УДК 519. 21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ОДИН КЛАСС ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

We consider a class of Gaussian random processes which are not semimartingales but their increments can play the role of random measure. For an extended stochastic integral with respect to the considered processes, we obtain the Ito formula.

Розглянуто клас гауссівських випадкових процесів таких, що не є семімартингалами, але прирости яких можуть грати роль випадкової міри. Для розширеного стохастичного інтегралу за такими процесами отримано формулу Іто.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\{w(t);\ t \in [0; 1]\}$ — винеровский процесс на $[0; 1]$, причем $\mathcal{F} = \sigma(w)$. Основной объект исследования данной работы — класс Γ гауссовских случайных процессов на отрезке $[0; 1]$, обладающих следующими свойствами:

1) всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ является совместно гауссовским с w;

2) для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует $c > 0$ такое, что

$$\forall\, n \geq 1 \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \qquad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1:$$

$$M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\big(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\big)\right)^2 \leq c \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 (t_{k+1} - t_k);$$

3) для каждого $\gamma \in \Gamma$ и для произвольного $t \in [0; 1]$

$$M\gamma(t) = 0, \qquad \gamma(0) = 0.$$

Элементы Γ далее называются интеграторами. Такое название оправдано тем, что условие 2 позволяет интегрировать по случайным процессам из Γ функции из $L_2([0; 1])$. Действительно, из условия 2 по критерию Колмогорова следует, что любой элемент Γ имеет непрерывную с вероятностью 1 модификацию. Поэтому сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\big(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\big)$$

может рассматриваться как интеграл $\int_0^1 f\, d\gamma$ по процессу γ от ступенчатой функции

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_{[t_k;\, t_{k+1})},$$

а выполнение неравенства дает возможность заключить, что отображение

$$f \mapsto \int_0^1 f\, d\gamma \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

может быть продолжено до непрерывного линейного оператора на все $L_2([0; 1])$. Результат продолжения назовем интегралом по процессу γ. Класс Γ содержит некоторые мартингалы и процессы с гладкими траекториями. Однако в нем есть и другие объекты.

***Пример* 1.** Пусть $L \subset L_2([0;1])$. Обозначим

$$\mathcal{F}_L = \sigma\left(\int_0^1 \varphi\, dw,\ \varphi \in L\right).$$

Тогда процесс

$$\gamma(t) = M(w(t)/\mathcal{F}_L), \quad t \in [0;1]$$

является интегратором. Действительно, достаточно проверить выполнение условия 2. По неравенству Йенсена

$$M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))\right)^2 = M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k M(w(t_{k+1}) - w(t_k)/\mathcal{F}_L)\right)^2 =$$

$$= M\left(M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(w(t_{k+1}) - w(t_k))/\mathcal{F}_L\right)\right)^2 \le$$

$$\le MM\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(w(t_{k+1}) - w(t_k))\right)^2 / \mathcal{F}_L\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 (t_{k+1} - t_k).$$

В следующем пункте рассматривается внутренняя структура интеграторов, в частности наличие или отсутствие квадратической вариации. Далее (в п. 3) излагается построение расширенного стохастического интеграла по интегратору и приводится формула Ито для такого интеграла.

2. Строение интеграторов и квадратическая вариация в среднем. Здесь и далее используем обозначения

$$\forall\, \varphi \in L_2([0;1]) \qquad (\varphi; \xi) := \int_0^1 \varphi\, dw;$$

$(\cdot;\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — для обычного скалярного произведения и нормы в $L_2([0;1])$; ξ можно рассматривать как обобщенный гауссовский случайный элемент в $L_2([0;1])$ с нулевым средним и единичным корреляционным оператором [1]. Произвольный процесс $\gamma \in \Gamma$ является совместно гауссовским с ξ и, следовательно, может быть представлен в виде

$$\gamma(t) = (g(t); \xi), \quad t \in [0;1]. \tag{1}$$

При этом условие 2 означает, что существует линейный непрерывный оператор $A \in L(L_2([0;1]))$ такой, что

$$\forall\, t \in [0;1] \quad g(t) = A(\chi_{[0;t]}). \tag{2}$$

Так, в примере 1 оператор A — это ортогональный проектор на подпространство, порожденное L. В свою очередь легко проверить, что любому оператору $A \in L(L_2([0;1]))$ можно поставить в соответствие с помощью равенств (1) и (2) случайный процесс из Γ. В частности, выбирая в качестве A изометрию, получаем в качестве γ новый винеровский процесс.

Так как процессы из Γ допускают интегрирование по ним функций из $L_2([0;1])$, то естественно ожидать, что они обладают свойствами, близкими к свойствам семимартингалов или же процессов с гладкими траекториями. И те и другие имеют квадратическую вариацию. Рассмотрим $\gamma \in \Gamma$, для разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ отрезка $[0; 1]$ составим сумму

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))^2.$$

Соответствующее математическое ожидание

$$V = MS = \sum_{k=0}^{n-1} \| g(t_{k+1}) - g(t_k) \|^2.$$

Оказывается, что даже среди проекторов можно найти такие, для которых выражения V, построенные по последовательности разбиений, диаметр которых сходится к 0, для соответствующих функций g, не имеют предела.

Пример 2. Для построения интегратора, не имеющего квадратической вариации в среднем, зададим ортонормированный базис $\{e_k; k \geq 1\}$ в подпространстве, проектору на которое и будет соответствовать искомый процесс. Обозначим при каждом $n \geq 0$ через L_n подпространство $L_2([0; 1])$, порожденное семейством индикаторов $\left\{\chi_{[i/2^n; i+1/2^n]}, i = 0, \ldots, 2^n - 1\right\}$. Положим $e_1 \equiv 1$. Векторы $e_2, \ldots, e_{2^{10}+1}$ определим так:

$$e_k = 2^5 \left(\chi_{[(k-2)/2^{10}; (k-2)/2^{10} + 1/2^{11})} - \chi_{[(k-2)/2^{10} + 1/2^{11}; (k-1)/2^{10})}\right).$$

Аналогично построим векторы $e_{2^{10}+2}, \ldots, e_{2^{100}+2^{10}_1}$ по разбиению отрезка $[0; 1]$ на 2^{100} равных частей. Продолжая такую процедуру неограниченно, получаем ортонормированную последовательность функций, обладающую следующим свойством:

$$\forall\, n \geq 0 \quad \forall\, i = 2 + 2^{10} + \ldots + 2^{10^n}, \ldots, 1 + 2^{10} + \ldots + 2^{10^{n+1}}:$$

$$e_i \in L_{10^{n+1}+1}, \qquad e_i \perp L_{10^{n+1}}.$$

Пусть A — проектор на подпространство, порожденное последовательностью $\{e_k; k \geq 1\}$, а γ — соответствующий A интегратор. Тогда для каждого $n \geq 1$ выражение V_n, построенное по разбиению $0 < 1/2^n < \ldots < (2^n - 1)/2^n < 1$, имеет вид

$$V_n = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} e_k(s)\, ds \right)^2.$$

Поэтому

$$V_{10} = \sum_{i=0}^{2^{10}-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{i/2^{10}}^{(i+1)/2^{10}} ds \right)^2 = \frac{1}{2^{10}},$$

$$V_{11} = \sum_{i=0}^{2^{11}-1} \left[\left(\int_{i/2^{11}}^{(i+1)/2^{11}} ds \right)^2 + 2^{10} \left(\int_{i/2^{11}}^{(i+1)/2^{11}} ds \right)^2 \right] = \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2},$$

$$V_{100} = \sum_{i=0}^{2^{100}} \left[\left(\int_{i/2^{100}}^{(i+1)/2^{100}} ds \right)^2 + 2^{10} \left(\int_{i/2^{100}}^{(i+1)/2^{100}} ds \right)^2 \right] = \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{90}},$$

и т. д. Таким образом,

$$V_{10^j} \to 0, \quad j \to \infty, \quad V_{10^j+1} \to \frac{1}{2}, \quad j \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{V_n; n \geq 1\}$ не имеет предела и тем самым интегратор γ не имеет квадратической вариации в среднем.

Рассмотрим достаточные условия на интегратор γ в терминах оператора A, при которых γ имеет квадратическую вариацию в среднем.

Лемма 1. *Если A — оператор Гильберта – Шмидта, то γ имеет квадратическую вариацию в среднем, равную* 0.

Доказательство. Оператор A^*A является ядерным. Рассмотрим соответствующее представление Рисса

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \otimes e_k,$$

где $\{e_k; k \geq 1\}$ — ортонормированная последовательность,

$$\lambda_k \geq 0, \quad k \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty.$$

Для произвольного разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ соответствующее выражение V имеет вид

$$V = M \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e_k(s) ds \right)^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e_k(s) ds \right)^2 \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e_k^2(s) ds \, (t_{i+1} - t_i) \right) \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} (t_{i+1} - t_i) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k .$$

Следовательно, V сходится к 0, когда диаметр разбиения стремится к 0. Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы становится понятным, если заметить, что сейчас процесс γ имеет вид

$$\gamma(t) = \int_0^t (A^*\xi)(s) ds, \quad t \in [0; 1],$$

где $A^*\xi$ — обычный случайный элемент в $L_2([0; 1])$. Таким образом, сейчас и сама квадратическая вариация γ равна 0.

Лемма 2. *Пусть сужение оператора A на пространство $C([0; 1])$ является непрерывным линейным оператором, отображающим $C([0; 1])$ в себя. Тогда соответствующий процесс γ имеет квадратическую вариацию в среднем.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что оператору A можно поставить в соответствие функцию $\mu\colon [0;\,1]\times\mathcal{B}([0;\,1]) \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{B}([0;\,1])$) — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0;1]$, такую, что:

1) для всякого $t\in[0;\,1]$ $\mu(t,\cdot)$ — конечный заряд на $\mathcal{B}([0;\,1])$,

2) для всякого $\Delta\in\mathcal{B}([0;\,1])$ $\mu(\cdot,\Delta)$ — борелевская функция на $[0;1]$,

3) для каждой $f\in C([0;1])$, $t\in[0;1]$

$$(Af)(t) = \int_0^1 f(s)\mu(t,ds)\,.$$

Так как оператор A непрерывен на $L_2([0;\,1])$, то из теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$\forall\, t\in[0;\,1]\ \ \left(A\chi_{[0;\,t]}\right)(\tau) = \mu(\tau,[0;t]) \qquad (\mathrm{mod}\,\lambda),$$

где λ — мера Лебега. Поэтому для всякого разбиения $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ соответствующее выражение V имеет вид

$$V = \sum_{i=0}^{n-1}\left\|A\chi_{[t_i;\,t_{i+1}]}\right\|^2 = \sum_0^{n-1}\int_0^1 \mu(\tau,[t_i;t_{i+1}])^2\,d\tau =$$

$$= \int_0^1\sum_{i=0}^{n-1}\mu(\tau,[t_i;t_{i+1}])^2\,d\tau.$$

Поскольку по условию существует число c такое, что

$$\forall\, t\in[0;\,1]\quad |\mu|(\tau,[0;1]) \le c,$$

где $|\mu|$ — вариация заряда μ, то V имеет предел, когда диаметр разбиения сходится к 0, равный

$$\int_0^1\sum_{t_{\tau k}}\mu\left(\tau,\{t_{\tau k}\}\right)^2 d\tau.$$

Здесь при каждом τ $\{t_{\tau k};\,k\ge 1\}$ — множество всех атомов заряда $\mu(\tau,\cdot)$ (это множество всякий раз не более чем счетно). Лемма доказана.

Отметим, что условию леммы 2 удовлетворяют интеграторы различных типов.

***Пример* 3.** Интегратору

$$\gamma(t) = \int_0^t w(s)\,ds, \qquad t\in[0;\,1],$$

соответствует оператор A, действующий по правилу

$$\forall\,\varphi\in L_2([0;\,1]) \qquad (A\varphi)(t) = \int_0^1\varphi(s)\,ds.$$

Следовательно, γ удовлетворяет условию леммы 2 и соответствующие заряды таковы:

$$\mu(\tau,\Delta) = \lambda([\tau;\,1]\cap\Delta), \qquad \tau\in[0;\,1], \qquad \Delta\in\mathcal{B}([0;\,1]).$$

Поэтому квадратическая вариация в среднем процесса γ, как и следовало ожидать, равна 0. Аналогично можно проверить, что самому винеровскому процессу соответствует набор зарядов

$$\mu(\tau, \cdot) = \delta_\tau, \quad \tau \in [0; 1],$$

а мартингалу $w(t) - 2tw(1)$, $t \in [0; 1]$ (с фильтрацией, отличной от винеровской) — набор зарядов

$$\mu(\tau, \cdot) = \delta_\tau - 2\tau\lambda, \quad \tau \in [0; 1].$$

3. Расширенный стохастический интеграл и формула Ито для интегратора. Напомним необходимые сведения о расширенном стохастическом интеграле по винеровскому процессу. Рассуждения сейчас удобнее вести в терминах обобщенного случайного элемента ξ, заменяя интегралы от неслучайных функций по w на скалярное произведение с ξ. Произвольный случайный элемент x в $L_2([0; 1])$, имеющий конечный второй момент нормы, можно однозначно представить в виде суммы [1]

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(\xi, \ldots, \xi). \tag{*}$$

Здесь $\{T_k(\xi, \ldots, \xi), k \geq 0\}$ — кратные винеровские интегралы по соответствующим степеням $[0; 1]$ с симметричными ядрами, принимающими значения в $L_2([0; 1])$; T_k, $k \geq 1$, трактуется как k-линейная симметричная форма Гильберта – Шмидта на $L_2([0; 1])$ со значениями в $L_2([0; 1])$. При каждом $k \geq 0$ рассмотрим на $L_2([0; 1])$ $k+1$-линейную форму Гильберта – Шмидта

$$S_{k+1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}) = (\varphi_1; T_k(\varphi_2, \ldots, \varphi_{k+1})),$$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in L_2([0; 1]).$$

Пусть $\wedge S_{k+1}$ — симметризация S_{k+1} по всем аргументам.

***Определение* 1** [1]. *Расширенным стохастическим интегралом от x называется сумма ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \wedge S_{k+1}(\xi, \ldots, \xi),$$

если этот ряд сходится в среднем квадратическом.

Обозначим

$$\int_0^1 x(s)\, dw(s) = (x; \xi).$$

В случае, когда x представляет собой случайный процесс, согласованный с потоком σ-алгебр, порожденным винеровским процессом, расширенный стохастический интеграл от x совпадает с интегралом Ито.

Наряду с расширенным стохастическим интегралом понадобится понятие стохастической производной, которую также можно определить с помощью разложения (*). Для случайной величины α с конечным вторым моментом рассмотрим ее представление в виде суммы из кратных винеровских интегралов

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\xi, \ldots, \xi).$$

***Определение* 2** [1]. *Случайный элемент ζ в $L_2([0; 1])$ с конечным вторым моментом нормы называется стохастической производной случайной величины α, если для всякой $\varphi \in L_2([0; 1])$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k R_k(\varphi, \xi, \ldots, \xi)$$

сходится в среднем квадратическом и

$$(\zeta; \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} k R_k(\varphi, \xi, \ldots, \xi) \qquad (\mathrm{mod}\, P).$$

Обозначим $\zeta = D\alpha$.

Аналогично определяются стохастическая производная случайного элемента в гильбертовом пространстве и производные старших порядков. Совокупность всех случайных элементов в гильбертовом пространстве H, имеющих стохастическую производную порядка k, обозначим $W^k(H)$ (если $H = \mathbb{R}$, просто W^k). В настоящее время имеется множество работ, в которых исследуются свойства расширенного стохастического интеграла и стохастической производной и различные способы их определения в гауссовской и более общей ситуациях (см. [2 – 5] и имеющуюся в них библиографию). Здесь приведем необходимые в дальнейшем формулы (см., например, [1]).

Если $x \in W^1(L_2([0; 1]))$, то расширенный стохастический интеграл от x определен и

$$M(x; \xi) = 0, \qquad M(x; \xi)^2 = M\|x\|^2 + M\,\mathrm{tr}\,(Dx)^2. \tag{3}$$

В (3) используется тот факт, что стохастическая производная случайного элемента $x \in W^1(L_2([0; 1]))$ является случайным оператором Гильберта – Шмидта. Если случайная величина $\alpha \in W^1$ и случайный элемент x в $L_2([0; 1])$ таковы, что x и αx входят в область определения расширенного стохастического интеграла, $\alpha(x; \xi)$ имеет конечный второй момент, то

$$(\alpha x; \xi) = \alpha(x; \xi) - (x; D\alpha). \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) получаем следующее свойство расширенного стохастического интеграла.

Утверждение 1. *Пусть* $x \in W^1(L_2([0; 1]))$ *и* K *— оператор Гильберта – Шмидта в* $L_2([0; 1])$. *Тогда* $Kx \in W^1(L_2([0; 1]))$ *и*

$$(Kx; \xi) = (x; K^*\xi) - \mathrm{tr}\, K^* Dx. \tag{5}$$

Справедливость (5) легко следует из (4) для конечномерного K, а возможность предельного перехода обеспечивается (3).

Аналогично получается следующее утверждение об аппроксимации расширенного стохастического интеграла, имеющее место не только в гауссовском случае [5].

Утверждение 2. *Пусть* $\{K_n; n \ge 1\}$ *— последовательность операторов Гильберта — Шмидта в* $L_2([0; 1])$ *с ядрами* $\{h_n; n \ge 1\}$, *сильно сходящаяся к единичному. Тогда для произвольного* $x \in W^1(L_2([0; 1]))$ *справедливо равенство*

$$\int_0^1 x\,dw = \lim_{n \to \infty} \left(\int_0^1 x(s) \int_0^1 h_n(s, \tau)\,dw(\tau)\,ds - \int_0^1 \int_0^1 (Dx(s))(\tau) h_n(s, \tau)\,d\tau\,ds \right),$$

где сходимость имеет место в среднем квадратическом.

Пусть теперь $\gamma \in \Gamma$ и A — соответствующий непрерывный линейный оператор.

Определение 3. *Случайный элемент* x *в* $L_2([0;1])$ *с конечным вторым моментом входит в область определения расширенного стохастического интеграла по* γ, *если* Ax *входит в область определения расширенного стохастического интеграла по* w *и*

$$\int_0^1 x\,d\gamma := (Ax;\xi).$$

Рассмотрим примеры.

***Пример* 4.** Пусть

$$\gamma(t) = w(1)\cdot t, \qquad t\in[0;1].$$

В этом случае соответствующий оператор A действует так:

$$\forall\,\varphi\in L_2([0;1])$$

$$(A\varphi)(t) = \int_0^1 \varphi(s)\,ds, \qquad t\in[0;1].$$

Поэтому для случайного элемента x в $L_2([0;1])$, имеющего конечный второй момент, стохастический интеграл по γ определен, если случайный процесс, равный тождественно

$$\int_0^1 x(s)\,ds,$$

входит в область определения расширенного стохастического интеграла по w. При этом

$$\int_0^1 x\,d\gamma = \int_0^1\left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)dw.$$

В частности, если $x\in W^1(L_2([0;1]))$, то

$$\int_0^1 x\,d\gamma = \int_0^1 x(s)\,ds\cdot w(1) - \iint_0 Dx(s,\tau)\,ds\,d\tau.$$

Следовательно, в случае, когда γ имеет гладкие траектории, стохастический интеграл по γ не совпадает с интегралом Стильтьеса.

Следующий пример показывает, что интеграторы и стохастические интегралы по ним возникают при решении задач фильтрации для обычных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

***Пример* 5.** Пусть $L\subset L_2([0;1])$ и $\mathcal{F}_L$ построена так же, как в примере 1. Для случайного элемента x в $L_2([0;1])$, входящего в область определения расширенного стохастического интеграла по w, справедливо равенство

$$M\left(\int_0^1 x(s)\,dw(s)/\,\mathcal{F}_L\right) = \int_0^1 M(x(s)/\,\mathcal{F}_L)\,d\gamma(s),$$

где справа стоит стохастический интеграл от процесса $\{M(x(s)/\,\mathcal{F}_L),\, s\in[0;1]\}$ по интегратору $\{\gamma(s)=M(w(s)/\,\mathcal{F}_L),\, s\in[0;1]\}$. Убедиться в справедливости (6) можно, используя разложение (1) и тот факт, что для полилинейных форм от ξ (т. е. кратных винеровских интеграторов) имеет место равенство

$$M(S_k(\xi, \ldots, \xi)/\mathcal{F}_L) = S_k(P_L\xi, P_L\xi, \ldots, P_L\xi),$$

где P_L — ортогональный проектор в $L_2([0;1])$ на линейное подпространство, порожденное L.

Запишем теперь формулу Ито для процессов из Γ.

Теорема. *Пусть* $\gamma \in \Gamma$ *и оператор* A *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1а) A *является оператором Гильберта – Шмидта;*

1б) $\exists\, c > 0: \ \forall t \in [0;1] \ \ \forall \varphi \in L_2([0;1]) \cap C([0;t])$:

$$AA^*(\varphi) \in C([0;t]),$$

$$\max_{[0;t]}|AA^*(\varphi)| \le c\max_{[0;t]}|\varphi|.$$

Тогда для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F: [0;1] \times \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *имеющей ограниченные производные, справедливо равенство в случае* 1а)

$$F(t, \gamma(t)) = F(0,0) + \int_0^t F_1'(s, \gamma(s))\,ds + \int_0^t F_2'(s, \gamma(s))\,d\gamma(s) + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr} A^*\Psi_T A, \ \in [0;1], \tag{6}$$

или в случае 1б)

$$F(t, \gamma(t)) = F(0,0) + \int_0^t F_1'(s, \gamma(s))\,ds + \int_0^t F_2'(s, \gamma(s))\,d\gamma(s) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t AA^*(F_{22}''(s \vee \cdot, \gamma(s \vee \cdot)))(s)\,ds. \tag{6а}$$

Здесь Ψ_t — *интегральный оператор в* $L_2([0;1])$ *с ядром*

$$\chi_{[0;t]}(s)\chi_{[0;t]}(r) \cdot F_{22}''(s \vee r, \gamma(s \vee r)), \ s, r \in [0;1].$$

Доказательство. Для неотрицательной четной функции $h \in C^1(\mathbb{R})$ такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 1,$$

положим $h_n(s, \tau) = nh(n(r - s))$, $\tau, s \in [0;1]$, $n \ge 1$. Тогда интегральные операторы $\{K_n; n \ge 1\}$, отвечающие ядрам $\{h_n; n \ge 1\}$ в $L_2([0;1])$, удовлетворяют условию утверждения 2. Более того, при каждом $n \ge 1$ K_n является непрерывным линейным оператором в $C([0;1])$. При $n \ge 1$ рассмотрим новый случайный процесс

$$\gamma_n(t) = \int_0^t \int_0^1 h_n(s, \tau)\,d\gamma(\tau)\,ds, \ \in [0;1].$$

Так как

$$\gamma_n(t) = \int_0^t n\int_0^1 h(n(\tau - s))\,d\gamma(\tau)\,ds =$$

$$= \int_0^t n\left(h(n(1-s))\gamma(1) - n\int_0^1 h'(n(\tau-s))\gamma(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \gamma(1)\,n\int_0^t h(n(1-s))\,ds - n^2\int_0^1\left(\int_0^t h'(n(\tau-s))\,ds\right)\gamma(\tau)\,d\tau =$$

$$= \gamma(1)\,n\int_0^t h(n(1-s))\,ds + n\int_0^1 h(n(\tau-t))\gamma(\tau)\,d\tau - n\int_0^1 h(n\tau)\gamma(\tau)\,d\tau \qquad (\operatorname{mod} P),$$

то γ_n сходится равномерно на $[0; 1]$ к γ при $n\to\infty$ с вероятностью 1. Поэтому при любом $t\in[0; 1]$

$$F(t,\gamma_n(t)) = \lim_{n\to\infty} F(t,\gamma_n(t)) \qquad (\operatorname{mod} P).$$

Согласно формуле Ньютона – Лейбница

$$F(t,\gamma_n(t)) = F(0,0) + \int_0^t F_1'(s,\gamma_n(s))\,ds +$$

$$+ \int_0^t F_2'(s,\gamma_n(s))\int_0^1 h_n(s,\tau)\,d\gamma(\tau)\,ds\,.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\int_0^t F_2'(s,\gamma_n(s))\int_0^1 h_n(s,\tau)\,d\gamma(\tau)\,ds =$$

$$= \int_0^t F_2'(s,\gamma_n(s))\int_0^1 h_n(s,\tau)\,d\gamma(\tau)\,ds -$$

$$- \int_0^t\int_0^1 DF_2'(s,\gamma_n(s))(\tau)A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau\,ds +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 DF_2'(s,\gamma_n(s))(\tau)A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int_0^1 K_n^*\big(F_2'(\cdot,\gamma_n(\cdot))\chi_{[0;t]}\big)(\tau)\,d\gamma(\tau) +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 DF_2'(s,\gamma_n(s))(\tau)A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau\,ds.$$

При сделанных предположениях на функции h и F случайные элементы $K_n^*(F_2'(\cdot,\gamma_n(\cdot))\chi)[0;t])$, $n\ge 1$, являются стохастически дифференцируемыми и при $n\to\infty$ сходятся вместе со своими стохастическими производными в среднем квадратическом к случайному элементу $F_2'(\cdot,\gamma_n(\cdot))\chi_{[0;t]}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n^*\big(F_2'(\cdot,\gamma_n(\cdot))\chi_{[0;t]}(\cdot)\big)(\tau)\,d\gamma(\tau) =$$

$$= \int_0^1 F_2'(s, \gamma(s))\chi_{[0;t]}(s)\,d\gamma(s) = \int_0^t F_2'(s, \gamma(s))\,d\gamma(s),$$

где сходимость имеет место в среднем квадратическом. Рассмотрим теперь

$$\int_0^t \int_0^1 DF_2'(s, \gamma_n(s))(\tau) A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int_0^t F_{22}''(s, \gamma_n(s)) \int_0^s \left(\int_0^1 A^*(h_n(r,\cdot))(\tau) A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau \right) dr\,ds =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_0^t F_{22}''(s \vee r, \gamma_n(s \vee r)) \times$$

$$\times \left(\int_0^1 A^*(h_n(r,\cdot))(\tau) A^*(h_n(s,\cdot))(\tau)\,d\tau \right) ds\,dr.$$

Теперь утверждение теоремы получается в случае 1б) из теоремы Лебега об ограниченной сходимости, а в случае 1а) с использованием свойств ядерных операторов (см. [6]). Теорема доказана.

***Пример* 6.** Пусть $\gamma = w$ — винеровский процесс. В этом случае A — тождественный оператор. Условие 1б) выполнено и (6а) превращается в обычную формулу Ито для винеровского процесса.

Замечание. Отметим, что в случае выполнения условия 1б) процесс γ с вероятностью 1 имеет дифференцируемые траектории, однако добавка, содержащая вторую производную F, присутствует, так как интеграл по γ — расширенный стохастический интеграл.

1. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – **20,** № 2. – С. 223 – 237.
2. *Sekiguchi T., Shiota Y.* L_2-theory of non-causal stochastic integrals // Math. Repts Toyama Univ. – 1985. – **8.** – P. 119 – 195.
3. *Pardoux E., Nualart D.* Stochastic calculus with anticipating integrands // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – **78.** – P. 535 – 581.
4. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // Функц. анализ и его прилож. – 1991. – **25,** № 2. – С. 68 – 70.
5. *Дороговцев А. А.* Стохастические уравнения с упреждением. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 152 с.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.

Получено 13.12.96