{s,\delta} = 1 + \varepsilon_2(\delta) + \left(s\hat{f}_{s,\delta} - 1\right) * \hat{R}_2,\end{gathered} \tag{5}$$

де

$$\varepsilon_i(\delta) \le 2G_i(\delta), \qquad \hat{R}_i((\alpha,\beta]) = R_i(\beta) - R_i(\alpha), \quad \alpha < \beta,$$

а $*$ є символом згортки.

Як і звичайно, використовуючи зображення для $\hat{f}_s$ у вигляді суми послідовних згорток, переконуємось, що система (5) має єдиний розв'язок у множині обмежених мір.

Таким чином, у топології слабкої збіжності маємо

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \hat{g}_{n,s} = \hat{g}_s,$$

де $\hat{g}_s$ — розв'язок (5) при $\varepsilon_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.

Мірами $\hat{g}_s$, $\hat{f}_s$ визначаються твірні функції $g(t,s)$, $f(t,s)$ відповідно

$$g(t,s) = 1 - \hat{g}_s((0,t]), \qquad f(t,s) = 1 - \hat{f}_s((0,t]).$$

Має місце збіжність

$$g_n(c_n t, s) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(t,s), \quad f_n(c_n t, s) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t,s),$$

$t > 0$, $t \,\overline{\in}\, T$, де T — множина не більш ніж зліченна. Вона визначається інтервалами неперервності для R_1, R_2.

Таким чином, функції $g(t,s)$ та $f(t,s)$ пов'язані співвідношенням

$$\begin{gathered}g(t,s) = 1 - R_1(t) + s\int_0^t R_1(dx) f(t-x,s),\\ f(t,s) = 1 - R_2(t) + s\int_0^t R_2(dx) f(t-x,s),\end{gathered}$$

що й завершує доведення теореми.

Зауваження 1. Розглянемо деяке узагальнення теореми 1. Воно грунтується на визначенні більш слабкого коефіцієнта перемішування, ніж $\alpha(c_n)$.

Нехай послідовність c_n, $n \ge 1$, яка фігурує у теоремі 1, визначена. Тоді візьмемо будь-яку послідовність r_n, $n \ge 1$, що задовольняє умову $r_n \to \infty$, $r_n = o(c_n)$ при $n \to \infty$. Далі будуємо зрізаний процес:

$$\bar{\xi}_n(t) = \begin{cases} \xi_n(t), & \xi_n(t) \le c_n - r_n, \\ c_n - r_n, & \xi_n(t) > c_n - r_n; \end{cases}$$

а також сигма-алгебру $F_{\le x}^{r_n} = \sigma\left(\bar{\xi}_n(t),\ t \le x\right)$.

Визначимо коефіцієнт перемішування

$$\alpha_{\xi_n, r_n} = \sup_{x \ge 0} \sup_{A \in F_{\le x}^{r_n},\, B \in F_{\ge x + c_n}} |P(AB) - P(A)P(B)|.$$

Таким чином, цей коефіцієнт побудований лише на тих подіях з $F_{\le x}$, на яких процес $\xi_n(t)$ при $t \le x$ не обмежений значенням $c_n - r_n$. Такий коефіцієнт корисний у випадках, коли процес $\xi_n(t)$ за часом залежить від його значень до моменту t. Наприклад, подія $\{\xi_n(x) = k\}$ визначає поведінку процесу лише на проміжку $[0,\ x + k]$.

Розіб'ємо другу суму з (2) наступним чином:

$$\sum_{[c_n \delta]+1}^{[c_n t]} = \sum_{[c_n \delta]+1}^{[(c_n - r_n)t]} + \sum_{[(c_n - r_n)t]+1}^{[c_n t]}. \tag{6}$$

Другу суму з (6) при умові, що t є точкою неперервності для граничних розподілів $R_i(\cdot)$, можна зробити меншою за будь-яку наперед задану величину. А з першою сумою робимо ті ж самі перетворення, що і у теоремі 1, але із застосуванням коефіцієнту $\alpha_{\xi_n, r_n}(c_n)$.

Таким чином, у теоремі 1 умову 3 можна замінити наступною:

3′) існує така послідовність $r_n : r_n \to \infty,\ r_n = o(c_n)$, що

$$c_n \alpha_{\xi_n, r_n}(c_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Зауваження 2. Коли процес $\{\tau_i,\ i \ge 0\}$такий, що $\tau_i\, i^{-1} \xrightarrow[i \to \infty]{P} \mu^{-1} < \infty$, то в умовах теореми 1, з огляду на теорему переносу [4], випливає збіжність

$$P\left(\tau_{\beta_n(i)} < x c_n\right) \underset{n \to \infty}{\Rightarrow} R_1 * R_2^{*(i-1)}(x\mu).$$

1. *Гасаненко В. А.* Редеющие процессы // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, №1. – С.27 – 30.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 428 с.
3. *Боровков А.А.* Сходимость мер и случайных процессов // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, №2. – С. 3 – 68.
4. *Анисимов В.В.* Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы. – Киев: Вища шк., 1988. – 184 с.

Одержано 13.12.96