УДК 517.518.45

П. В. Задерей (Держ. академія легкої пром-ті України, Київ),
Б. А. Смаль (Волин. ун-т, Луцьк)

ОЦІНКИ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ЇЇ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є

In the integral metric, lower bounds are obtained for the best approximation and the modulus of continuity of a function in terms of coefficients of its Fourier series.

Отримано в інтегральній метриці оцінки знизу найкращого наближення та модуля неперервності функції, виражені через коефіцієнти її ряду Фур'є.

Позначимо через L простір 2π-періодичних інтегровних функцій $\varphi(x)$ з нормою

$$\|\varphi(x)\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\,dx.$$

Нехай $f \in L$ і ряд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

є її рядом Фур'є. Нехай також T_n — множина тригонометричних поліномів

$$t_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

де α_k, β_k — довільні дійсні числа;

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_L$$

є найкращим наближенням функції $f(x)$ поліномами $t_n \in T_n$;

$$w_s(f, \delta)_L := w_s(f, \delta) = \sup_{0 < h \le \delta} \|\Delta_h^s f(x - sh/2)\|_L$$

— модуль неперервності функції $f(x)$ порядку $s \in N$ в метриці L (інтегральний модуль неперервності), де

$$\Delta_h^s f(x) := \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_k^s f(x + kh).$$

Домовимося далі через c позначати абсолютні додатні сталі, а через c_s — додатні сталі, які можуть залежати тільки від s. При цьому значення c і c_s в різних формулах можуть бути неоднаковими.

Для функцій з невід'ємними синус-коефіцієнтами Фур'є А. А. Конюшков ([1], теорема 3) довів, що

$$E_n(f) \ge cn \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{b_k}{k^2}.$$

Цей результат був покращений В. Е. Гейтом [2], який для всіх f з рядом Фур'є (1) довів нерівність

$$E_n(f) \ge \frac{1}{C} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де

$$C = \sup_n \sup_x \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \right| < \infty.$$

Відомо також, що для кожної $f \in L$ справедлива оцінка

$$E_n(f) \geq \max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|). \tag{3}$$

Оцінки інтегрального модуля неперервності функцій $f \in L$ через їх коефіцієнти Фур'є одержували Х. Лебег [3], О. Сас [4], С. Алянчич і М. Томіч [5], В. Е. Гейт [6], С. А. Теляковський [7] та ін. (огляд результатів див. в [8]).

Використовуючи співвідношення (2), С. А. Теляковський [7] встановив, що для кожної $f \in L$ і довільного $s \in N$

$$w_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq$$

$$\geq c_s \left[\max_{\substack{m \geq n \\ m \geq l \geq 1}} \left| \sum_{k=l}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{s_1} \frac{a_k}{k} \right| + \max_{\substack{m \geq n \\ m \geq l \geq 1}} \left| \sum_{k=l}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{s_2} \frac{b_k}{k} \right| + \max_{M \geq m \geq n} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{b_k}{k} \right| \right],$$

де

$$s_1 := \begin{cases} s, & \text{якщо } s \text{ непарне}, \\ s+1, & \text{якщо } s \text{ парне}; \end{cases} \qquad s_2 := \begin{cases} s+1, & \text{якщо } s \text{ непарне}, \\ s, & \text{якщо } s \text{ парне}. \end{cases}$$

Метою даної роботи є доведення наступних тверджень.

Теорема 1. *Для довільної функції $f \in L$ з рядом Фур'є* (1) *справедлива оцінка*

$$E_n(f) \geq c \left[\max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right], \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для довільної функції $f \in L$ з рядом Фур'є* (1) *і $s \in N$ справедлива оцінка*

$$w_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq c_s \left[\max_{m \geq n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{s_1} \frac{|a_k|}{k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{s_2} \frac{|b_k|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right]. \tag{5}$$

***Доведення теореми* 1.** Оскільки $f(x) = h(x) + g(x)$, де

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \qquad g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

то

$$\|f(x) - t_n(x)\|_L = \frac{1}{2}(\|f(x) - t_n(x)\|_L + \|-f(-x) + t_n(-x)\|_L) \geq$$

$$\geq \left\| \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) - \frac{1}{2}(t_n(x) - t_n(-x)) \right\|_L =$$

$$= \left\| g(x) - \frac{1}{2}(t_n(x) - t_n(-x)) \right\|_L,$$

$$E_n(f) \geq E_n^-(g) \geq E_n(g). \tag{6}$$

Тут $E_n^-(g)$ — найкраще наближення непарної частини функції $f(x)$ непарними тригонометричними поліномами порядку не вище n.

Спочатку покажемо, що для довільної $f \in L$

$$E_n^-(g) \geq \frac{1}{C} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k}. \tag{7}$$

При $b_k \geq 0$ (≤ 0) для кожного $k \in N$ співвідношення (7) випливатиме з оцінки (6) і результату В. Е. Гейта [2] (див. формулу (2)).

Нехай тепер b_k приймає при різних k як додатні, так і від'ємні значення.

Позначимо через $\bar{t}_n^*(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k^* \sin kx$ непарний многочлен такий, що $\|g(x) - \bar{t}_n^*(x)\|_L = E_n^-(g)$, а різницю $g(x) - \bar{t}_n^*(x)$ — через $\psi(x)$. Тоді

$$S[\psi] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx,$$

де

$$\beta_k = \begin{cases} b_k - \beta_k^* & \text{при } k \leq n, \\ b_k & \text{при } k \geq n+1, \end{cases}$$

і

$$E_n^-(g) = \|\psi(x)\|_L. \tag{8}$$

За допомогою функції $\psi(x)$ побудуємо функцію $\overline{\psi}(x)$ таку, що $\|\psi(x)\|_L \geq \|\overline{\psi}(x)\|_L$ і для коефіцієнтів Фур'є $\overline{\beta}_k$ якої буде виконуватись нерівність

$$|\beta_k| \leq \overline{\beta}_k. \tag{9}$$

Для цього покладемо $h_1(x) = |\psi(x)|^{1/2}$, $h_2(x) = |\psi(x)|^{1/2} \operatorname{sign} \psi(x)$. Очевидно, $h_1(x)$, $h_2(x) \in L_2$, крім того, $h_1(x) h_2(x) = \psi(x)$. Функція $\psi(x)$ — непарна, тому функція $h_1(x)$ є парною, а $h_2(x)$ — непарною.

Нехай

$$S[h_1] = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos kx, \qquad S[h_2] = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin kx,$$

тоді (див. [9, с. 592])

$$S[\psi] = S[h_1 h_2] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx,$$

де

$$\beta_k = \frac{1}{2}\left(\gamma_0 \delta_k + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (\delta_{k+m} + \delta_{k-m})\right) \qquad (\delta_{-k} = -\delta_k).$$

Позначимо через $\overline{h}_1(x)$ і $\overline{h}_2(x)$ функції, ряди Фур'є яких мають відповідно вигляд

$$S[\overline{h}_1] = \frac{|\gamma_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| \cos kx, \qquad S[\overline{h}_2] = \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| \sin kx,$$

а через $\overline{\psi}(x)$ — функцію $\overline{\psi}(x) = \overline{h}_1(x)\, \overline{h}_2(x)$.

Таким чином,

$$S[\overline{\psi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k \sin kx,$$

де

$$\overline{\beta}_k = \frac{1}{2}\left(|\gamma_0||\delta_k| + \sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_m|(|\delta_{k+m}| + |\delta_{k-m}|)\right) \quad (\delta_{-k} = -\delta_k).$$

Очевидно, що для визначених таким чином коефіцієнтів має місце співвідношення (9). Крім того,

$$\|\overline{\psi}(x)\|_L = \|\overline{h}_1(x)\cdot \overline{h}_2(x)\|_L \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} \overline{h}_1^{\,2}(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \overline{h}_2^{\,2}(x)\,dx\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} h_1^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\pi}^{\pi} h_2^2(x)\,dx\right)^{1/2} = \int_{-\pi}^{\pi}|\psi(x)|\,dx = \|\psi(x)\|_L. \tag{10}$$

Оскільки, як відомо, для всіх x

$$|\tau(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right| \le c,$$

то

$$\|\overline{\psi}(x)\|_L \ge \frac{1}{C}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\psi}(x)\tau(x)\,dx\right| \ge$$

$$\ge c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\overline{\beta}_k}{k} \ge c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\beta_k|}{k} = c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}. \tag{11}$$

Із співвідношень (8), (10), (11) випливає оцінка (7), а з нерівностей (7) і (3) — справедливість теореми 1.

Зауважимо, що оцінка (4) є точною по порядку на множині сумовних функцій, оскільки відомо (див. [10, с. 65]), що для непарної функції $g(x)$, коефіцієнти Фур'є якої $b_k \downarrow 0$ і послідовність $\{b_k/k\}$ — випукла, виконується співвідношення

$$E_n(g) \le c\left(b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\right).$$

Доведення теореми 2. Нехай спочатку s — непарне число, тоді

$$\Delta_h^s \cos k\left(x - \frac{sh}{2}\right) = (-1)^{(s-1)/2}\,2^s \sin^s\frac{kh}{2}\sin kx\,,$$
$$\Delta_h^s \sin k\left(x - \frac{sh}{2}\right) = (-1)^{(s+1)/2}\,2^s \sin^s\frac{kh}{2}\cos kx\,. \tag{12}$$

Із співвідношень (12) випливає, що

$$S\left[\Delta_h^s f\left(x - \frac{sh}{2}\right)\right] = (-1)^{(s-1)/2}\,2^s\sum_{k=1}^{\infty}\sin^s\frac{kh}{2}\,(a_k\sin kx - b_k\cos kx)\,.$$

Непарну частину функції $\Delta_h^s f(x - sh/2)$ позначимо через $\psi(x)$. Очевидно, що

$$S[\psi] = (-1)^{(s-1)/2} 2^s \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx,$$

де $\beta_k = \sin^s \frac{kh}{2} a_k$, крім того,

$$\left\| \Delta_h^s f\left(x - \frac{sh}{2}\right) \right\|_L =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\| \Delta_h^s f\left(x - \frac{sh}{2}\right) \right\|_L + \left\| \Delta_h^s f\left(-x - \frac{sh}{2}\right) \right\|_L \right) \geq \| \psi(x) \|_L. \tag{13}$$

Виходячи з функції $\psi(x)$ і повторивши міркування, подібні доведенню теореми 1, побудуємо функцію $\overline{\psi}(x)$, ряд Фур'є якої має вигляд

$$S[\overline{\psi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k \sin kx,$$

і таку, що

$$\| \psi(x) \|_L \geq \| \overline{\psi}(x) \|_L, \tag{14}$$

а для коефіцієнтів Фур'є $\overline{\beta}_k$ якої буде виконуватися нерівність $|\beta_k| \leq \overline{\beta}_k$.

Функція $\overline{\psi}(x)$ є різницею порядку s деякої функції $\psi^*(x)$, яка згідно із співвідношеннями (12) при непарних s має ряд Фур'є

$$S[\psi^*] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* \cos kx,$$

де

$$\alpha_k^* = \frac{\overline{\beta}_k}{(-1)^{(s-1)/2} 2^s \sin^s (kh/2)},$$

тобто $\overline{\psi}(x) = \Delta_h^s \psi^*(x - sh/2)$, тому

$$\| \overline{\psi}(x) \|_L = \left\| \Delta_h^s \psi^* \left(x - \frac{sh}{2}\right) \right\|_L. \tag{15}$$

Оскільки відомо (див. лему в [7]), що для полінома

$$B(x) := \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \sin kx,$$

де

$$\sigma_k = \frac{k^{s-1}}{m^s \sin^s (k/2m)},$$

виконується нерівність

$$|B(x)| \leq c_s, \tag{16}$$

то, поклавши $h = 1/m$ і врахувавши (12), знаходимо

$$\left\| \Delta_{1/m}^s \psi^* \left(x - \frac{s}{2m}\right) \right\|_L \geq c_s \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{m} \sin^s \frac{k}{2m} \alpha_k^* \sin kx \, B(x) dx \right| \geq$$

$$\geq c_s \left| \sum_{k=1}^{m} \sin^s \frac{k}{2m} \alpha_k^* \sigma_k \right| = c_s \left| \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{\alpha_k^*}{k} \right| = c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{\overline{\beta}_k}{k \sin^s (k/2m)} \geq$$

$$\geq c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|\beta_k|}{k \sin^s (k/2m)} = c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|a_k|}{k}. \qquad (17)$$

Враховуючи нерівність

$$w_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq \sup_{m \geq n} \left\| \Delta_{1/m}^s f\left(x - \frac{s}{2m}\right) \right\|_L, \qquad (18)$$

із співвідношень (13) – (15), (17) для непарних s маємо

$$w_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq c_s \max_{m \geq n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|a_k|}{k}. \qquad (19)$$

Але для всіх s справедлива нерівність [11, с. 117]

$$w_{s+1}(f, \delta) \leq 2\, w_s(f, \delta), \qquad (20)$$

тому з (19) випливає, що для всіх $s \in N$

$$w_s\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq c_s \max_{m \geq n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^{s_1} \frac{|a_k|}{k}. \qquad (21)$$

Доведемо тепер відповідну оцінку для коефіцієнтів b_k. Якщо s — парне, то

$$\Delta_h^s \cos k\left(x - \frac{sh}{2}\right) = (-1)^{s/2}\, 2^s \sin^s \frac{kh}{2} \cos kx,$$

$$\Delta_h^s \sin k\left(x - \frac{sh}{2}\right) = (-1)^{s/2}\, 2^s \sin^s \frac{kh}{2} \sin kx, \qquad (22)$$

а тому

$$S\left[\Delta_h^s f\left(x - \frac{sh}{2}\right)\right] = (-1)^{s/2}\, 2^s \sum_{k=1}^{\infty} \sin^s \frac{kh}{2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Нехай $\psi_1(x)$ — непарна частина функції $\Delta_h^s f(x - sh/2)$. Тоді

$$S[\psi_1] = (-1)^{s/2}\, 2^s \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k' \sin kx,$$

де $\beta_k' = b_k \sin^s (kh/2)$, крім того,

$$\left\| \Delta_h^s f\left(x - \frac{sh}{2}\right) \right\|_L \geq \| \psi_1(x) \|_L. \qquad (23)$$

Виходячи з функції $\psi_1(x)$, побудуємо вказаним вище способом функцію $\overline{\psi}_1(x)$, яка має ряд Фур'є

$$S[\overline{\psi}_1] = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k' \sin kx,$$

таку, що

$$\| \psi_1(x) \|_L \geq \| \overline{\psi}_1(x) \|_L, \qquad (24)$$

і для коефіцієнтів Фур'є $\overline{\beta}_k'$ якої виконується нерівність $|\beta_k'| \leq \overline{\beta}_k'$.

Врахувавши співвідношення (22), стверджуємо, що функція $\overline{\psi}_1(x)$ є різницею порядку s деякої функції $\psi_1^*(x)$, яка має ряд Фур'є

$$S[\psi_1^*] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^* \sin kx,$$

де

$$\beta_k^* = \frac{\overline{\beta}_k'}{(-1)^{s/2} 2^s \sin^s(kh/2)},$$

тобто справедлива рівність $\overline{\psi}_1(x) = \Delta_h^s \psi_1^*(x - sh/2)$, або

$$\|\overline{\psi}_1(x)\|_L = \left\| \Delta_h^s \psi_1^* \left(x - \frac{sh}{2} \right) \right\|_L. \tag{25}$$

Тому, використовуючи (16), при $h = 1/m$ маємо

$$\left\| \Delta_{1/m}^s \psi_1^* \left(x - \frac{s}{2m} \right) \right\|_L \ge c_s \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{m} \sin^s \frac{k}{2m} \beta_k^* \sin kx \, B(x) dx \right| \ge$$

$$\ge c_s \left| \sum_{k=1}^{m} \beta_k^* \sigma_k \sin^s \frac{k}{2m} \right| = c_s \left| \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{\beta_k^*}{k} \right| = c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{\overline{\beta}_k'}{k \sin^s(k/2m)} \ge$$

$$\ge c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|\beta_k'|}{k \sin^s(k/2m)} = c_s \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|b_k|}{k}. \tag{26}$$

Із врахуванням оцінок (18), (23) – (26) знаходимо для парних s

$$w_s\left(f, \frac{1}{n} \right) \ge c_s \max_{m \ge n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^s \frac{|b_k|}{k},$$

але, оскільки справедлива нерівність (20), то для всіх $s \in N$

$$w_s\left(f, \frac{1}{n} \right) \ge c_s \max_{m \ge n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^{s_2} \frac{|b_k|}{k}. \tag{27}$$

Далі, згідно з теоремою Джексона $E_n(f) \le c_s w_s(f, 1/n)$, тому, застосувавши оцінку (4), знаходимо

$$w_s\left(f, \frac{1}{n} \right) \ge c_s \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k}. \tag{28}$$

З нерівностей (21), (27), (28) випливає нерівність

$$w_s\left(f, \frac{1}{n} \right) \ge$$

$$\ge c_s \left[\max_{m \ge n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^{s_1} \frac{|a_k|}{k} + \max_{m \ge n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^{s_2} \frac{|b_k|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right]. \tag{29}$$

Врахувавши, що при $m > n$ сума $\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m} \right)^{s_2} \frac{|b_k|}{k}$ може перевищувати суму $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{s_2} \frac{|b_k|}{k}$ не більш ніж на $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{|b_k|}{k}$, з (29) отримаємо оцінку (5).

Теорему 2 доведено.

Оцінка (5) також є точною по порядку на множині сумовних функцій, бо (див. теореми 1, 2 в [12]) для парних функцій $h(x)$ з випуклою послідовністю коефіцієнтів Фур'є $\{a_k\}$ виконується оцінка

$$w_s\left(h, \frac{1}{n}\right) \leq c_s \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{a_k}{k} \qquad \forall\, s \in N.$$

Для непарних функцій $g(x)$ таких, що послідовність $\{b_k\}$ її коефіцієнтів Фур'є — випукла, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ — збіжний, справедливе співвідношення

$$w_s\left(g, \frac{1}{n}\right) \leq c_s \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \frac{b_k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \right) \qquad \forall\, s \in N.$$

1. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**. – С. 53–84.
2. *Гейт В. Е.* О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье // Изв. вузов. Мат. – 1969. – № 7. – С. 39–47.
3. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschits // Bull. Soc. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184–210.
4. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – **42**. – P. 366–395.
5. *Aljancic S., Tomic M.* Sur la borne inferieure du module de continuite de la fonction exprimee par les coefficients de Fourier // Bull. Acad. Serbe Sc. Arts. – 1967. – **40**, № 6. – P. 39–51.
6. *Гейт В. Е.* О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Мат. – 1972. – № 7. – С. 19–30.
7. *Теляковский С. А.* Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через ее коэффициенты Фурье // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 5. – С. 107–112.
8. *Теляковский С. А.* Оценки модуля непрерывности в метрике L функций одной переменной через коэффициенты Фурье // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 626–632.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 3.
10. *Баскаков В. О.* Линейные полиномиальные операторы с наилучшим порядком приближения. – Калинин: Калинин. ун-т, 1984. – 80 с.
11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
12. *Aljancic S.* Sur le module de continuite des series de Fourier particulieres et sur le module de continuite des series de Fourier transformees par des multiplicateurs de types divers // Bull. Acad. Serbe Sc. Arts. – 1967. – **40**, № 6. – P. 13–38.

Одержано 25.12.96