УДК 517.5

О. Ф. Герус (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ТЕЛЕСНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ *

We establish sufficient conditions for the existence of solid derivatives of continuous extension of a Cauchy-type integral onto closure of a domain and obtain an estimate for modules of continuity of these derivatives. We prove that the Newton–Leibniz formula is true for certain classes of Jordan rectifiable curves.

Встановлено достатні умови існування тілесних похідних неперервного продовження інтеграла типу Коші на замикання області та отримано оцінку їх модулів неперервності. Доведено справедливість формули Ньютона–Лейбніца на деяких класах жорданових спрямлюваних кривих.

Введем следующие обозначения: Γ — жорданова спрямляемая кривая диаметра $d = d(\Gamma)$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta \in \Gamma\colon |\zeta - z| \le \delta\}$, $\delta > 0$; $\theta_\Gamma(z, \delta) := \operatorname{mes} \Gamma_{z,\delta}$;

$$\Theta_\Gamma(z, \delta) := \frac{\delta^2}{\theta_\Gamma(z, 4\delta) - \theta_\Gamma(z, \delta)}.$$

Пусть Γ замкнута, D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области с границей Γ, $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — интегрируемая функция, Φ^+ и Φ^- — непрерывные продолжения соответственно на замыкания $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ интеграла типа Коши

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Пусть

$$\omega_{E,f}(\delta) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \le \delta, \\ z_1, z_2 \in E}} |f(z_1) - f(z_2)|, \qquad \delta > 0,$$

— модуль непрерывности функции $f\colon E \to \mathbb{C}$,

$$\Omega_{E,f}(\alpha, \beta) := \begin{cases} \sup\limits_{\alpha \le t \le \beta} \dfrac{\omega_{E,f}(t)}{t} & \text{при } 0 < \alpha \le \beta, \\[2ex] \Omega_{E,f}(\beta, \beta) & \text{при } 0 < \beta < \alpha. \end{cases}$$

В работе [1] (см. также [2]) нами получена оценка модулей непрерывности продолжений Φ^+, Φ^- с мажорантой, зависящей от функций Θ_Γ, $\Omega_{\Gamma,f}$. В данной работе для произвольного натурального k решается задача о существовании телесных производных $(\Phi^+)^{(k)}(z) := (\Phi^+)^{(k)}_{D^+}(z)$, $z \in \overline{D^+}$, и $(\Phi^-)^{(k)}(z) := (\Phi^-)^{(k)}_{D^-}(z)$, $z \in \overline{D^-}$, и оценке их модулей непрерывности в терминах функций Θ_Γ, $\Omega_{\Gamma, f^{(k)}}$.

Пусть $\Gamma(z_1, z_2)$ — не бóльшая из дуг кривой Γ, соединяющих точки $z_1, z_2 \in \Gamma$, ориентированная в направлении от z_1 к z_2, $d(z_1, z_2)$ — не больший из диаметров указанных дуг. Обозначим через $\mathfrak{Q}$ класс всех кривых Γ, удовлетворяющих следующему условию: для произвольной точки z_1 кривой Γ существует зависящее от z_1 положительное число $q = q(z_1)$, такое, что для всех достаточно близких к z_1 точек $z_2 \in \Gamma$ справедливо неравенство

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке гранта 94-1474 INTAS.

$$d(z_1, z_2) \le q\,|z_1 - z_2|. \tag{1}$$

Класс $\mathfrak{Q}$ содержит все квазиконформные спрямляемые кривые, так как они (см., например, [3]) удовлетворяют неравенству (1) с не зависящей от точек z_1 и z_2 постоянной q. Обратное включение не имеет места хотя бы потому, что в классе $\mathfrak{Q}$ имеются кривые с нулевыми углами.

Пусть $J_0(\Gamma)$ — класс непрерывных функций $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in \Gamma} \int_0^{\delta} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta_\Gamma(z, x), x)\, dx = o(1), \qquad \delta \to 0.$$

Главной целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть Γ замкнута, квазиконформна, k — натуральное, функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет производную $f^{(k)}$, принадлежащую классу $J_0(\Gamma)$. Тогда существуют непрерывные продолжения $\Phi^{\pm}$ и их телесные производные $(\Phi^{\pm})^{(m)}$ порядка $m = 1, 2, \ldots, k$ и справедлива оценка*

$$\omega_{\overline{D^{\pm}}, (\Phi^{\pm})^{(k)}}(\delta) = c \sup_{z \in \Gamma} \int_0^{2d} \Omega_{\Gamma, f^{(k)}}(\Theta_\Gamma(z, x), x)\, \frac{dx}{1 + x/\delta} \qquad \forall\, \delta > 0,$$

где c — абсолютная постоянная.

Замечание. Для гладкой кривой Γ и гельдеровой производной $f^{(k)}$ в [4] установлено существование продолжений $\Phi^{\pm}$ и их контурных производных $(\Phi^{\pm})^{(k)}_{\Gamma}(z) := (\Phi^{(k)})^{\pm}(z)$, $z \in \Gamma$. Для кривых Γ, у которых отношение $\Gamma(z_1, z_2)/|z_1 - z_2|$ ограничено, утверждение теоремы 1 доказано П. М. Тамразовым [5].

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится формула Ньютона – Лейбница. Исследуем вопрос о ее справедливости на жордановых спрямляемых кривых.

Лемма 1. *Если функция $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет производную, тождественно равную нулю, то φ — постоянная.*

Доказательство. Пусть $z = z(s)$ — уравнение кривой Γ с натуральным параметром s, $\psi(s) := \varphi(z(s)) = U(s) + i\,V(s)$, где функции U, V — действительные, $\Delta z := z(s + \Delta s) - z(s)$. Ввиду того, что $|\Delta z| \le |\Delta s|$, из условия $\varphi'(z) = 0$ следует

$$\frac{\psi(s + \Delta s) - \psi(s)}{\Delta s} = \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta s} = o(1), \qquad \Delta s \to 0.$$

Поэтому $\psi'(s) = 0$. Следовательно, $U'(s) = V'(s) = 0$ и функции U, V — постоянные. Лемма доказана.

Напомним известное определение первообразной.

Определение. *Функция $F\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ называется первообразной функции $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, если она имеет на Γ производную, совпадающую с f.*

Лемма 2. *Пусть Γ разомкнута. Для того чтобы интегрируемая функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ имела первообразную и была справедлива формула Ньютона – Лейбница*

$$\int_{\Gamma(z_1, z_2)} f(t)\, dt = F(z_2) - F(z_1) \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \Gamma, \tag{2}$$

где F — произвольная первообразная функции f, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{\substack{\zeta \to z,\\ \zeta \in \Gamma}} \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{\Gamma(z,\zeta)} (f(t) - f(z))dt = 0 \qquad \forall\, z \in \Gamma. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z) := \int_{\Gamma(z_0,z)} f(t)dt$, где z_0 — фиксированная точка кривой Γ. Из формулы

$$\frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{\Gamma(z,\zeta)} (f(t) - f(z))dt$$

следует, что F является первообразной функции f тогда и только тогда, когда выполняется условие (3). Доказательство завершается стандартными рассуждениями (см., например, [6, с. 350]) с использованием леммы 1.

Следствие 1. *Пусть Γ замкнута, функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет первообразную и удовлетворяет условию* (3). *Тогда* $\int_\Gamma f(t)dt = 0$.

Для доказательства достаточно разбить Γ на две разомкнутые кривые и к каждой из них применить формулу (2).

Пусть $\xi \in \Gamma$; $\breve{\Gamma}$ — разомкнутая дуга кривой Γ, на которой точка ξ — один из ее концов; $z, \zeta \in \breve{\Gamma}_{\xi,2\delta} \setminus \breve{\Gamma}_{\xi,\delta}$, $\delta > 0$. Обозначим $\nu(\Gamma) := := \sup |\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z, \zeta)|$, где

$$\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z, \zeta) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\breve{\Gamma}(z,\zeta)} d\,\mathrm{Arg}(t - \xi),$$

точная верхняя грань берется по всем указанным выше ξ, $\breve{\Gamma}$, δ, z, ζ.

Следующее утверждение показывает, что на кривых с бесконечным $\nu(\Gamma)$ формула Ньютона – Лейбница может быть не верна.

Теорема 2. *Существуют кривая Γ и непрерывная функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ такие, что $\nu(\Gamma) = \infty$ и условие* (3) *не выполняется.*

Доказательство. Для произвольных z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ пусть $[z_1; z_2]$ обозначает прямолинейный отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2.

Кривую Γ определим следующим образом: $\Gamma := \{0\} \bigcup \bigcup_{k=1}^\infty \Gamma_k$, где

$$\Gamma_k := [z_{k,k^2+2,1}; z_{k+1,1,1}] \bigcup \bigcup_{j=1}^{k^2+1} \left([z_{k,j,4}; z_{k,j+1,1}] \bigcup \bigcup_{l=1}^{3} [z_{k,j,l}; z_{k,j,l+1}] \right),$$

$$z_{k,j,4} := \left(\sqrt{2}\,2^{-k} - (j-1)r_k\right)(1+i), \qquad z_{k,j,3} := \overline{z_{k,j,4}}, \qquad z_{k,j,2} := -z_{k,j,4},$$

$$z_{k,j+1,1} := -z_{k,j,3} + r_k, \qquad z_{k,1,1} := -z_{k,1,3}, \qquad r_k := \left(\sqrt{2}-1\right)2^{-k}k^{-2}.$$

Длина Γ_k меньше $\sqrt{2}\,2^{3-k}(k^2+1)$, поэтому Γ — спрямляемая. Из очевидной оценки

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} d\,\mathrm{Arg}\,t \right| > k^2$$

следует, что $\nu(\Gamma) = \infty$.

Покажем, что непрерывная функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$f(t) := \begin{cases} 0, & t \in \{0\} \bigcup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left([z_{k,k^2+2,1}; z_{k+1,1,1}] \bigcup \right. \\ & \left. \bigcup \bigcup\limits_{j=1}^{k^2+1} [z_{k,j,4}; z_{k,j+1,1}] \right), \\ \dfrac{1}{k}, & t \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{k^2+1} [z_{k,j,2}; z_{k,j,3}], \\ \dfrac{\operatorname{Im}(z_{k,j,1} - t)}{k \operatorname{Im}(z_{k,j,1} - z_{k,j,2})}, & t \in [z_{k,j,1}; z_{k,j,2}], \\ \dfrac{\operatorname{Im}(z_{k,j,4} - t)}{k \operatorname{Im}(z_{k,j,4} - z_{k,j,3})}, & t \in [z_{k,j,3}; z_{k,j,4}], \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (3). Положим $z = 0$ и рассмотрим последовательность $\zeta_n := z_{n,1,2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $n \to \infty$, тогда $\zeta_n \to z$. Обозначая $\gamma_{j,k} := [z_{k,j,2}; z_{k,j,3}]$, имеем

$$\left| \frac{1}{\zeta_n - z} \int\limits_{\Gamma(z,\zeta_n)} (f(t) - f(z))\,dt \right| \geq 2^{n-3/2} \left| \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma(z,\zeta_n)} f(t)\,dt \right| =$$

$$= 2^{n-3/2} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{k^2} \int\limits_{\gamma_{j,k}} \frac{1}{k}\,dx > 2^{n-3/2} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{k^2} \frac{1}{k\,2^{k-1}} > \sqrt{2}(n+1) \not\to 0.$$

Теорема доказана.

Лемма 3. *Если* Γ *квазиконформна, то* $\nu(\Gamma)$ *конечно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные точку $\xi \in \Gamma$, дугу $\breve{\Gamma} \subset \Gamma$, на которой ξ — один из ее концов, $\delta > 0$, $z, \zeta \in \breve{\Gamma}_{\xi,2\delta} \setminus \breve{\Gamma}_{\xi,\delta}$. Пусть $[|\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z, \zeta)|] \geq 1$*. Тогда на одном из отрезков $[\xi; z]$ или $[\xi; \zeta]$ существует $l := [|\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z, \zeta)|] + 1$ последовательно расположенных точек $z_1, z_2, \ldots, z_l$, принадлежащих дуге $\breve{\Gamma}(z,\zeta)$ и таких, что $|\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z_j, z_{j+1})| = 1$, $j = 1, 2, \ldots, l-1$. Следовательно, существует j, для которого $|z_j - z_{j+1}| \leq 2\delta/(l-1)$. Но $d(z_j, z_{j+1}) > \delta$. Отсюда и из условия (1) вытекает неравенство $[|\nu(\xi, \breve{\Gamma}, \delta, z, \zeta)|] < 2q$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* Γ *разомкнута и имеет конечное* $\nu(\Gamma)$, z_1 *и* z_2 *— ее концы,* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ *— непрерывная функция. Тогда справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{\Gamma} (f(t) - f(z_1))\,dt \right| = c \sup_{l=1,2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\, \Omega_{\Gamma,f} \left(\frac{b_n^2}{\theta_\Gamma(z_l, b_n) - \theta_\Gamma(z_l, b_{n+1})}, b_n \right), \quad (4)$$

где $b_n := 2^{-n} \max\limits_{t \in \Gamma} |z_1 - t|$, *а постоянная* c *зависит от* $\nu(\Gamma)$.

Доказательство. Следуя [7], предположим вначале, что f вещественна. Обозначим

$$I(\gamma) := \int\limits_{\gamma} (f(t) - f(z_1))\,dt,$$

---

* Скобками [ ] обозначается целая часть заключенного в них выражения.

где γ — любое подмножество кривой Γ, измеримое по длине кривой; $\tilde{\Gamma} := := \Gamma_{z_2, b_g}$, где натуральное число g определяется из условия $b_{g-1} < |z_1 - - z_2| \le b_{g-2}$; $\hat{\Gamma} := \Gamma \setminus \tilde{\Gamma}$; $\hat{\Gamma}_n := \hat{\Gamma}_{z_1, b_n} \setminus \hat{\Gamma}_{z_1, b_{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$; $\tilde{\Gamma}_n := := \Gamma_{z_2, b_n} \setminus \Gamma_{z_2, b_{n+1}}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$. Нетрудно показать, что при каждом n существует не более четырех непустых множеств вида $\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i$, $i = g-1, g-2, \ldots$.

Имеем

$$|I(\Gamma)| \le |I(\hat{\Gamma})| + |I(\tilde{\Gamma})|, \tag{5}$$

$$|I(\hat{\Gamma})| \le \sum_{n=0}^{\infty} |I(\hat{\Gamma}_n)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i} \left(|\operatorname{Re} I(\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i)| + |\operatorname{Im} I(\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i)|\right), \tag{6}$$

где суммирование ведется по тем i, для которых $\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i$ не пусто.

Чтобы оценить $|\operatorname{Re} I(\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i)|$, обозначим $\gamma := \{\zeta \in \hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i \colon \operatorname{Im}(\zeta - z_1) \ge 0\}$ и оценим сначала $|\operatorname{Re} I(\gamma)|$.

Множество γ представимо в виде объединения не более чем счетной совокупности открытых (т. е. не содержащих своих концов) дуг, являющихся его связными компонентами, и замкнутого множества, расположенного на ограничивающих γ окружностях и отрезках. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует зависящее от ε объединение $\tilde{\gamma}$ такой конечной совокупности указанных дуг, что $\operatorname{mes}(\gamma \setminus \tilde{\gamma}) \le (2\pi + 1 + \varepsilon) b_n$. Следовательно,

$$|\operatorname{Re} I(\gamma \setminus \tilde{\gamma})| \le \int\limits_{\gamma \setminus \tilde{\gamma}} |f(t) - f(z_1)||dt| \le (2\pi + 1 + \varepsilon) b_n \omega_{\Gamma, f}(b_n). \tag{7}$$

Чтобы оценить $|\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma})|$, разобьем множество $\tilde{\gamma}$ прямыми $\{\zeta \colon \operatorname{Re}\zeta = = x_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, k$; $\operatorname{Re} z_1 - b_n = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = \operatorname{Re} z_1 + b_n$, так, чтобы концы всех образовавшихся при этом дуг принадлежали этим прямым и выполнялось условие $\max\limits_{1 \le m \le k} \Delta x_m \le 2 \min\limits_{1 \le m \le k} \Delta x_m$, где $\Delta x_m := x_m - x_{m-1}$. Очевидно, $\tilde{\gamma} = \bigcup_{m=1}^{k} \tilde{\gamma}_m$, где $\tilde{\gamma}_m := \{\zeta \in \tilde{\gamma} \colon x_{m-1} < \operatorname{Re}\zeta \le x_m\}$.

Множество $\tilde{\gamma}_m$, в свою очередь, представимо в виде $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_{m,1} \cup \tilde{\gamma}_{m,2} \cup \cup \tilde{\gamma}_{m,3}$, где $\tilde{\gamma}_{m,1} = \bigcup_j \tilde{\gamma}_{m,1,j}$ — объединение не более чем счетной совокупности попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на одной и той же прямой разбиения, $\tilde{\gamma}_{m,2} = \bigcup_j \tilde{\gamma}_{m,2,j}$ — объединение конечной совокупности попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на разных прямых, $\tilde{\gamma}_{m,3}$ — пересечение $\tilde{\gamma}_m$ с m-й прямой. Очевидно, $\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma}_{m,3}) = 0$.

Пусть τ_j — один из концов дуги $\tilde{\gamma}_{m,1,j}$, $\lambda := \max\limits_{l=1,2} \max\limits_{m,j} \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,l,j}$. Учитывая равенство $\operatorname{Re}\int_{\tilde{\gamma}_{m,l,j}} dt = 0$, имеем

$$|\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma}_{m,1})| = \left|\sum_j \operatorname{Re} I(\tilde{\gamma}_{m,1,j})\right| = \left|\sum_j \operatorname{Re} \int\limits_{\tilde{\gamma}_{m,1,j}} (f(t) - f(\tau_j))dt\right| \le$$

$$\le \sum_j \int\limits_{\tilde{\gamma}_{m,1,j}} |(f(t) - f(\tau_j))||dt| \le \sum_j \omega_{\gamma, f}(\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,1,j}) \operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,1,j} \le$$

$$\le \omega_{\gamma, f}(\lambda) \operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,1}. \tag{8}$$

Пусть τ_j — конец дуги $\tilde{\gamma}_{m,2,j}$, принадлежащий $(m-1)$-й прямой разбиения. Рассмотрим $\tilde{\gamma}^{(0)}_{m,2} = \bigcup_j \tilde{\gamma}^{(0)}_{m,2,j}$ — подмножество множества $\tilde{\gamma}_{m,2}$, состоящее из максимально возможного четного числа $2r_0$ дуг, занумерованных в порядке убывания $\operatorname{Im}\tau_{0,j}$, где $\tau_{0,j}$ и $\eta_{0,j}$ — концы дуги $\tilde{\gamma}^{(0)}_{m,2,j}$, принадлежащие соответственно $(m-1)$-й и m-й прямым разбиения, и таких, что если j-я дуга ориентирована от $\tau_{0,j}$ к $\eta_{0,j}$, то $(j+1)$-я — от $\eta_{0,j+1}$ к $\tau_{0,j+1}$.

Можно показать, что ввиду конечности $\nu(\Gamma)$ множество $\tilde{\gamma}_{m,2} \setminus \tilde{\gamma}^{(0)}_{m,2}$ представимо в виде

$$\bigcup_{i=1}^{l+1} \tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2}, \quad l \le 2\nu(\Gamma)+3,$$

где $\tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2} = \bigcup_{j=1}^{2r_i} \tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2,j}$, $i \le l$, — объединение четной совокупности дуг, занумерованных в порядке убывания $\operatorname{Im}\tau_{i,j}$, с последовательно чередующейся ориентацией, а $\tilde{\gamma}^{(l+1)}_{m,2}$ — объединение не более чем $2\nu(\Gamma)+3$ дуг. Поэтому, проводя преобразования, аналогичные (8), получаем

$$|\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma}_{m,2})| \le \left| \sum_j \operatorname{Re} \int\limits_{\tilde{\gamma}_{m,2,j}} (f(t) - f(\tau_j))\,dt \right| +$$

$$+ \left| \sum_j (f(\tau_{l+1,j}) - f(z_1)) \int\limits_{\tilde{\gamma}^{(l+1)}_{m,2,j}} \operatorname{Re} dt \right| + \sum_{i=0}^{l} \left| \sum_{j=1}^{2r_i} (f(\tau_{i,j}) - f(z_1)) \int\limits_{\tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2,j}} \operatorname{Re} dt \right| \le$$

$$\le \omega_{\gamma,f}(\lambda) \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,2} + (2\nu(\Gamma)+3)\,\omega_{\Gamma,f}(b_n)\,\Delta x_m +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l} \sum_{p=1}^{r_i} |f(\tau_{i,2p-1}) - f(\tau_{i,2p})|\,\Delta x_m. \tag{9}$$

Учитывая неравенства

$$\sum_{p=1}^{r_i} |\tau_{i,2p-1} - \tau_{i,2p}| \le b_n, \qquad \operatorname{mes} \tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2} \ge 2 r_i \Delta x_m,$$

а затем применяя лемму 1 [1] и свойство 1 [1] функции $\Omega_{\gamma,f}$, имеем

$$\sum_{p=1}^{r_i} |f(\tau_{i,2p-1}) - f(\tau_{i,2p})|\,\Delta x_m \le \sum_{p=1}^{r_i} \omega_{\gamma,f}(|\tau_{i,2p-1} - \tau_{i,2p}|)\,\Delta x_m \le$$

$$\le 2b_n\,\Delta x_m\,\Omega_{\gamma,f}\left(\frac{2b_n\,\Delta x_m}{\operatorname{mes}\tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2}}, b_n\right). \tag{10}$$

Просуммируем по m неравенства (8)–(10) и устремим λ к нулю. Тогда $\omega_{\gamma,f}(\lambda) \to 0$ и, следовательно,

$$|\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma})| \le 2(2\nu(\Gamma)+3)\,b_n\,\omega_{\Gamma,f}(b_n) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l} \sum_{m \in E_i} 2b_n\,\Delta x_m\,\Omega_{\gamma,f}\left(\frac{2b_n\,\Delta x_m}{\operatorname{mes}\tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2}}, b_n\right),$$

где E_i — множество тех m, для которых $\tilde{\gamma}^{(i)}_{m,2}$ содержит более одной дуги.

Осуществив преобразования, аналогичные [1, с. 1325], а затем учтя соотношение (7) и устремив ε к нулю, получим

$$|\operatorname{Re} I(\gamma)| \le (36\nu(\Gamma) + 2\pi + 71) b_n^2\, \Omega_{\Gamma,f}\left(\frac{b_n^2}{\theta_\Gamma(z_1, b_n) - \theta_\Gamma(z_1, b_{n+1})}, b_n\right). \quad (11)$$

Оценивая тем же способом $|\operatorname{Re}((\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i) \setminus \gamma)|$, убеждаемся в справедливости для $|\operatorname{Re}(\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i)|$ оценки вида (11) с постоянной $c_1 = 72\nu(\Gamma) + 4\pi + 141$. Аналогично оценивается $|\operatorname{Im}(\hat{\Gamma}_n \cap \tilde{\Gamma}_i)|$. Поэтому согласно (6) $|I(\hat{\Gamma}_n)|$ оценивается мажорантой вида (11) с постоянной $8c_1$.

Оценим второе слагаемое правой части неравенства (5):

$$|I(\tilde{\Gamma})| \le \left|\int_{\tilde{\Gamma}} (f(t) - f(z_2))\, dt\right| + \left|\int_{\tilde{\Gamma}} (f(z_2) - f(z_1))\, dt\right| \le$$

$$\le b_{g-1}\, \omega_{\Gamma,f}(b_{g-2}) + \sum_{n=g}^{\infty} \left|\int_{\tilde{\Gamma}_n} (f(t) - f(z_2))\, dt\right|. \quad (12)$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\left|\int_{\tilde{\Gamma}_n} (f(t) - f(z_2))\, dt\right| \le 4c_1 b_n^2\, \Omega_{\Gamma,f}\left(\frac{b_n^2}{\theta_\Gamma(z_2, b_n) - \theta_\Gamma(z_2, b_{n+1})}, b_n\right). \quad (13)$$

Таким образом, из соотношений (5), (6), (12), (13) следует неравенство (4) с постоянной $12c_1 + 1$.

В общем случае комплексной функции f, повторяя изложенные выше рассуждения для ее вещественной и мнимой частей (см. [7]), получаем оценку (4) с постоянной $c = 24c_1 + 2$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{Q} \ni \Gamma$ *разомкнута и имеет конечное* $\nu(\Gamma)$, *функция* f *принадлежит классу* $J_0(\Gamma)$. *Тогда* f *имеет первообразную и справедлива формула* (2).

Доказательство. Для произвольных точек z_1 и z_2 кривой Γ, применяя теорему 3 к кривой $\Gamma(z_1, z_2)$ и сужению на нее функции f, а затем используя свойства функций θ_Γ, $\Omega_{\Gamma,f}$ и неравенство (1), имеем

$$\left|\int_{\Gamma(z_1,z_2)} (f(t) - f(z_1))\, dt\right| \le$$

$$\le c_2 \sup_{z\in\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n/4}^{b_n/2} b_n\, \Omega_{\Gamma,f}\left(\frac{b_n^2}{\theta_\Gamma(z, b_n) - \theta_\Gamma(z, b_{n+1})}, b_n\right) dx \le$$

$$\le c_3 \sup_{z\in\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n/4}^{b_n/2} x\, \Omega_{\Gamma,f}\left(\frac{x^2}{\theta_\Gamma(z, 4x) - \theta_\Gamma(z, x)}, 4x\right) dx =$$

$$= c_4 \sup_{z\in\Gamma} \int_0^{b_0/2} x\, \Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(z, x), 4x)\, dx \le$$

$$\le c_5\, q(z_1)\, |z_1 - z_2| \left(\sup_{z\in\Gamma} \int_0^{b_0/2} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(z, x), x)\, dx + \omega_{\Gamma,f}(2b_0)\right), \quad (14)$$

откуда следует выполнение условия (3). Доказательство завершается применением леммы 2.

Аналогичными рассуждениями, с применением следствия 1, доказывается такое утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{D} \ni \Gamma$ *замкнута и имеет конечное* $\nu(\Gamma)$, *функция* f *принадлежит классу* $J_0(\Gamma)$ *и имеет первообразную. Тогда* $\int_\Gamma f(t)dt = 0$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция* f *и все ее производные до* $(k-1)$*-го порядка включительно являются липшицевыми функциями.*

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 — произвольные точки кривой Γ. Применяя на основании леммы 3 и следствия 2 лемму 2 и теорему 3 к сужению функции $f^{(k)}$ на дугу $\Gamma(z_1, z_2)$, а затем по аналогии с (14) учитывая неравенство (1), получаем

$$|f^{(k-1)}(z_2) - f^{(k-1)}(z_1)| = \left|\int\limits_{\Gamma(z_1,z_2)} f^{(k)}(t)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{\Gamma(z_1,z_2)} (f^{(k)}(t) - f^{(k)}(z_1))\,dt\right| + |f^{(k)}(z_1)(z_2 - z_1)| \le$$

$$\le \left(c_6\, q \sup_{z\in\Gamma} \int\limits_0^{b_0/2} \Omega_{\Gamma, f^{(k)}}(\Theta_\Gamma(z,x), 4x)\,dx + \max_{z\in\Gamma}|f^{(k)}(z)|\right)|z_2 - z_1|.$$

Легко видеть, что выражение в скобках ограничено сверху постоянной L, зависящей лишь от кривой Γ. Поэтому функция $f^{(k-1)}$ удовлетворяет условию Липшица $\omega_{\Gamma, f^{(k-1)}}(\delta) \le L\delta$, $\delta > 0$.

Так как липшицевы функции принадлежат классу $J_0(\Gamma)$, то приведенные рассуждения можно последовательно повторить для $f^{(k-2)}, \ldots, f', f$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Докажем для произвольного $m = 1, 2, \ldots, k$ применимость формулы интегрирования по частям к интегралу

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\,d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

Для этого при фиксированном z рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) := \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^m}$. Ее производная $\varphi'(\zeta) = \dfrac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^m} - \dfrac{m f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}$ принадлежит классу $J_0(\Gamma)$ благодаря тому, что согласно лемме 4 указанному классу принадлежат функции f и f'. Поэтому в силу леммы 3 и следствия 3 $\int_\Gamma \varphi'(\zeta)d\zeta = 0$, откуда

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^m}\,d\zeta.$$

Повторив эти рассуждения m раз, получим

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f^{(m)}(\zeta)}{(\zeta - z)}\,d\zeta.$$

Согласно теореме 2 [1] существуют непрерывные продолжения $(\Phi^{(m)})^\pm$ на $\overline{D^\pm}$ производных $\Phi^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, k$, а также справедлива оценка

$$\omega_{\overline{D^{\pm}},(\Phi^{(m)})^{\pm}}(\delta) \le c \sup_{z\in\Gamma} \int_0^{2d} \Omega_{\Gamma,f^{(m)}}(\Theta_\Gamma(z,x),x)\frac{dx}{1+x/\delta} \qquad \forall\,\delta>0$$

и формула

$$(\Phi^{(m)})^{+}(t)-(\Phi^{(m)})^{-}(t)=f^{(m)}(t) \qquad \forall\, t\in\Gamma. \tag{15}$$

Докажем существование телесных производных $(\Phi^{\pm})^{(m)}(z)$, равных $(\Phi^{(m)})^{\pm}(z)$ для произвольных $z\in\Gamma$, $m=1,2,\ldots,k$ (для $z\in D^{\pm}$ их существование общеизвестно). В силу контурно-телесного результата [8, с. 690] (см. также [9, с. 132, 139]) достаточно это сделать для контурных производных $(\Phi^{\pm})^{(m)}_{\Gamma}(z)$.

Зафиксируем произвольную точку $z\in\Gamma$. Для произвольной отличной от z точки $\zeta\in\Gamma$ согласно лемме 8 [10] существует спрямляемая кривая $\gamma\subset\overline{D^{+}}$, соединяющая точки ζ и z, длины $l\le K|\zeta-z|$ с постоянной K, зависящей только от области D^{+}. Пусть γ ориентирована от z к ζ. Имеем

$$\Delta := \left|\frac{(\Phi^{(m-1)})^{+}(\zeta)-(\Phi^{(m-1)})^{+}(z)}{\zeta-z}-(\Phi^{(m)})^{+}(z)\right| =$$

$$= \frac{1}{|\zeta-z|}\left|\int_\gamma \left((\Phi^{(m)})^{+}(t)-(\Phi^{(m)})^{+}(z)\right)dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\zeta-z|}\,\omega_{\overline{D^{+}},(\Phi^{(m)})^{+}}(l)\,K|\zeta-z| \le$$

$$\le K\omega_{\overline{D^{+}},(\Phi^{(m)})^{+}}(K|\zeta-z|) = o(1), \qquad |\zeta-z|\to 0.$$

Применяя формулу (15) и используя существование производной $f^{(m)}(z)$, получаем

$$\left|\frac{(\Phi^{(m-1)})^{-}(\zeta)-(\Phi^{(m-1)})^{-}(z)}{\zeta-z}-(\Phi^{(m)})^{-}(z)\right| \le$$

$$\le \Delta + \left|\frac{f^{(m-1)}(\zeta)-f^{(m-1)}(z)}{\zeta-z}-f^{(m)}(z)\right| = o(1), \qquad |\zeta-z|\to 0.$$

Теорема доказана.

1. *Герус О. Ф.* Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на ее границе // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1321–1328.
2. *Герус О. Ф.* О модуле непрерывности интеграла типа Коши в замкнутой области // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ: Тез. докл. Междунар. конф. (М., 27 апреля – 3 мая 1995 г.). – М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова, 1995. – С. 94–95.
3. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasikonforme Abbildungen. – Springer–Verlag, Berlin–New York, 1965. – **32**, № 995. – 269 p.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
5. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 432 с.
7. *Салимов Т. С.* Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой // Науч. труды МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 5. – С. 59–75.
8. *Walsh J. L., Sewell W. E.* Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials // Duke Math. J. – 1940. – **6**, № 3. – P. 658–705.
9. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 1. – С. 131–161.
10. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей // Матем. сб. – 1977. – **102**, № 3. – С. 331–361.

Получено 28.11.96