УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, Ю. А. Ковальчук (Киев. ун-т)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ИЗ $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$. I

Conditions of convergence and the convergence rate of random functional series from the spaces $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ are investigated in various norms. The results obtained are applied when studying a boundary-value problem for a hyperbolic equation with random initial conditions.

Досліджуються умови та швидкість збіжності випадкових функціональних рядів із просторів $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ у різноманітних нормах. Одержані результати застосовуються до дослідження крайової задачі для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами.

1. Введение. В работе исследуются условия и скорость сходимости некоторых функциональных случайных рядов в нормах различных пространств, а именно пространств Орлича, L_p-пространств, пространств Соболева.

Существует много методов исследования условий сходимости случайных рядов (см., например, [1, 2]). В данной работе используется метод [3 – 6], позволяющий оценивать скорость сходимости случайных рядов.

Полученные результаты используются для исследования условий существования обобщенных решений краевых задач со случайными начальными условиями и нахождения оценок для распределений норм этих решений в пространстве Соболева.

Подобные исследования для краевых задач проводились ранее в работах [7 – 10].

2. Предварительные сведения. Приведем некоторые результаты из теории пространств $\mathrm{sub}_b(\Omega)$ и пространств Орлича.

***Определение* 1** [11, с. 19]. *Четная непрерывная выпуклая функция* $U(x)$, $x \in R^1$, *такая, что* $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ *при* $x \neq 0$ *и такая, что* $U(x)/x \to 0$ *при* $x \to 0$ *и* $U(x)/x \to \infty$ *при* $x \to \infty$, *называется* N*-функцией Орлича.*

Свойства N-функций можно найти в [11].

***Определение* 2** [11]. *Функция* $U^*(x) = \sup\limits_{y \in R^1}(xy - U(y))$ *называется функцией, дополнительной к функции* $U(x)$ ($U^*(x)$ — *преобразование Юнга – Фенхеля функции* $U(x)$).

В [11] показано, что $U^*(x)$ является также N-функцией Орлича. Там же показано, что если функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ эквивалентны, то функции $U_1^*(x)$ и $U_2^*(x)$ также эквивалентны.

Лемма 1 [11]. *N-функция $U(x)$ допускает представление* $U(x) = \int_0^{|x|} p(u)\,du$, *где* $p(u)$, $u > 0$, — *монотонно неубывающая функция, непрерывная справа, такая, что* $p(0) = 0$, $p(x) \uparrow \infty$ *при* $x \to \infty$; $U^*(x) = \int_0^{|x|} p^{(-1)}(u)\,du$, *где* $p^{(-1)}(u)$, $u > 0$, — *обобщенная обратная функция к* $p(u)$ ($p^{(-1)}(u) = \sup\{t \geq 0,\ p(t) \leq u\}$).

В случае, когда функция $p(u)$ строго монотонна, $p^{(-1)}(u)$ — обычная обратная функция к $p(u)$. Справедливо неравенство Юнга: при $x > 0$, $y > 0$

$$xy \leq U(y) + U^*(x). \tag{1}$$

Равенство при этом достигается, когда $x = p(y)$ $(y = p^{(-1)}(x))$.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x)$ — N*-функция такая, что* $\varphi(x) = x^2/2$ *при* $|x| < 1$. *Тогда* $\varphi^*(x) = x^2/2$ *при* $|x| < 1$.

Лемма 2 легко следует из определения дополнительных функций.

В настоящей работе будут рассматриваться такие N-функции $\varphi(x)$, что функция $\varphi(\sqrt{x})$ выпукла при $x \geq 0$.

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* N*-функция* $\varphi(x)$ *такая, что функция* $\varphi\left(\sqrt{|x|}\right)$ *выпукла. Тогда функция* $\varphi^*\left(\sqrt{|x|}\right)$ *вогнута,* $x \geq 0$.

Пусть $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ — измеримое пространство с конечной мерой μ. Пусть $U(x)$ — некоторая N-функция Орлича. $L_U(X)$ — пространство измеримых функций $f(x)$ на $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ таких, что для $f(x)$ существует постоянная r_f такая, что

$$\int_X U\left(\frac{f(x)}{r_f}\right) d\mu(x) < \infty.$$

Пространство $L_U(X)$ является банаховым пространством относительно нормы (см. [11])

$$\|f\|_U^X = \inf\left\{r > 0: \int_X U\left(\frac{f(x)}{r}\right) d\mu(x) < 1\right\}. \tag{2}$$

Будем называть $L_U(X)$ пространством Орлича, порожденным функцией $U(x)$. В случае, когда $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ — вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$, будем называть $L_U(\Omega)$ пространством Орлича случайных величин, порожденным N-функцией U.

N-функция $U_1(x)$ называется подчиненной N-функции $U_2(x)$, если существуют некоторые константы $K > 0$, $x_0 > 0$, что при $x > x_0$ выполняется неравенство

$$U_1(x) < U_2(Kx).$$

N-функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ называются эквивалентными, если $U_1(x)$ подчинена $U_2(x)$, а $U_2(x)$ подчинена $U_1(x)$.

Заметим, что эквивалентные N-функции порождают одни и те же пространства Орлича с эквивалентными нормами [11].

Пусть $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ — стандартное вероятностное пространство.

Определение **3** [12, 13]. *Пространством* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *случайных величин, порожденным* N*-функцией* $\varphi(x)$ *такой, что* $\varphi(x) = x^2/2$ *при* $|x| < 1$, *называется пространство случайных величин* $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\mathrm{E}\xi = 0$, *таких, что существует постоянная* r_ξ *такая, что для всех* $\lambda \in R^1$ *выполняется неравенство*

$$\mathrm{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda r_\xi)\}. \tag{3}$$

В [13] показано, что $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\sigma_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln \mathrm{E}\exp\{\lambda\xi\})}{|\lambda|}.$$

Кроме того, при всех $\lambda \in R^1$ выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda\sigma_\varphi(\xi))\}. \tag{4}$$

***Пример* 1.** $\xi \in \mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, если ξ — четная и при $x > 0$ $P\{\xi > x\} = \frac{1}{2}\exp\{-\varphi(x)\}$.

***Определение* 4.** *Случайный процесс* $X = \{X(t),\ t \in T\}$ *принадлежит пространству* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ $(X \in \mathrm{sub}_\varphi(\Omega))$, *если при каждом* $t \in T$ *случайные величины* $X(t)$ *принадлежат пространству* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *и* $\sup\limits_{t\in T}\sigma_\varphi(X(t)) < \infty$.

3. Семейства строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных величин и строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайные процессы. Введем понятия семейства строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных величин и строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных процессов, которые аналогичны понятиям семейств строго Орличевых случайных величин и строго Орличевых случайных процессов, введенным в [10]. Частные случаи рассмотрены в [6, 9, 12 – 15].

***Определение* 5.** *Семейство* Δ *случайных величин* ξ *из пространства* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *называется строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, *если существует постоянная* $C_\Delta > 0$ *такая, что для любого не более чем счетного множества* I $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, *и для любых* $\lambda_i \in R^1$ *выполняется неравенство*

$$\sigma_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathrm{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Постоянную C_Δ *будем называть определяющей постоянной семейства* Δ.

Подобно тому, как это сделано в [10] для семейств строго Орличевых случайных величин, легко получить следующие свойства семейств $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных величин.

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ — *пространство, порожденное* N*-функцией* $\varphi(x)$ *такой, что функция* $\varphi\left(\sqrt{|x|}\right)$ *выпукла,* Δ — *семейство независимых случайных величин из* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *таких, что при* $\xi_i \in \Delta$ *выполняется* $\sigma_\varphi^2(\xi_i) \le R\mathrm{E}\xi_i^2$, *где* $R > 0$ — *некоторая постоянная.*

Тогда Δ — строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ семейство с определяющей постоянной $C_\Delta = \sqrt{R}$.

Теорема 1. *Пусть* Δ — *семейство строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *случайных величин с определяющей постоянной* C_Δ. *Тогда линейное замыкание* $\overline{\Delta}$ *в среднем квадратическом семейства* Δ *в пространстве* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *является строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *семейством с той же самой определяющей постоянной* C_Δ.

Доказательство элементарно и ничем не отличается от доказательства подобной теоремы в [10].

***Определение* 6.** *Случайный процесс* $X = \{X(t),\ t \in T\}$ *из* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *называется строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, *если семейство случайных величин* $\{X(t),\ t \in T\}$ *является строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$.

Семейство случайных процессов $X_i = \{X_i(t),\ t \in T,\ i \in I\}$ *называется совместно строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, *если семейство случайных величин* $\{X_i(t),\ t \in T,\ i \in I\}$ *является строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$.

Определяющую постоянную семейства $\{X_i(t),\ t\in T,\ i\in I\}$ будем называть определяющей постоянной семейства процессов $X_i,\ i\in I$.

Теорема 2. *Пусть* $X_i = \{X_i(t),\ t\in T,\ i\in I\}$ *— семейство совместно строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *случайных процессов с определяющей постоянной* C_X. *Пусть* $\{\varphi_{ki}(t),\ i\in I,\ k=\overline{1,\infty}\}$ *— семейство измеримых функций на измеримом пространстве* $\{T, \mathcal{B}, \mu\}$. *Пусть существуют интегралы в среднеквадратичном*

$$\xi_{ki} = \int\limits_T \varphi_{ki}(t) X_i(t)\, d\mu(t).$$

Тогда семейство случайных величин $\Delta_\xi = \{\xi_{ki},\ i\in I,\ k=\overline{1,\infty}\}$ *является строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *с определяющей постоянной* C_X.

Теорема 2 очевидным образом следует из теоремы 1.

4. О распределении квадратичных форм от строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных величин. Изучим распределения квадратичных форм от строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ случайных величин из пространства $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, порожденных функцией $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x) < x^2/2$ при $|x|<1$, и такой, что функция $\varphi\left(\sqrt{|x|}\right)$ выпукла.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(u)$ *—* N*-функция такая, что* $\varphi(u) = u^2/2$ *при* $|u| < 1$, *и такая, что функция* $p(u)$ *из представления* $\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(v)\,dv$ *непрерывна и строго монотонна. Пусть* $\varphi^*(u)$ *—* N*-функция, дополнительная к* $\varphi(u)$.

Тогда существует постоянная $\Lambda > 0$ *такая, что при всех* $\Lambda > 0$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}\,d\varphi(u) \ \ge\ \exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\right\}. \tag{6}$$

О возможных значениях Λ, при которых имеет место неравенство (6), см. замечание 1.

***Замечание* 1.** При доказательстве леммы 5 будет показано, что неравенство (6) выполняется при $\Lambda = \Lambda_1(s) = \max(s, \lambda_s r/\sigma)$, где $s>1$ — произвольное число,

$$\sigma^2 = \int\limits_0^\infty \lambda^2 \exp\{-\varphi(\lambda)\}\,d\varphi(\lambda), \tag{7}$$

$$\lambda_s = \mathrm{sp}\left(\frac{s}{s-1}\varphi^{(-1)}(\ln 2)\right). \tag{8}$$

Здесь $p(u)$ — функция из представления $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(u)\,du$ (см. лемму 1),

$$r = \max\left(\sigma, \frac{1}{\lambda_s}, \frac{\sigma}{\sqrt{2\ln \mathrm{ch}(\lambda_s\sigma)}}\right).$$

***Доказательство леммы* 5.** В неравенстве Юнга (1) $xy \le \varphi(y) + \varphi^*(x)$ равенство достигается при $x = p(y)$ $\left(\varphi(u) = \int_0^{|y|} p(v)\,dv\right)$. Для произвольных $s > 1$ и $\lambda > 0$ выберем w из условия $\lambda/s = p(sw)$. Следовательно, выполняется равенство

$$w\lambda = sw\frac{\lambda}{s} = \varphi^*\left(\frac{\lambda}{s}\right) + \varphi(sw). \tag{9}$$

Из (9) следуют неравенства

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_w^\infty \exp\{w\lambda - \varphi(u)\}d\varphi(u) = \frac{1}{2}\exp\{w\lambda\}\int_w^\infty \exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\{w\lambda\}\exp\{-\varphi(w)\} = \frac{1}{2}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{s}\right) + \varphi(sw) - \varphi(w)\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{s}\right) + \varphi((s-1)w)\right\}. \tag{10}$$

Мы воспользовались тем, что для N-функций выполняется неравенство $\varphi(|u| + |v|) \geq \varphi(u) + \varphi(v)$ [11].

Из (10) следует, что при w таких, что $\varphi((s-1)w) \geq \ln 2$, справедливо неравенство $\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) \geq \exp\{\varphi^*(\lambda/s)\}$.

Так как $w = p^{(-1)}(\lambda/s)/s$, то неравенство $\varphi((s-1)w) \geq \ln 2$ выполняется тогда и только тогда, когда $p^{(-1)}(\lambda/s)/s \geq \varphi^{(-1)}(\ln 2)/(s-1)$ или когда

$$\lambda \geq sp\left(\frac{s}{s-1}\varphi^{(-1)}(\ln 2)\right) = \lambda_s. \tag{11}$$

Таким образом, при $\lambda \geq \lambda_s$

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) \geq \exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right\}. \tag{12}$$

Далее,

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) = \int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)d(1 - \exp\{-\varphi(u)\}) = \mathrm{E}\operatorname{ch}(\lambda\xi),$$

где ξ — случайная величина с функцией распределения $F(u) = 1 - \exp\{-\varphi(u)\}$, $u > 0$. Поэтому справедливо равенство $\mathrm{E}\operatorname{ch}(\lambda\xi) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^{2k}\mathrm{E}\xi^{2k}/(2k)!$. Поскольку $\mathrm{E}\xi^{2k} \geq (\mathrm{E}\xi^2)^k = \sigma^{2k}$, то

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^{2k}\sigma^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch}(\lambda\sigma). \tag{13}$$

Пусть

$$r = \max\left(\sigma, \frac{1}{\lambda_s}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{\ln\operatorname{ch}(\lambda_s\sigma)}}\right). \tag{14}$$

Это значит, что выполняются неравенства

$$r \geq \sigma, \quad r\lambda_s \geq 1, \quad \frac{r\sqrt{2\ln\operatorname{ch}(\lambda_s\sigma)}}{\sigma} \geq 1. \tag{15}$$

Из последнего неравенства в (15) следует

$$\operatorname{ch}(\lambda_s\sigma) \geq \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2r^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda_s^2}{2}\frac{\sigma^2}{(\lambda_s r)^2}\right\}. \tag{16}$$

Из того, что $\operatorname{ch}(\lambda\sigma) = 1 + \lambda^2\sigma^2/2 + o(\lambda^2)$, а также из (15) и (16) вытекает, что при $0 \leq \lambda \leq \lambda_s$ выполняется

$$\operatorname{ch}(\lambda\sigma) \geq \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\frac{\sigma^2}{(\lambda_s r)^2}\right\}.$$

Так как при $0 \leq \lambda \leq \lambda_s$ выполняется $\lambda\sigma/\lambda_s r \leq \sigma/r \leq 1$, то для этих λ имеем $(\lambda\sigma/\lambda_s r)^2/2 = \varphi^*(\lambda/\lambda_s r/\sigma)$. Таким образом, при $|\lambda| < \lambda_s$

$$\operatorname{ch}(\lambda\sigma) \geq \exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{\lambda_s r/\sigma}\right)\right\}. \tag{17}$$

Из (17), (12) и (13) следует, что при всех $\lambda \geq 0$

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\lambda u)\exp\{-\varphi(u)\}d\varphi(u) \geq \exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\right\},$$

где $\Lambda = \Lambda_1(s) = \max(s, \lambda_s r/\sigma)$.

Лемма 6. *Пусть $\varphi(x)$ — такая N-функция, что $\varphi(x) = x^2/2$ при $|x| < 1$, функция $p(x)$ из $\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(v)dv$ — непрерывна и строго возрастает, функция $\varphi(\sqrt{x})$ — выпукла, ξ_i, $i = \overline{1,n}$, — такие случайные величины, что при любых $\lambda_i \in R^1$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\xi_i\right\} \leq \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\sigma_i^2}\right)\right\}, \tag{18}$$

где $\sigma_i^2 \geq 0$ — некоторые числа.

Тогда при любом $s > 1$

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{s^2r^2\Lambda^2}}\right)\right\} \leq \frac{s^2}{s^2-1}, \tag{19}$$

где $\varphi^*(\cdot)$ — функция, дополнительная к $\varphi(\cdot)$, $r^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, Λ определено в формулировке леммы 5 и замечания 1.

Доказательство. В силу того, что функция $\varphi(\sqrt{x})$ выпукла, имеем

$$\exp\left\{\varphi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\sigma_i^2}\right)\right\} = \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n r^2\lambda_i^2\frac{\sigma_i^2}{r^2}}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{r^2}\varphi\left(\sqrt{r^2\lambda_i^2}\right)\right\} = \prod_{i=1}^n \exp\left\{\varphi(r\lambda_i)\frac{\sigma_i^2}{r^2}\right\}. \tag{20}$$

Воспользуемся тем, что для выпуклых функций $\psi(x)$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется неравенство $\psi(\alpha x) \leq \alpha\psi(x)$.

В силу (20) и (18) получим

$$\mathrm{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\right\} \le \prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\varphi(r\lambda_i)\frac{\sigma_i^2}{r^2}\right\}. \tag{21}$$

Из (21) при любом $s>1$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\right\}\prod_{i=1}^{n}\left(\exp\{-\varphi(rs\lambda_i)\}\,p(rs|\lambda_i|)rs\,d\lambda_i\right) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{\sigma_i^2}{r^2}\varphi(r\lambda_i)-\varphi(rs\lambda_i)\right\}p(rs|\lambda_i|)rs\,d\lambda_i. \tag{22}$$

Так как при $s>1$ $\varphi\left(\sqrt{r^2\lambda_i^2}\right)\le\dfrac{1}{s^2}\varphi(sr\lambda_i)$, то из (22) следует неравенство

$$\mathrm{E}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\lambda_i\xi_i-\varphi(sr\lambda_i)\}\,p(sr|\lambda_i|)sr\,d\lambda_i \le$$

$$\le \prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\varphi(sr\lambda_i)\left(1-\frac{\sigma_i^2}{s^2r^2}\right)\right\}p(sr|\lambda_i|)sr\,d\lambda_i. \tag{23}$$

Из леммы 5 получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\lambda_i\xi_i-\varphi(sr\lambda_i)\}\,p(sr|\lambda_i|)sr\,d\lambda_i =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty}\mathrm{ch}(|\lambda_i||\xi_i|)\exp\{-\varphi(sr\lambda_i)\}\,d\varphi(sr\lambda_i) =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty}\mathrm{ch}\left(|\xi_i|\frac{\lambda_i}{sr}\right)\exp\{-\varphi(\lambda_i)\}\,d\varphi(\lambda_i) \ge$$

$$\ge 2\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\xi_i}{sr\Lambda}\right)\right\}.$$

Таким образом, учитывая вогнутость функции $\varphi^*\left(\sqrt{x}\right)$, находим

$$\mathrm{E}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\lambda_i\xi_i-\varphi(sr\lambda_i)\}\,p(sr|\lambda_i|)sr\,d\lambda_i \ge$$

$$\ge 2^n\,\mathrm{E}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\xi_i}{sr\Lambda}\right)\right\} = 2^n\,\mathrm{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\varphi^*\left(\sqrt{\frac{\xi_i^2}{s^2r^2\Lambda^2}}\right)\right\} \ge$$

$$\ge 2^n\,\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}{s^2r^2\Lambda^2}}\right)\right\}. \tag{24}$$

Далее,

$$\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\varphi(sr\lambda_i)\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{s^2 r^2}\right)\right\} p(sr|\lambda_i|)sr\,d\lambda_i =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\varphi(sr\lambda_i)\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{s^2 r^2}\right)\right\} d\varphi(sr\lambda_i) =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - [\sigma_i^2/(s^2 r^2)]}. \tag{25}$$

Из (23) – (25) следует

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}{s^2 r^2 \Lambda^2}\right)^{1/2}\right)\right\} \le \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - [\sigma_i^2/(s^2 r^2)]}. \tag{26}$$

Из (26) и неравенства $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{2k} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^k$, $k \ge 1$, вытекает

$$\ln \mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}{s^2 r^2 \Lambda^2}\right)^{1/2}\right)\right\} \le$$

$$\le -\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{s^2 r^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_i^2)^k}{k(s^2 r^2)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{2k}}{r^{2k} s^{2k}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} s^{2k} = -\ln(1 - s^{-2}),$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(x)$ — N*-функция Орлича такая, что функция* $p(x)$ *из представления* $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(u)du$ *непрерывна и строго возрастает, а функция* $\varphi(\sqrt{x})$ *выпукла. Пусть* Δ — *семейство строго* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ *случайных величин с определяющей постоянной* C_Δ, $\vec{\xi} \in R^d$ — *вектор, компоненты которого принадлежат семейству* Δ, $B = \mathrm{cov}\vec{\xi}$, A — *симметричная неотрицательно определенная матрица.*

Тогда для всех $s > 1$

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{1}{s\Lambda C_\Delta}\sqrt{\frac{\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}{\mathrm{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}}\right)\right\} \le \frac{s^2}{s^2 - 1}, \tag{27}$$

где Λ — *постоянная, заданная в лемме* 5 (*см. замечание* 1).

Доказательство. Согласно (4) и определению 5 для любого $\vec{\lambda} \in R^d$

$$\mathrm{E}\exp\{(\vec{\lambda}\vec{\xi})\} \le$$

$$\le \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{C_\Delta^2 \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{d} \xi_i \lambda_i\right)^2}\right)\right\} = \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{C_\Delta^2 \vec{\lambda}^T B\vec{\lambda}}\right)\right\}. \tag{28}$$

Предположим теперь, что $\det B > 0$. Пусть R — такая матрица, что $R^2 =$

$= B$, R^{-1} — матрица, обратная к R, O — ортогональная матрица, приводящая матрицу RAR к диагональному виду, т. е. $Z = O^T RARO$ — диагональная матрица с неотрицательными элементами z_i^2.

Положим $\vec{\zeta} = Z^{1/2} O^T R^{-1} \vec{\xi}$. Легко видеть, что $\operatorname{cov} \vec{\zeta} = Z$. Согласно теореме 1 для вектора $\vec{\zeta}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\exp\{\vec{\lambda}\vec{\zeta}\} \le \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{C_\Delta^2 \mathrm{E}(\vec{\lambda}\vec{\zeta})^2}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\varphi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \lambda_i^2 z_i^2 C_\Delta^2}\right)\right\}.$$

Поэтому из леммы 6 следует, что для вектора $\vec{\zeta}$ справедливо соотношение

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\sum_{i=1}^d \zeta_i^2}{s^2\Lambda^2 C_\Delta^2\, \mathrm{E}\sum_{i=1}^d \zeta_i^2}\right)^{1/2}\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\sum_{i=1}^d \zeta_i^2}{s^2\Lambda^2 C_\Delta^2 \sum_{i=1}^d z_i^2}\right)^{1/2}\right\} \le$$

$$\le \frac{s^2}{s^2-1}. \tag{29}$$

Так как $\sum_{i=1}^d \zeta_i^2 = \zeta^T\zeta = \vec{\xi}^T A\vec{\xi}$, то в этом случае из (29) следует утверждение теоремы.

При $\det B = 0$ рассмотрим вектор $\vec{\xi}_\varepsilon = \vec{\xi} + \varepsilon\vec{\eta}$, где $\vec{\eta}$ — вектор, не зависящий от $\vec{\xi}$, $\mathrm{E}\vec{\eta} = 0$, $\operatorname{cov}\vec{\eta} = I$ и компоненты вектора $\vec{\eta}$ — из строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ семейства с определяющей постоянной C_Δ. Поэтому (27) выполняется для вектора $\vec{\xi}_\varepsilon$. А для вектора $\vec{\xi}$ неравенство (27) будет выполняться, если в неравенстве для $\vec{\xi}_\varepsilon$ перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 3 *при* $x > 0$

$$P\left\{\frac{\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}{\Lambda^2 C_\Delta^2 \mathrm{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}} > x\right\} \le \inf_{s>1}\left\{\frac{s^2}{s^2-1}\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\frac{x}{s^2}}\right)\right\}\right\}, \tag{30}$$

а при $x > 1$

$$P\left\{\frac{\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}{\Lambda^2 C_\Delta^2 \mathrm{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}} > x\right\} \le x\exp\left\{-\varphi^*\left(\sqrt{x-1}\right)\right\}. \tag{31}$$

Доказательство. При любом $x > 0$ и $s > 1$ из неравенства Чебышева и (27) имеем

$$P\left\{\frac{\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}{\Lambda^2 C_\Delta^2 \mathrm{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}} > x\right\} \le \frac{\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\dfrac{\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}{s^2\Lambda^2 C_\Delta^2 \mathrm{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}}}\right)\right\}}{\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\dfrac{x}{s^2}}\right)\right\}} \le$$

$$\le \exp\left\{-\varphi^*\left(\sqrt{\frac{x}{s^2}}\right)\right\}\frac{s^2}{s^2-1}; \tag{32}$$

(30) следует из (32), а (31) — из (32), если положить $s^{-2} = 1 - x^{-1}$.

5. Классы Бернштейна последовательностей функций. Пусть $(\Lambda, \mathcal{A}_\Lambda, \mu)$ и $(S, \mathcal{A}_S, \nu)$ — измеримые пространства, $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — σ-конечные меры; Z — некоторое банахово пространство измеримых функций на пространстве $(\Lambda, \mathcal{A}_\Lambda, \mu)$ с нормой $\|\cdot\|_Z$; $L_2(S)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом относительно меры $\nu(\cdot)$, $\|f(s)\|_{L_2(S)} = \left(\int_S |f(s)|^2 d\nu(s)\right)^{1/2}$.

Определение 7. *Последовательность функций* $\{f_k(\lambda),\ k = \overline{1,\infty}\}$, $f_k(\lambda) \in Z$, *принадлежит классу* $B_Z^2 = B_Z^2(\Lambda, S)$, *если существуют*:

1) *последовательность функций* $\{q_k(s),\ k = \overline{1,\infty}\}$ *из* $L_2(S)$;

2) *числовая последовательность* $\{c_n,\ n = \overline{1,\infty}\}$, $0 < c_n < c_{n+1}$, *такая, что для любой числовой последовательности* $\{g_k,\ k = \overline{1,\infty}\}$ *при любом* $n \geq 1$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} g_k f_k(\lambda) \right\|_Z \leq c_n \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k q_k(s) \right\|_{L_2}. \tag{33}$$

Замечание 2. В определении 7 константы c_n — одни и те же для любой последовательности $\{g_k,\ k = \overline{1,\infty}\}$.

Замечание 3. Классы B_Z^2 в случае, когда $(\Lambda, \mathcal{A}_\Lambda, \mu) = (S, \mathcal{A}_S, \nu)$, $f_k(\lambda) = q_k(\lambda)$, в различных формах вводились в [5, 6].

Приведем примеры последовательностей функций, принадлежащих классу B_Z^2.

Пример 2. Пусть $U(x)$ — такая N-функция Орлича, что функция $V(x) = \sqrt{U(x)}$ — выпукла, $L_U(R)$ — пространство Орлича, порожденное функцией $U(x)$ на пространстве $(R, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств на R, μ — мера Лебега.

Пусть $\{f_{\lambda_n}(z),\ n = \overline{1,\infty}\}$ — последовательность функций экспоненциального типа λ_n, ограниченных на действительной оси, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Тогда последовательность $\{f_{\lambda_n}(x),\ n = \overline{1,\infty}\}$, $x \in R$, принадлежит классу $B_Z^2(R, R)$, $q_k(x) = f_{\lambda_k}(x)$, $Z = L_U(R)$, а

$$c_n = \inf_{h>0} \left\{ \left(\sqrt{h}\, U^{(-1)}\left(\frac{1}{h}\right) \right)^{-1} (1 + h\lambda_n) \right\}. \tag{34}$$

В случае, когда $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$, утверждение примера 2 — частный случай теоремы Никольского [16, с. 125]. В общем случае это утверждение следует из результатов работы [17].

Заметим, что если в (34) положить $h = 1/\lambda_n$, то получим

$$c_n \leq \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{U^{(-1)}(\lambda_n)}. \tag{35}$$

Пример 3. Пусть $U(x)$ — такая N-функция Орлича, что функции $\sqrt{U(x)}$ и $U(\sqrt{x})$ — выпуклы, $L_U([-T, T])$ — пространство Орлича, порожденное N-функцией $U(x)$ на пространстве $([0, T], \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств, а μ — мера Лебега.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$X(x) = \lambda \int_0^T R(x, y) X(y) dy, \tag{36}$$

где $R(x, y)$ — непрерывная функция.

Будем предполагать, что множество собственных значений уравнения (36) не более чем счетно и $\lambda_k \geq 0$ (это выполняется, например, когда $R(x, y)$ — ковариационная функция случайного процесса $\xi(x)$, $0 \leq x \leq T$, и в других случаях).

Пусть $\{X_k(x),\ k = \overline{1, \infty}\}$ — ортонормальная система собственных функций уравнения (36) такая, что соответствующие функциям $X_k(x)$ собственные значения λ_k упорядочены по возрастанию $(\lambda_k \leq \lambda_{k+1})$.

Тогда $X_k(x) \in B_Z^2([0, T], [0, T])$, где $Z = L_U([0, T])$, $q_k(x) = X_k(x)$,

$$c_n = \inf_{N \geq 1} \left\{ \left[1 + \tilde{\Delta}\left(\frac{2T}{N}\right) \lambda_n \sqrt{\frac{T}{2}} \right] \frac{\sqrt{N/4T}}{U^{(-1)}(N/4T)} \right\}, \tag{37}$$

где

$$\tilde{\Delta}(h) = \sup_{|z_1 - z_2| < h} \left\{ \int_{-T}^{T} (\tilde{R}(z_1, s) - \tilde{R}(z_2, s))^2 \, ds \right\}^{1/2}, \tag{38}$$

а $\tilde{R}(x, y)$ — четная по x, y функция с периодом $2T$, совпадающая с $R(x, y)$ в области $0 \leq x, y \leq T$.

Заметим, что если в (37) положить $N = [2T / \tilde{\Delta}^{(-1)}(\lambda_n^{-1})] + 1$, то получим

$$c_n = \left(1 + \sqrt{\frac{T}{2}}\right) \frac{\left(\dfrac{1}{2\tilde{\Delta}^{(-1)} \lambda_n^{-1}} + \dfrac{1}{4T}\right)^{1/2}}{U^{(-1)}\left(\dfrac{1}{2\tilde{\Delta}^{(-1)} \lambda_n^{-1}}\right)}. \tag{39}$$

Если $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$, $|\tilde{\Delta}(h)| = c|h|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, то из (39) имеем

$$c_n \leq \left(1 + \sqrt{\frac{T}{2}}\right) 2^{1/p - 1/2} \frac{\left((c\lambda_n)^{1/\alpha} + \dfrac{1}{2T}\right)^{1/2}}{(c\lambda_n)^{1/\alpha p}} \leq \lambda_n^{p - 2/2p\alpha} \check{c}_1, \tag{40}$$

где

$$\check{c}_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{T}{2}}\right) 2^{1/p - 1/2} \frac{1}{c^{1/\alpha p}} \left(c^{1/\alpha} + \frac{1}{2T} \max\left(1, \frac{1}{\lambda_n^{1/\alpha}}\right)\right)^{1/2}.$$

Еще один важный пример последовательностей из классов B_Z^2 будет рассмотрен во второй части работы.

Приведем простое утверждение о классах B_Z^2, которое будем использовать далее.

Лемма 7. *Пусть* $(\Lambda, \mathcal{A}_\Lambda, \mu)$ *и* $(S, \mathcal{A}_S, \nu)$ *— измеримые пространства,* $f(s, \lambda)$ *— измеримая функция на пространстве* $(\Lambda \times S, \mathcal{A}_\Lambda \times \mathcal{A}_S, \mu \times \nu)$, $p \geq 2$. *Если для* ν*-почти всех* s

$$\left(\int_\Lambda |f(s, \lambda)|^p \, d\mu(\lambda) \right)^{1/p} \leq C_\Lambda \left(\int_\Lambda |f(s, \lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) \right)^{1/2}$$

и для μ*-почти всех* λ

$$\left(\int_S |f(s,\lambda)|^p \, d\nu(s) \right)^{1/p} \le C_S \left(\int_S |f(s,\lambda)|^2 \, d\nu(s) \right)^{1/2},$$

то

$$\left(\int_{S\times\Lambda} |f(s,\lambda)|^p \, d(\mu\times\nu) \right)^{1/p} \le C_\Lambda C_S \left(\int_{S\times\Lambda} |f(s,\lambda)|^2 \, d(\mu\times\nu) \right)^{1/2}.$$

1. *Кахан Ж. П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
2. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. – Киев: Наук. думка, 1980. – 239 с.
3. *Козаченко Ю. В.* О равномерной сходимости случайных рядов // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1970. – Вып. 2. – С. 104–110.
4. *Козаченко Ю. В.* Условия равномерной сходимости гауссовских и близких к ним тригонометрических рядов в норме Люксембурга // Там же. – 1983. – Вып. 28. – С. 59–70.
5. *Зелепугина И. Н., Козаченко Ю. В.* О скорости сходимости разложений Карунена–Лоэва гауссовских случайных процессов // Там же. – 1988. – Вып. 38. – С. 41–51.
6. *Козаченко Ю. В., Тригуб С. Г.* Про швидкість збіжності субгауссових випадкових рядів у нормі простору L_p // Теорія ймовірн. та мат. статистика. – 1993. – Вип. 48. – С. 51–66.
7. *Бейсенбаев Е., Козаченко Ю. В.* Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1979. – Вып. 21. – С. 9–23.
8. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 4–35.
9. *Козаченко Ю. В., Енджиргли М. В.* Обгрунтування застосування методу Фур'є до крайових задач з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірн. та мат. статистика. – 1994. – Вип. 51. – С. 78–89.
10. *Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V.* Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions // Random Oper. and Stoch. Eq. – 1995. – **3**, № 3. – P. 201–220.
11. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. В.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
12. *Козаченко Ю. В.* Свойства случайных процессов типа субгауссовских // Докл. АН УССР. – 1984. – № 9. – С. 14–16.
13. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1985. – Вып. 32. – С. 41–51.
14. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы // Там же. – 1987. – Вып. 36. – С. 10–22.
15. *Козаченко Ю. В., Рязанцева В. В.* Достаточные условия равномерной сходимости в пространствах Орлича спектральных разложений стационарных процессов // Избранные задачи современной теории случайных процессов / Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 84–89.
16. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
17. *Зелепугина И. Н., Рязанцева В. В.* О сходимости некоторых субгауссовских случайных рядов в нормах пространства Орлича // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1989. – Вып. 40. – С. 28–36.

Получено 02.07.96