УДК 517. 929

Д. Г. Кореневский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)*,
К. Кайзер (Кельн. ун-т, Германия)

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

We establish sufficient algebraic coefficient conditions of the asymptotic stability of solutions to systems of linear difference equations with continuous time and delay in the case of rational correlation between delays. We use the (n^2+m)-parametric Lyapunov function (n is the dimension of a system of equations and m is the quantity of delays).

Встановлено достатні алгебраїчні коефіцієнтні умови асимптотичної стійкості розв'язків лінійних різницевих рівнянь з неперервним часом і запізненням у випадку раціонального співвідношення між запізненнями. Використовується (n^2+m)-параметрична функція Ляпунова (n — розмірність системи рівнянь, m — кількість запізнень).

В данной работе обобщаются результаты работы [1] об устойчивости решений разностных уравнений с дискретным временем и рациональными соотношениями между запаздываниями (соизмеримыми сдвигами) на новый класс уравнений — разностные уравнения с непрерывным временем и рациональными соотношениями между запаздываниями. Для таких уравнений установлены достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости их решений, которые легко проверяются посредством выполнения конечного числа алгебраических операций.

Условия асимптотической устойчивости сформулированы в терминах матричных алгебраических уравнений Ляпунова; в этом отличие нашего результата от имеющихся в литературе по этой проблеме результатов Дж. Хейла [2] и В. Л. Харитонова [3, 4].

Используются, как и в случае дискретного времени [1], (n^2+m)-параметрические функции Ляпунова в виде линейной комбинации квадратичной формы фазовых переменных в текущий момент времени и m таких же квадратичных форм с фазовыми переменными в сдвинутые влево на величину запаздываний моменты времени (n — размерность системы, m — количество запаздываний).

Возможные приложения полученных результатов — в теории устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений, в теории кодирования информационных сигналов, в распознавании образов, задачах экономики, математических моделях наследственности и экологии и др.

1. Постановка задачи. Рассматриваем начальную задачу для системы линейных разностных уравнений

$$y(t+\tau_0) = A_0\, y(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j\, y\left(t - \tau_j\right), \quad 0 \le t_0 \le t, \tag{1}$$

при начальном условии $y(\theta) = \varphi(\theta)$, $t_0 - \tau_m - \tau_0 \le \theta \le t_0$. Здесь t — время; τ_0 — положительная постоянная, шаг итераций; τ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\tau_0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_m$ — положительные постоянные, называемые запаздываниями и находящиеся в рациональных соотношениях вида $\tau_j = j\tau_0$, $j = 1, \ldots, m$; вектор-функция $y \in \mathbb{R}^n$; постоянные матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $\varphi(\theta)$ — заданная n-мерная вектор-функция.

Под решением задачи (1) понимается n-мерная вектор-функция $y(t; t_0, \varphi)$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Объединенного фонда правительства Украины и Международного научного фонда Дж. Сороса (грант N K 42100, 1995 г.).

обращающая при $t_0 < t$ уравнение (1) в тождество, а при $t < t_0$ совпадающая с $\varphi(\theta)$. Методом шагов можно установить, что решение $y(t; t_0, \varphi)$ существует при $t_0 < t$ и однозначно определяется начальными условиями — моментом времени t_0 и вектор-функцией $\varphi(\theta)$. При этом решение $y(t; t_0, \varphi)$ будет непрерывным на интервале $[t_0 - \tau_m - \tau_0, \infty)$ тогда и только тогда, когда непрерывная вектор-функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(t_0) = A_0 \varphi(t_0 - \tau_0) + \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi(t_0 - \tau_j - \tau_0). \tag{2}$$

Стационарным решением (точкой покоя, точкой равновесия) разностной системы (1) называется решение $y(t; t_0, \varphi) = y_0$, равное постоянному вектору y_0 как на начальном множестве $[t_0 - \tau_m - \tau_0, t_0]$, так и при $t_0 < t$ (аналогия с дифференциально-разностными уравнениями [5, с.115]); очевидно, для этого неоходимо условие (2).

Получим достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), которые представлялись бы алгебраически через коэффициенты системы, т.е. непосредственно через матрицы A_j, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Для решения поставленной задачи ниже, как и в случае дискретного времени [1], применяется функция Ляпунова, строящаяся в виде линейной комбинации — "*квадратичная форма фазовых переменных в текущий момент времени t плюс m таких же квадратичных форм с фазовыми переменными в сдвинутые влево на величину запаздываний τ_j, $j = 1, \ldots, m$, моменты времени*". Матрица квадратичных форм, входящих в такую линейную комбинацию, вычисляется по коэффициентам системы разностных уравнений как положительно определенное решение надлежащего матричного алгебраического уравнения Ляпунова с матрицами размера $n \times n$, а скалярные весовые коэффициенты линейной комбинации, число которых равно количеству запаздываний m, — положительные числа, удовлетворяющие некоторым неравенствам.

2. Некоторые предварительные факты. По аналогии с общепринятой классификацией систем дифференциально-разностных уравнений [2, 5, 6] систему (1) логично отнести к системам нейтрального типа (см. [2, с.38]).

Один из непосредственных источников появления уравнений (1) — дифференциально-разностные уравнения и проблемы, связанные с ними: 1) определение точек покоя дифференциально-разностных уравнений запаздывающего и нейтрального типов (см. [5, гл. 5, §3]); 2) решение систем вполне интегрируемых дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа (см. [7, разд. 3, гл. 1]). Например, дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\frac{dy(t+1)}{dt} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t+1) + cy(t) = 0 \tag{3}$$

при $c = ab$ является вполне интегрируемым. Оно представляется в форме

$$\frac{d}{dt}[y(t+1) + ay(t)] + b[y(t+1) + ay(t)] = 0$$

и его интегрирование приводит к соотношению

$$y(t+1) + ay(t) = \nu e^{-bt}, \tag{4}$$

где ν — постоянная интегрирования. Таким образом, интегрирование однородного дифференциально-разностного уравнения (3) свелось к решению однопараметрического (параметром служит ν) семейства неоднородных разностных уравнений (4). В [7] приведены и другие примеры вполне интегрируемых уравнений нейтрального типа.

Отыскивая решение уравнения (1) в виде экспоненты (т. е. элементарной функции) $y(t) = e^{\lambda t} c_1$, где c_1 — постоянный вектор-столбец, нетрудно установить спектральный критерий асимптотической устойчивости при фиксированных запаздываниях: для асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (1) необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней λ ее характеристического уравнения

$$\det\left(E - e^{-\lambda\tau_0} A_0 - \sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda(\tau_j+\tau_0)} A_j \right) = 0 \tag{5}$$

удовлетворяли условию $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (см., например, [2, с.336 – 341; 3, 4]); здесь E — единичная матрица. Так как критерий (5) получен без каких-либо предположений о соотношении между запаздываниями τ_j, то в общем случае он имеет, как видно из формулы (5), трансцендентный вид.

В случае рационального соотношения между запаздываниями исходную n-мерную систему уравнений с запаздыванием (1) можно свести (путем расширения исходного фазового пространства) к эквивалентной ей $n(m+1)$-мерной системе разностных уравнений без запаздывания аналогично тому, как это было оговорено в [1] для систем разностных уравнений с дискретным временем и рациональным соотношением между запаздываниями. При этом трансцендентность в некотором смысле исчезает и тогда, используя $n(m+1)\times n(m+1)$-параметрическую функцию Ляпунова типа квадратичной формы, можно сформулировать *алгебраический коэффициентный критерий* (*необходимые и достаточные условия*) асимптотической устойчивости решений системы (1) в терминах матричного уравнения Ляпунова с матричными коэффициентами размерности $n(m+1)\times n(m+1)$.

Вместе с тем представляет интерес получить *достаточные алгебраические коэффициентные условия* асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), но такие, которые представлялись бы алгебраически через коэффициенты системы и позволяли иметь дело непосредственно с описывающими систему (1) матрицами A_j, $j = 0, 1, \dots, m$ и уравнениями Ляпунова с матричными коэффициентами размера $n\times n$. Решение данной задачи, разумеется, упростит (по сравнению с критерием) проверку устойчивости решений системы (1).

3. Основной результат. Для получения алгебраических коэффициентных условий будем использовать метод функций Ляпунова. Построим для системы (1) функцию Ляпунова $V(y(t))$ в виде линейной комбинации $m+1$ квадратичных форм переменных $y(t)$ и $y(t-\tau_j)$, $j = 1, \dots, m$:

$$V(y(t)) = y^T(t)\, H\, y(t) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, y^T(t-\tau_j)\, H\, y(t-\tau_j) \tag{6}$$

с неизвестными пока постоянной положительно определенной матрицей H ($H = H^T > 0$) и числами (весовыми коэффициентами) γ_j, $j = 1, \dots, m$. Если нам удастся найти уравнения или неравенства, по которым можно однозначно найти матрицу $H > 0$ и числа $\gamma_j > 0$, то тем самым выбор функции Ляпунова в форме (6) оправдан. Далее в ходе построения будет установлено, что для того, чтобы функция (6) была положительно определенной на решениях $y(t)$ системы (1) и ее первая разность $\Delta V(y(t)) = V(y(t+\tau_0)) - V(y(t))$ на этих решениях была отрицательной величиной (т. е. чтобы V была функцией Ляпунова для системы (1)), искомая матрица H должна определяться из матричного дискретного уравнения Ляпунова для матрицы A_0, а числа γ_j должны быть положительными и меньше единицы, образуя при этом последовательность

$$0 < \gamma_m < \ldots < \gamma_2 < \gamma_1 < 1. \tag{7}$$

Функция (6), как видно из ее структуры, является $(n^2 + m)$-параметрической (n^2 элементов матрицы H и числа γ_j, $j = 1, \ldots, m$).

В соответствии с методом функций Ляпунова исследования устойчивости вычислим первую разность ΔV функции V на решениях системы (1). Имеем

$$\Delta V(y(t))|_{(1)} \equiv \left\{ V\big(y(t+\tau_0)\big) - V(y(t)) \right\}\Big|_{(1)} =$$

$$= \left\{ y^T\big(t+\tau_0\big) H\, y\big(t+\tau_0\big) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, y^T\big(t+\tau_0-\tau_j\big) H\, y\big(t+\tau_0-\tau_j\big) - \right. \tag{8}$$

$$\left. - y^T(t) H\, y(t) - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\, y^T\big(t-\tau_j\big) H\, y\big(t-\tau_j\big) \right\}\Bigg|_{(1)} =$$

Учитывая рациональное соотношение между запаздываниями $\tau_j = j\tau_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, равенство (8) продолжается следующим образом:

$$= \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ \vdots \\ y(t-\tau_m) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ \vdots \\ y(t-\tau_m) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Здесь Q — симметричная размера $nm \times nm$ блочная матрица:

$$Q = \begin{bmatrix} A_0^T H A_0 - (1-\gamma_1) H & A_0^T H A_1 & A_0^T H A_2 & \ldots & A_0^T H A_{m-1} & A_0^T H A_m \\ A_1^T H A_0 & A_1^T H A_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) H & A_1^T H A_2 & \ldots & A_1^T H A_{m-1} & A_1^T H A_m \\ A_2^T H A_0 & A_2^T H A_1 & A_2^T H A_2 - (\gamma_2 - \gamma_3) H & \ldots & A_2^T H A_{m-1} & A_2^T H A_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m-1}^T H A_0 & A_{m-1}^T H A_1 & A_{m-1}^T H A_2 & \ldots & A_{m-1}^T H A_{m-1} - (\gamma_{m-1} - \gamma_m) H & A_{m-1}^T H A_m \\ A_m^T H A_0 & A_m^T H A_1 & A_m^T H A_2 & \ldots & A_m^T H A_{m-1} & A_m^T H A_m - \gamma_m H \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Система (1) асимптотически устойчива, если выполняется неравенство $\Delta V|_{(1)} < 0$, а это возможно лишь тогда, когда квадратичная форма (9) отрицательно определенная. В свою очередь квадратичная форма (9) отрицательно определенная только в том случае, когда отрицательно определенная матрица $Q = Q^T < 0$.

Необходимым условием того, что матрица $Q < 0$, является отрицательная определенность матричных блоков, стоящих на ее главной диагонали,

$$A_0^T H A_0 - (1-\gamma_1) H < 0,$$

$$A_1^T H A_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) H < 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m-1}^T H A_{m-1} - (\gamma_{m-1} - \gamma_m) H < 0, \tag{11}$$

$$A_m^T H A_m - \gamma_m H < 0.$$

Так как, по определению, $H > 0$, то из (11) следует, что коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, m$, должны удовлетворять условию $1 - \gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, $\ldots$, $\gamma_{m-1} - \gamma_m > 0$, $\gamma_m > 0$, или, что то же самое, условию (7). Далее, симметричная блок-матрица $A_0^T H A_0 - (1 - \gamma_1) H$, стоящая на главной диагонали матрицы Q в левом верхнем углу и соответствующая основной фазовой переменной $y(t)$ системы (1), лишь тогда отрицательно определенная, когда существует положительно определенное решение $H > 0$ матричного дискретного уравнения Ляпунова

$$A_0^T H A_0 - (1 - \gamma_1) H = -E. \tag{12}$$

Вид матричного уравнения (12) и ограничение на γ_1 (7) приводят к заключению, что матрица A_0 должна быть сходящейся (модули ее собственных значений меньше единицы) с некоторым запасом сходимости ρ, $0 < \rho < 1$ [8]. Это приводит к неравенствам

$$1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1.$$

Соотношение (12) при выбранном согласно (7) γ_1 служит уравнением для определения неизвестной матрицы H, входящей в функцию Ляпунова (6).

Итак, путем использования функции Ляпунова (6) мы пришли к следующему утверждению.

Теорема (коэффициентные условия асимптотической устойчивости). *Тривиальное решение* $y = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво, если выполнены следующие условия:*

1) *матрица* A_0 — *сходящаяся с некоторым запасом сходимости* ρ ($0 < \rho < 1$);

2) *существует положительно определенное решение* H ($H = H^T > 0$) *матричного дискретного уравнения Ляпунова* (12), *в котором положительное число* γ_1 *удовлетворяет условию* $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$;

3) *имеет место матричное неравенство* $Q < 0$, *в котором последовательность произвольно выбираемых положительных чисел* γ_j *удовлетворяет соотношению* $0 < \gamma_m < \ldots < \gamma_1 < 1$.

4. Алгоритм применения теоремы. 1) Проверяем на сходимость матрицу A_0 и определяем ее запас сходимости ρ. 2) Выбираем числа γ_j согласно соотношению (7) и $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$. 3) Ищем положительно определенное решение H матричного уравнения Ляпунова (12). 4) В случае положительного ответа на условия $1-3$ подставляем матрицу H и числа γ_j в матрицу Q (10) и проверяем ее на отрицательную определенность. Если $Q < 0$, то решения системы (1) асимптотически устойчивы.

5. Замечание. Можно было бы расширить в пространстве параметров системы (1) область асимптотической устойчивости по сравнению с областью, определяемой теоремой, если бы удалось построить функцию V, имеющую в своей конструкции более чем $(n^2 + m)$ свободных параметров. Попытки в качестве V построить $n^2(m+1)$-параметрическую комбинацию квадратичных форм

$$V = y^T(t) H y(t) + \sum_{j=1}^{m} y^T(t-\tau_j) H_j y(t-\tau_j),$$

где H, H_j — неизвестные, подлежащие определению, положительно определенные матрицы, не дают положительного результата, так как нельзя получить уравнения или неулучшаемые неравенства, из которых можно было бы однозначно определить матрицы H_j, $j = 1, \ldots, m$, подобно тому, как из уравнения Ляпунова определяется матрица H.

6. Иллюстративный пример. Рассмотрим систему уравнений второго порядка с двумя запаздываниями $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$:

$$\begin{gathered} y(t+\tau_0) = A_0 y(t) + A_1 y(t-\tau_1) + A_2 y(t-\tau_2), \\ y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \; A_0 = \begin{bmatrix} -0{,}4 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{13}$$

Исследуем асимптотическую устойчивость решений системы (13) при постоянных τ_1 и τ_2 ($\tau_1 = \tau_0$, $\tau_2 = 2\tau_0$). Строим функцию Ляпунова в виде линейной комбинации квадратичных форм:

$$V(y) = y^T(t) H y(t) + \gamma_1 y^T(t-\tau_1) H y(t-\tau_1) + \gamma_2 y^T(t-\tau_2) H y(t-\tau_2), \tag{14}$$

где положительно определенную матрицу H размера 2×2 и положительные числа γ_1 и γ_2 требуется определить. В соответствии со сформулированной выше теоремой для (13) имеем:

1) матрица A_0 — сходящаяся, так как ее собственные значения $\lambda_1(A_0) = 0{,}1$, $\lambda_2(A_0) = 0{,}1$ по модулю меньше единицы, и ее запас сходимости равен $\rho = 0{,}9$;

2) уравнение Ляпунова (12) принимает вид

$$A_0^T H A_0 - (1-\gamma_1) H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

откуда следует, что для разрешимости уравнения (15) в классе положительно определенных матриц ($H > 0$) число γ_1 должно выбираться из интервала $0{,}19 < \gamma_1 < 1$. Положим $\gamma_1 = 0{,}5$, $\gamma_2 = 0{,}2$ ($0{,}19 < \gamma_2 < \gamma_1 < 1$);

3) решая уравнение Ляпунова (15), получаем

$$H = \begin{bmatrix} 5{,}22 & 2{,}63 \\ 2{,}63 & 6{,}23 \end{bmatrix} \quad (>0).$$

Тогда функция Ляпунова принимает вид

$$V = y^T(t) H y(t) + 0{,}5 \cdot y^T(t-\tau_0) H y(t-\tau_0) + 0{,}2 \cdot y^T(t-2\tau_0) H y(t-2\tau_0);$$

4) вычисляя $\Delta V|_{(1)}$, получаем матрицу Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -E & A_0^T H A_1 & A_0^T H A_2 \\ A_1^T H A_0 & A_1^T H A_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) H & A_1^T H A_2 \\ A_2^T H A_0 & A_2^T H A_1 & A_2^T H A_2 - \gamma_2 H \end{bmatrix} =$$

$$
= \left[\begin{array}{rr:rr:rr}
-1 & 0 & -0{,}80 & 0{,}13 & -1{,}16 & -0{,}11 \\
0 & -1 & -0{,}99 & 0{,}14 & -1{,}34 & -0{,}21 \\
\hdashline
-0{,}80 & -0{,}99 & -0{,}54 & -0{,}58 & 0{,}78 & 0{,}67 \\
0{,}13 & 0{,}14 & -0{,}58 & -1{,}70 & 0{,}08 & 0{,}15 \\
\hdashline
-1{,}16 & -1{,}34 & 0{,}78 & 0{,}08 & -0{,}01 & -0{,}32 \\
-0{,}11 & -0{,}21 & 0{,}67 & 0{,}15 & -0{,}32 & -1{,}08
\end{array}\right]. \tag{16}
$$

Нетрудно проверить, что матрица (16) — отрицательно определенная ($Q < < 0$). Следовательно, система (13) асимптотически устойчива при постоянных запаздываниях τ_1 и τ_2.

1. *Кореневский Д.Г.* К асимптотической устойчивости решений систем линейных детерминированных и стохастических стационарных разностных уравнений с запаздыванием // Докл. АН СССР. – 1992. – **322**, №2. – С.219 – 223.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
3. *Харитонов В.Л.* Глобальная устойчивость по сдвигам возмущенных систем разностных уравнений // Автоматика (Киев). – 1991. – №3. – С.3 – 8.
4. *Харитонов В.Л.* О сохранении свойства глобальной устойчивости по сдвигам при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №5. – С.26 – 30.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1964. – 127 с.
6. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
7. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
8. *Кореневский Д.Г.* Алгебраический коэффициентный критерий сходимости "с запасом" (экспоненциальной устойчивости) решений линейных стационарных разностных уравнений // Докл. АН СССР. – 1990. – **313**, №6. – С.1320 – 1323.

Получено 16.05.96