УДК 517.96

С. А. Кругляк (Киев. ин-т управления и связи),
Ю. С. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)*

СТРУКТУРНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ИДЕМПОТЕНТОВ

For $*$-algebras generated by idempotents and orthoprojectors, we study the complexity of problem of describing $*$-representations to within the unitary equivalency. In particular, we prove that the $*$-algebra generated by two orthogonal idempotents is $*$-wild as well as the $*$-algebra generated by three orthoprojectors two of which are orthogonal.

Для $*$-алгебр, породжених ідемпотентами та ортопроекторами, вивчається складність задачі опису $*$-зображень з точністю до унітарної еквівалентності. Зокрема, доводиться, що $*$-алгебра, породжена двома ортогональними ідемпотентами, та $*$-алгебра, породжена трьома ортопроекторами, два з яких ортогональні, є $*$-дикими.

В многочисленных приложениях (см., например, [1] и приведенную там библиографию) возникает необходимость изучения семейств ограниченных проекторов $\{Q_k\}_{k=1}^n$ (но, вообще говоря, не ортопроекторов), т. е. идемпотентов в алгебре $L(H)$ ограниченных линейных операторов в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H. В настоящей статье изучаем задачу описания идемпотентов $Q_1, \ldots, Q_n$, не связанных между собой соотношениями (п. 2 и 4) и попарно ортогональных $(Q_iQ_j = 0,\ i \neq j)$.

Для пары ортопроекторов (пары подпространств в H) такое описание приведено в [2], для бесконечномерного H — в [3, 4] и др. В п. 2 на языке теории представлений изложены (известные в конечномерной ситуации, см. [5, 6]) результаты описания одного идемпотента с точностью до унитарной эквивалентности.

В п.3, основываясь на работах [7 – 10] и следуя [11], приведено определение $*$-дикости (с точки зрения теории $*$-представлений) $*$-алгебр. Там же дано более простое, по сравнению с [7], доказательство того, что $*$-алгебра (и C^*-алгебра $C^*(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2)$), порожденная тремя ортопроекторами, два из которых ортогональны (задача унитарного описания троек ортопроекторов P_1, P_2, P_3 таких, что $P_1P_2 = 0$), является $*$-дикой. В п. 4 доказывается, что $*$-алгебра, порожденная парой идемпотентов и, более того, $*$-алгебра, порожденная идемпотентом и ортопроектором (задача унитарного описания пар, состоящих из идемпотента и ортопроектора), — $*$-дикая.

В п. 5 доказывается, что описание пар ортогональных идемпотентов — $*$-дикая задача. Как следствие задача унитарного описания пар коммутирующих идемпотентов (подобный результат для описания пар коммутирующих матриц с точностью до подобия см. [12]) и унитарного описания разложений единицы в сумму попарно ортогональных идемпотентов $Q_1, \ldots, Q_n$ при $n \geq 3$ — также $*$-дикие задачи.

Отметим, что близкие к тематике статьи вопросы рассмотрены в [13].

1. Определения и обозначения. Рассматриваем задачу описания семейств идемпотентов $Q_1, \ldots, Q_n$ с точностью до унитарной эквивалентности. Как обычно, два семейства операторов $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ в H и $\{\tilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ в $\tilde{H}$ унитарно эквивалентны, если существует унитарный оператор $U\colon H \to \tilde{H}$ такой, что

* Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Министерства Украины по вопросам науки и технологий.

$$UX_\alpha = \tilde{X}_\alpha U, \qquad \alpha \in \Lambda.$$

Это описание естественно вести в рамках теории представлений $*$-алгебр, связав с идемпотентами $\{Q_k\}_{k=1}^n$ $*$-алгебру $\mathfrak{Q}_n$, фактор-алгебру свободной $*$-алгебры, порожденной образующими $q_1, \ldots, q_n$, $q_1^*, \ldots, q_n^*$, по двустороннему $*$-идеалу, порожденному соотношениями $q_k^2 = q_k$, $\left(q_k^*\right)^2 = q_k^*$, $k = 1, \ldots, n$. В дальнейшем $*$-алгебру $\mathfrak{A}$, заданную образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_1^*, $x_2^*, \ldots$ $\ldots, x_n^*$ и соотношениями $P_l(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, m$, обозначаем

$$\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \mid P_l(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, m\rangle,$$

предполагая, что кроме указанных в скобках соотношений выполняются и все соотношения, полученные из указанных применением $*$.

Под представлением $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ будем понимать ее $*$-гомоморфизм $\pi : \mathfrak{A} \to L(H)$ в $*$-алгебру $L(H)$ ограниченных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H. Rep $\mathfrak{A}$ — категория, объекты которой — представления алгебры $\mathfrak{A}$, а морфизмы — сплетающие операторы. По любому представлению π $*$-алгебры

$$\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \mid P_l(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, m\rangle$$

определяется семейство ограниченных операторов $\{X_k\} = \{\pi(x_k)\}$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$, таких, что

$$P_l(X_1, \ldots, X_n, X_1^*, \ldots, X_n^*) = 0, \qquad l = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Обратно, задание семейства операторов $\{X_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, таких, что $P_l(X_1, \ldots, X_n, X_1^*, \ldots, X_n^*) = 0$, $l = 1, \ldots, m$, однозначно определяет представление всей $*$-алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, задача унитарного описания семейств операторов $\{X_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, связанных соотношениями (1), есть задача описания с точностью до унитарной эквивалентности представлений $*$-алгебры $\mathfrak{A}$.

Ниже будем рассматривать задачи унитарной классификации представлений следующих $*$-алгебр (и соответственно задачи унитарной классификации следующих семейств операторов):

1) $\mathfrak{S}_n = \mathbb{C}\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_i = a_i^*,\ i = 1, \ldots, n\rangle$ (задача классификации семейств из n самосопряженных операторов);

2) $\mathfrak{U}_n = \mathbb{C}\langle u_1, \ldots, u_n \mid u_i u_i^* = u_i^* u_i = e,\ i = 1, \ldots, n\rangle$ (задача классификации семейств из n унитарных операторов);

3) $\mathfrak{P}_n = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_i^2 = p_i = p_i^*,\ i = 1, \ldots, n\rangle$ (задача классификации семейств из n ортопроекторов);

4) $\mathfrak{C} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_i^2 = p_i = p_i^*,\ i = 1, 2, 3;\ p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0\rangle$ (задача классификации троек ортопроекторов, два из которых ортогональны);

5) $\mathfrak{Q}_n = \mathbb{C}\langle q_1, \ldots, q_n \mid q_i^2 = q_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle$ (задача классификации семейств из n идемпотентов);

6) $\mathfrak{D} = \mathbb{C}\langle q, p \mid q^2 = q,\ p^2 = p = p^*\rangle$ (задача классификации пары операторов, из которых один оператор — идемпотент, второй ортопроектор);

7) $\mathfrak{Q}_{n\perp} = \mathbb{C}\langle q_1, \ldots, q_n \mid q_i^2 = q_i,\ i = 1, \ldots, n;\ q_i q_j = 0$ при $i \neq j \rangle$ (задача классификации семейств из n взаимно ортогональных идемпотентов);

Следуя общей идеологии теории представлений $*$-алгебр, попытаемся решить задачу унитарного описания $*$-представлений алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью описания ее неприводимых представлений и всех представлений как интеграла неприводимых; представление π $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ неприводимо, если в H не существует нетривиального подпространства, инвариантного относительно операторов представления $\pi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

2. Унитарное описание одного идемпотента. Для представлений $*$-алгебры $\mathfrak{P}_2 = \mathbb{C}\langle p_1, p_2 \mid p_1^* = p_1 = p_1^2,\ p_2^* = p_2 = p_2^2 \rangle$ (пары ортопроекторов P_1, P_2) имеет место структурная теорема (см., например, [4] и др.), дающая разложение представлений в прямую сумму (или интеграл) неприводимых представлений, которые лишь одномерны и двумерны, и с точностью до унитарной эквивалентности совпадают с одним из перечисленных:

1) четыре одномерных: $\pi_{(0,0)}(p_1) = \pi_{(0,0)}(p_2) = 0$; $\pi_{(0,1)}(p_1) = 0$, $\pi_{(0,1)}(p_2) = 1$; $\pi_{(1,0)}(p_1) = 1$, $\pi_{(1,0)}(p_2) = 0$; $\pi_{(1,1)}(p_1) = \pi_{(1,1)}(p_2) = 1$;

2) серия двумерных, зависящих от $\phi \in (0, \pi/2)$:

$$\pi_\phi(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\phi(p_2) = \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix}.$$

Один из возможных путей доказательства такой теоремы — непосредственная проверка равенства

$$\mathfrak{P}_2 = \mathbb{C}\langle a, b \mid a = a^*,\ b = b^*;\ \{a, b\} = ab + ba = 0;\ a^2 + b^2 = e \rangle,$$

где $a = p_1 - p_2$, $b = e - p_1 - p_2$, и использование результатов [14, 15] о структуре пар антикоммутирующих самосопряженных операторов.

Ситуация подобна и для одного идемпотента. Рассмотрим $*$-алгебру $\mathfrak{Q}_1$, порожденную парой взаимно сопряженных идемпотентов q_1 и q_1^*. Пусть $q_1 = a_1 + ib_1$, $q_1^* = a_1 - ib_1$, где $a_1^* = a_1$, $b_1^* = b_1$. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 1. *$*$-алгебра $\mathfrak{Q}_1$ совпадает с алгеброй*

$$\mathbb{C}\langle a, b \mid a = a^*,\ b = b^*;\ \{a, b\} = ab + ba = 0;\ a^2 - b^2 = e \rangle,$$

где $a = 2\left(a_1 - \frac{1}{2}e\right)$, $b = 2b_1$.

Утверждение 2. *Неприводимые представления алгебры $\mathfrak{Q}_1$ с точностью до унитарной эквивалентности совпадают с одним из перечисленных*:

1) *два одномерных*: $\pi_0(q_1) = Q_1 = 0$ *и* $\pi_1(q_1) = Q_1 = 1$;

2) *серия двумерных, зависящих от точек ветви гиперболы* $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2 - y^2 = 1\}$:

$$\pi_{(x,y)}(q_1) = Q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + x & iy \\ iy & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Неприводимые пары антикоммутирующих самосопряженных операторов (см. [14, 15]) с точностью до унитарной эквивалентности следующие:

1) одномерны $A = x$, $B = y$ и задаются точками множества

$$K_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \};$$

2) двумерны и задаются точками множества

$$\mathbb{R}^2_+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0 \}$$

по формулам

$$A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При дополнительном условии $A^2 - B^2 = I$ неприводимые пары A, B с точностью до унитарной эквивалентности следующие:

1) две одномерные пары: $A = \pm 1$, $B = 0$;

2) серия двумерных, зависящих от точек ветви гиперболы $K_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2 - y^2 = 1 \}$:

$$A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 2 теперь непосредственно следует из равенств $a_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}e$, $b_1 = \frac{b}{2}$.

Идемпотент $\pi_{(x,y)}(q_1)$ $(x^2 = 1 + y^2,\ x > 0,\ y > 0)$ унитарно эквивалентен идемпотенту $\pi_y(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, что доказывает следующее утверждение.

Утверждение 2′. *Неприводимые представления алгебры* $\mathfrak{Q}_1$ *с точностью до унитарной эквивалентности совпадают с одним из перечисленных*:

1) *два одномерных* $\pi_0(q_1) = 0$ *и* $\pi_1(q_1) = 1$;

2) *серия двумерных, зависящих от параметра* $y > 0$:

$$\pi_y(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Раскладывая представление алгебры $\mathfrak{Q}_1$ в конечномерном пространстве H в прямую сумму неприводимых, получаем структурную теорему (см. [5, 6]) для унитарного описания идемпотентов в конечномерном случае.

Сформулируем структурную теорему, дающую описание любого ограниченного идемпотента в виде интеграла неприводимых в любом сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Теорема 1. *Любому ограниченному идемпотенту* $Q = Q^2$ *в* H *однозначно отвечает разложение*

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes H_2)$$

и ортогональная проекторнозначная мера $dE(\cdot)$, *сосредоточенная на ограниченном подмножестве в* $K_2 = \{ (x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x^2 - y^2 = 1 \}$ *со значениями в ортопроекторах на подпространстве в* H_2, *такие, что*

$$Q_1 = 0I_{H_0} \oplus I_{H_1} \oplus \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_{H_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \int\limits_{K_2} x\,dE(x,y) + \right.$$

$$\left. + i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \int\limits_{K_2} y\,dE(x,y) \right] =$$

$$= 0I_{H_0} \oplus I_{H_1} \oplus \frac{1}{2}\int\limits_{K_2} \begin{pmatrix} 1+x & iy \\ iy & 1-x \end{pmatrix} \otimes dE(x,y).$$

Доказательство следует из структурной теоремы [14, 15] для пары антикоммутирующих самосопряженных операторов $A, B \in L(H)$, т. е. таких, что $\{A, B\} = AB + BA = 0$, учета условия $A^2 - B^2 = I$ и равенства

$$Q_1 = \frac{1}{2}[I + A + iB].$$

Переходя в теореме 1 к интегралу по представлениям π_y, получаем следующую теорему.

Теорема 1′. *Любому ограниченному идемпотенту* $Q = Q^2$ *в* H *однозначно отвечает разложение* $H = H_0 \oplus H_1 \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes H_2)$ *и ортогональная проекторнозначная мера* $dE(\cdot)$, *сосредоточенная на ограниченном подмножестве в* $(0, +\infty)$ *со значениями в ортопроекторах на подпространстве в* H_2, *такие, что*

$$Q_1 = 0I_{H_0} \oplus I_{H_1} \oplus \begin{pmatrix} I_{H_2} & \int_0^\infty y\,dE(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0I_{H_0} \oplus I_{H_1} \oplus \int\limits_0^\infty \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes dE(y).$$

Здесь мы не останавливаемся на задаче описания обертывающей C^*-алгебры, порожденной одним идемпотентом, а также C^*-алгебры и W^*-алгебры, порожденной оператором представления Q_1, которая подобна описанию соответствующих C^*- и W^*-алгебр для пары ортопроекторов (см., например, [16, 17]).

3. Отношение мажорирования и $*$-дикие $*$-алгебры. Прежде чем переходить к задаче унитарного описания пар идемпотентов, изложим определения и некоторые результаты, связанные с идеологией и методологией $*$-дикости. В теории представлений алгебр было предложено [18] считать задачу теории представлений дикой, если она содержит в себе стандартную сложную задачу теории представлений: задачу описания пар матриц без соотношений с точностью до подобия. Для определения аналога дикости для $*$-алгебр ($*$-дикости) в [7] в качестве стандартной сложной задачи теории $*$-представлений $*$-алгебр предложено выбрать задачу описания пар самосопряженных (или унитарных) операторов (свободной $*$-алгебры $\mathfrak{S}_2$ (или $\mathfrak{U}_2$), порожденной парой самосопряженных (или унитарных) образующих) с точностью до унитарной эквивалентности и получены основания считать задачи, содержащие стандартную сложную задачу, $*$-дикими: доказывается, что эти задачи содержат подзадачу описания $*$-представлений любой аффинной $*$-алгебры.

Приведем точные определения, примеры и необходимые для дальнейшего утверждения.

В дальнейшем будем предполагать, что алгебра имеет единицу, присоединяя ее в противном случае.

***Определение* 1.** *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ *— ∗-алгебры. Пара* $(\tilde{\mathfrak{A}}, \phi : \mathfrak{A} \to \tilde{\mathfrak{A}})$, *где* ϕ *— унитальный гомоморфизм ∗-алгебр, называется обертывающей алгеброй алгебры* $\mathfrak{A}$, *если для любого представления* $\pi : \mathfrak{A} \to L(H)$ *существует единственное представление* $\tilde{\pi} : \tilde{\mathfrak{A}} \to L(H)$ *такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{A}} \arrow[dr, "\tilde{\pi}"] & \\ \mathfrak{A} \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\pi"] & L(H) \end{tikzcd}$$

коммутативна, и любой оператор A, *сплетающий два представления* π_1 *и* π_2 *алгебры* $\mathfrak{A}$, *сплетает и представления* $\tilde{\pi}_1$ *и* $\tilde{\pi}_2$ *алгебры* $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Заметим, что если $\mathfrak{A}$ — полупростая алгебра, то ϕ — мономорфизм. Действительно, если $a \in \ker \phi$, то $\pi(a) = \tilde{\pi}\phi(a) = \tilde{\pi}(0) = 0$ при любом ∗-представлении π алгебры $\mathfrak{A}$, а значит, a принадлежит радикалу $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}$. Поскольку $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A} = 0$, то $a = 0$ и $\ker \phi = 0$.

Заметим также, что для проверки факта, что $(\tilde{\mathfrak{A}}, \phi)$ — обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{A}$, достаточно рассматривать только унитальные представления алгебры $\mathfrak{A}$.

Приведем примеры обертывающих ∗-алгебр, встречающиеся в дальнейшем:

1) $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, ϕ — тождественное отображение;

2) пусть Σ — любое множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$, переходящих в обратимые операторы при любом представлении $\pi : \mathfrak{A} \to L(H)$. $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}[\Sigma^{-1}]$ — алгебра частных (см. [19]) алгебры $\mathfrak{A}$ по множеству Σ, ϕ — естественное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}[\Sigma^{-1}]$;

3) $\mathfrak{A}$ — звездно-ограниченная ∗-алгебра, $\tilde{\mathfrak{A}}$ — ее обертывающая C^*-алгебра, ϕ — канонический ∗-гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\tilde{\mathfrak{A}}$, заданный точным представлением (см., например, [20]).

Функтор $T : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ из категории $\mathcal{R}_1$ в категорию $\mathcal{R}_2$ состоит из отображения объектов $A \to TA$ и отображения морфизмов $T (= T_{A,B})$: $\mathcal{R}_1(A, B) \to \mathcal{R}_2(TA, TB)$, сохраняющего произведения морфизмов и тождественные морфизмы. Напомним, что функтор T называется *строгим* (соответственно *полным*), если отображение $T_{A,B}$ инъективно (соответственно сюръективно) для любых A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{R}_1$.

Пусть $M_n(\mathfrak{A})$ — матричная алгебра над $\mathfrak{A}$ с естественным образом заданной ∗-структурой. Любое представление $\pi : \mathfrak{A} \to L(H)$ индуцирует представление $\tilde{\pi}_n : \tilde{M}_n(\mathfrak{A}) \to L(H \oplus H \oplus \cdots \oplus H)$. Если $\psi : \mathfrak{B} \to \tilde{M}_n(\mathfrak{A})$ — ∗-гомоморфизм алгебр, то естественным образом строится функтор $F_\psi : \mathrm{Rep}(\mathfrak{A}) \to$ $\to \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$. По определению, $F_\psi(\pi) = \tilde{\pi}_n \circ \psi$, и если $\alpha : \pi \to \pi_1$ — морфизм представлений, то $F_\psi(\alpha) = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$.

***Определение* 2.** *∗-алгебра* $\mathfrak{B}$ *мажорирует ∗-алгебру* $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B} > \mathfrak{A})$, *если существуют* $n \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$, *обертывающая алгебру* $M_n(\mathfrak{A})$ *алгебра*

$\tilde{M}_n(\mathfrak{A})$ *и* $*$*-гомоморфизм* $\psi : \mathfrak{B} \to \tilde{M}_n(\mathfrak{A})$ *такие, что функтор* $F_\psi : \operatorname{Rep}(\mathfrak{A}) \to \operatorname{Rep}(\mathfrak{B})$ *строгий и полный.*

В этом случае будем говорить, что задача унитарной классификации представлений $*$-алгебры $\mathfrak{B}$ содержит в себе в качестве подзадачи задачу унитарной классификации представлений алгебры $\mathfrak{A}$, или что задача классификации представлений алгебры $\mathfrak{B}$ не проще аналогичной задачи для $\mathfrak{A}$. Из определения следует, что два представления π_1 и π_2 алгебры $\mathfrak{A}$ унитарно эквивалентны (неприводимы) тогда и только тогда, когда унитарно эквивалентны (неприводимы) представления $F_\psi(\pi_1)$ и $F_\psi(\pi_2)$.

Легко видеть, что мажорирование есть отношение квазипорядка для $*$-алгебр. Заметим также, что если алгебра $\tilde{\mathfrak{A}}$ — обертывающая алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} \succ \tilde{\mathfrak{A}}$.

Если $\mathfrak{A}$ является C^*-алгеброй, то любая ее обертывающая алгебра $\tilde{\mathfrak{A}}$ совпадает с $\mathfrak{A}$, так что в определении мажорирования для C^*-алгебр достаточно рассматривать $*$-гомоморфизмы $\psi : \mathfrak{B} \to M_n(\mathfrak{A})$ в матричную алгебру над алгеброй $\mathfrak{A}$.

Следующая теорема по существу доказана в [7].

Теорема 2. $\mathfrak{S}_2 \succ \mathfrak{S}_m$ *при любом* $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В качестве $\tilde{\mathfrak{S}}_m$ возьмем саму алгебру $\mathfrak{S}_m = \mathbb{C}\langle b_1, \ldots \ldots, b_m \mid b_i = b_1^*,\ i = 1, \ldots, m\rangle$, $n = m + 2$. Определим гомоморфизм $\psi : \mathfrak{S}_2 \to \to M_{m+2}(\mathfrak{S}_m)$ следующим образом:

$$\psi(a_1) = \begin{bmatrix} e & & & & & & \\ & \frac{1}{2}e & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{3}e & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \frac{1}{m}e & & \\ & 0 & & & & \frac{1}{m+1}e & \\ & & & & & & \frac{1}{m+2}e \end{bmatrix},$$

$$\psi(a_2) = \begin{bmatrix} 0 & e & b_1 & & & & \\ e & 0 & e & b_2 & & 0 & \\ b_1 & e & 0 & e & \ddots & & \\ & b_2 & e & \ddots & & b_{m-1} & \\ & & \ddots & & 0 & e & b_m \\ & 0 & & b_{m-1} & e & 0 & e \\ & & & & b_m & e & 0 \end{bmatrix}.$$

Строгость и полнота функтора F_ψ проверяется непосредственно.

Теорема 2 позволяет говорить, что задача унитарной классификации пар самосопряженных операторов содержит в себе в качестве подзадачи задачу унитарной классификации представлений любой $*$-алгебры со счетным числом образующих (так как эти образующие всегда можно выбрать самосопряженными).

***Следствие* 1.** *$*$-алгебра $\mathfrak{S}_2 > \mathfrak{U}_m$ при любом $m = 1, 2, 3, \ldots$.*

Теорема 3. *$*$-алгебра $\mathfrak{U}_2 > \mathfrak{S}_2$.*

Доказательство. В качестве обертывающей алгебры $\tilde{\mathfrak{S}}_2$ возьмем алгебру частных алгебры $\mathfrak{S}_2$ по множеству

$$\Sigma = \{a_1 - ie, a_1 + ie, a_2 - ie, a_2 + ie\}, \quad n = 1,$$

$$\psi(u_1) = (a_1 - ie)(a_1 + ie)^{-1}, \quad \psi(u_2) = (a_2 - ie)(a_2 + ie)^{-1}$$

(преобразование Кэли). Дальнейшее доказательство очевидно.

Теоремы 2, 3 позволяют за эталон сложности для задач унитарной классификации представлений $*$-алгебр выбрать задачу унитарной классификации представлений алгебры $\mathfrak{U}_2$ или, что то же самое, ее обертывающей C^*-алгебры $C^*(\mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_2$ — свободная группа с двумя образующими.

***Определение* 3.** *$*$-алгебра $\mathfrak{A}$ называется $*$-дикой, если $\mathfrak{A} > C^*(\mathcal{F}_2)$.*

$*$-дикой является, в частности, задача описания с точностью до унитарной эквивалентности семейств ортопроекторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ при $n \geq 3$. Более того, в [7] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть*

$$\mathfrak{C} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_i^* = p_i, \; p_i^2 = p_i, \; p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0 \rangle,$$

$\mathfrak{C} > C^*(\mathcal{F}_2)$, т. е $\mathfrak{C}$ является $*$-дикой.

Доказательство этой теоремы проще, чем в [7]. Пусть

$$E_k = \underbrace{\begin{bmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{bmatrix}}_{k \text{ раз}}, \quad e \text{ — единица алгебры } C^*(\mathcal{F}_2),$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} E_4 \\ 0_{3\times 4} \\ 0_{5\times 4} \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0_{4\times 3} \\ E_3 \\ 0_{5\times 3} \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix},$$

где

$$A_1 = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3e & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} e & 0 & e & e & e \\ 0 & 2e & e & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & u_2 \end{bmatrix},$$

u_1, u_2 — образующие алгебры $C^*(\mathcal{F}_2)$, $A_3 = \sqrt{E_5 - A_1^* A_1 - A_2^* A_2}$. N выбирается так, чтобы в $M_5(C^*(\mathcal{F}_2))$ выполнялось $\|A_1^* A_1 + A_2^* A_2\| < 1$. Тогда $J_1^* J_1 = E_4$, $J_2^* J_2 = E_3$ и $J_3^* J_3 = E_4$. Из этого следует, что $(J_i J_i^*)^2 = J_i J_i^*$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, так как $J_1^* J_2 = 0$ и $J_2 J_1^* = 0$, то

$$\left(J_1 J_1^*\right)\left(J_2 J_2^*\right) = \left(J_2 J_2^*\right)\left(J_1 J_1^*\right) = 0.$$

Положим $\psi(p_i) = J_i J_i^*$; ψ определяет гомоморфизм $*$-алгебры $\mathfrak{C}$ в $M_{14}(C^*(\mathcal{F}_2))$. Строгость и полнота функтора $F_\psi\colon \mathrm{Rep}\,(\mathfrak{C}) \to \to \mathrm{Rep}\,(C^*(\mathcal{F}_2))$ проверяется непосредственно.

***Следствие* 2.** *Алгебра* $\mathfrak{P}_n$, $n \geq 3$ (*задача об унитарном описании* n *ортопроекторов при* $n \geq 3$) — $*$-*дикая.*

4. Унитарное описание пар идемпотентов — $*$-дикая задача. Рассмотрим задачу унитарного описания пар идемпотентов Q_1, Q_2 ($Q_1^2 = Q_1$, $Q_2^2 = = Q_2$). То, что задачи унитарного описания пар идемпотентов относятся к сложным задачам, давно известно. Докажем соответствующую теорему, показав при этом, что даже при дополнительном ограничении самосопряженности одного из идемпотентов (один из идемпотентов есть ортопроектор) задача не становится легче.

Теорема 5. *Пусть*

$$\mathfrak{Q}_2 = \mathbb{C}\langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_1,\ q_2^2 = q_2\rangle, \qquad \mathfrak{D} = \mathbb{C}\langle q, p \mid q^2 = q,\ p^2 = p = p^*\rangle,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \mathbb{C}\langle a_1, a_2 \mid a_1 = a_1^*,\ a_2 = a_2^*\rangle.$$

Тогда $\mathfrak{Q}_2 \succ \mathfrak{D} \succ \mathfrak{S}_2$, *так что* $*$-*алгебры* $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{D}$ — $*$-*дикие.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{D}$ — фактор-алгебра алгебры $\mathfrak{Q}_2$, то $\mathfrak{Q}_2 \succ \succ \mathfrak{D}$ (в качестве обертывающей для $\mathfrak{D}$ выбираем саму алгебру $\mathfrak{D}$, $n = 1$, $\psi\colon \mathfrak{Q}_2 \to \mathfrak{D}$ — естественный эпиморфизм алгебры на фактор-алгебру).

Покажем, что $\mathfrak{D} \succ \mathfrak{S}_2$. Построим гомоморфизм $\psi\colon \mathfrak{D} \to M_2(\mathfrak{S}_2)$:

$$\psi(q) = \begin{pmatrix} e & a_1 + i a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что соответствующий функтор $F_\psi\colon \mathrm{Rep}\,\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Rep}\,\mathfrak{D}$ строгий и полный.

***Следствие* 3.** *Алгебра* $\mathfrak{Q}_n$ *при* $n \geq 2$ (*задача унитарного описания семейств из* n *идемпотентов при* $n \geq 2$) — $*$-*дикая.*

***Замечание* 1.** В статье [1, п. 4] изучается алгебра, порожденная идемпотентом q и $2N$ взаимно ортогональными идемпотентами p_i такими, что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{2N} = e,$$

$$q(p_{2i-1} + p_{2i})q = (p_{2i-1} + p_{2i})q,$$

$$(e-q)(p_{2i} + p_{2i+1})(e-q) = (p_{2i} + p_{2i+1})(e-q)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N;\ e_{2N+1} = e_1);$$

$*$-алгебра

$$\mathfrak{M}_{2N} = \langle q, p_i = p_i^*\ (i = 1, \ldots, 2N) \mid \textstyle\sum_{i=1}^{2N} p_i = e,$$

$$q(p_{2j-1} + p_{2j})q = (p_{2j-1} + p_{2j})q,$$

$$(e-q)(p_{2j} + p_{2j+1})(e-q) = (p_{2j} + p_{2j+1})(e-q);\ j = 1, \ldots, N\rangle$$

является $*$-дикой, так как $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{D}$.

5. Семейства попарно ортогональных идемпотентов. Покажем, что $*$-алгебра $\mathfrak{Q}_{n\perp}$ (задача унитарной классификации семейства попарно ортогональных идемпотентов $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, $Q_i Q_j = 0$ при $i \neq j$) является $*$-дикой при $n \geq 2$.

Теорема 6. *Пусть*

$$\mathfrak{Q}_{2,\perp} = \mathbb{C}\langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_1,\ q_2^2 = q_2, q_1 q_2 = q_2 q_1 = 0\rangle,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \mathbb{C}\langle a_1, a_2 \mid a_1 = a_1^*,\ a_2 = a_2^*\rangle.$$

Тогда $\mathfrak{Q}_{2,\perp} \succ \mathfrak{S}_2$, *т. е.* $\mathfrak{Q}_{2,\perp}$ — *дикая* $*$-*алгебра.*

Доказательство. Определим гомоморфизм $\psi: \mathfrak{Q}_{2\perp} \to M_3(\mathfrak{S}_2)$ следующим образом:

$$\psi(q_1) = \begin{bmatrix} e & e & a_1 + i a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\psi(q_2) = \begin{bmatrix} 0 & -e & -e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнение соотношений $[\psi(q_k)]^2 = \psi(q_k)$, $k = 1, 2$, $\psi(q_1)\psi(q_2) = \psi(q_2)\psi(q_1) = 0$, а также строгость и полнота функтора F_ψ: $\mathrm{Rep}\,\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Rep}\,\mathfrak{Q}_{2,\perp}$ проверяется непосредственно.

Следствие 4. *Задача унитарной классификации пар коммутирующих идемпотентов — $*$-дикая.*

Следствие 5. *$*$-алгебра* $\mathfrak{Q}_{n,\perp} = \mathbb{C}\langle q_1, \dots, q_n \mid q_i^2 = q_i,\ i = 1, \dots, n;\ q_i q_j = 0$ *при* $i \neq j\rangle$ (*задача унитарной классификации* n *попарно ортогональных идемпотентов*) — *$*$-дикая при* $n \geq 2$.

Следствие 6. *$*$-алгебра* $\mathbb{C}\langle q_1, \dots, q_n \mid q_i^2 = q_i,\ i = 1, \dots, n;\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = e\rangle$ (*задача унитарной классификации* n *идемпотентов* $Q_1, \dots, Q_n$ *таких, что* $Q_1 + \dots + Q_n = I$) — *$*$-дикая при* $n \geq 3$.

Доказательство. При $n = 3$ условие $q_1 + q_2 + q_3 = e$ влечет взаимную ортогональность идемпотентов q_1, q_2, q_3. Тогда рассматриваемая алгебра совпадает с $\mathfrak{Q}_{2,\perp}$.

Следствие 7. *Пусть* $\mathfrak{A}_{R_3} = \mathbb{C}\langle x \mid R_3(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (x - \alpha_1 e)(x - \alpha_2 e)(x - \alpha_3 e) = 0,$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C},\ \alpha_k \neq \alpha_l$ *при* $k \neq l\rangle$. *Тогда* $\mathfrak{A}_{R_3} \succ \mathfrak{Q}_{2,\perp}$ *и, следовательно, $*$-алгебра* $\mathfrak{A}_{R_3}$ *является $*$-дикой.*

Доказательство. Определим гомоморфизм $\psi: \mathfrak{A}_{R_3} \to \mathfrak{Q}_{2,\perp}$ следующим образом:

$$\psi(x) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 (e - q_1 - q_2).$$

Легко проверить, что функтор F_ψ строгий и полный.

Замечание 2. Следствие 7 приведено в [21]. Доказательство в [21] фактически использует $*$-дикость задачи унитарной классификации двух ортогональных идемпотентов и в неявной форме содержит доказательство $*$-дикости.

Авторы искренне благодарны В. Л. Островскому за помощь при подготовке этой работы.

1. *Böttcher A., Gohberg I., Karlovich Yu. et. all.* Banach algebras generated by N idempotents and applications // Operator Theory Adv. Appl. – 1996. – **90**. – P. 19–54.
2. *Jordan C.* Essai sur geometrie a n dimensions // Bull. Soc. Math. France. – 1875. – **3**. – P. 103–174.
3. *Davis C.* Separation of two linear subspaces // Acta Sci. Math. Szeged. – 1958. – **19**. – P. 172–187.
4. *Halmos P.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 381–389.
5. *Dokovič D. Ž.* Unitary similarity of proectors // Aequationes Math. – 1991. – **42**. – P. 220–224.
6. *Икрамов Х. Д.* О канонической форме проекторов относительно унитарного подобия // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1996. – **36**. – С. 3–5.
7. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функц. анализ и его прилож. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 60–62.
8. *Кругляк С. А.* Представления инволютивных колчанов. – Киев, 1984. – Деп. ВИНИТИ, 7266–84. – 62 с.
9. *Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С.* Дикие задачи теории представлений $\star$-алгебр, порожденных образующими и соотношениями // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 70–78.
10. *Kruglyak S., Piryatinskaya A.* On "wild" $\star$-algebras and the unitary classification of weakly centered operators / Prepr. Ser. of Mittag-Leffler Inst. – 1995/96. – No. 11. – 15 p.
11. *Кругляк С. А.* Дикие задачи теории $\star$-представлений (в печати).
12. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 81–82.
13. *Sergeichuk V. V.* Unitary and Euclidean representations of a quiver // Linear Algebra Appl. – 1998. – (to appear).
14. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
15. *Samoilenko Yu. S.* Spectral theory of families of self-adjoint operators. – Kluwer Acad. Publ., 1991. – 293 p.
16. *Василевский Н., Спитковский И.* Об алгебре, порожденной двумя проекторами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – **8**. – С. 10–13.
17. *Raeburn I., Sinclair A. M.* The C^*-algebra generated by two projections // Mathematica Scandinavica. – 1989. – **65**. – P. 278–290.
18. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Math. Lect. Notes. – 1973. – **5**. – P. 1–119.
19. *Габриель П., Цисман М.* Категория частных и теория гомотопий. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
20. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
21. *Беспалов Ю. Н., Самойленко Ю. С.* Алгебраические операторы и пары самосопряженных операторов, связанных алгебраическим соотношением // Функц. анализ и его прилож. – 1991. – **25**, вып. 4. – С. 72–74.

Получено 04.02.97