УДК 512. 41/47

О. О. Мазурок (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРУПИ З ЕЛЕМЕНТАРНИМ АБЕЛЕВИМ КОМУТАНТОМ ПОРЯДКУ НЕ БІЛЬШЕ НІЖ p^2

We obtain a representation of nilpotent groups with a commutant of type (p) or (p, p) having form of the product of two normal subgroups. One of these subgroups is constructively described as the Chernikov p-group of the rank 1 or 2 and the second has certain standardized form. We also obtain a representation of nonnilpotent groups with a commutant of type (p) or (p, p) in the form of semidirect product of a normal subgroup of type (p) or (p, p) and some nilpotent subgroup with a commutant of order p or 1.

Отримано зображення нільпотентних груп з комутантом типу (p) чи (p,p) у вигляді добутку двох нормальних підгруп, одна з яких конструктивно описана як черніковська p-група рангу 1 або 2, а друга має певний стандартизований вигляд, і ненільпотентних груп з комутантом типу (p) чи (p, p) — у вигляді напівпрямого добутку нормальної підгрупи типу (p) або (p, p) і деякої нільпотентної підгрупи з комутантом порядку p або 1.

Групи обмежених порядків досліджені в [1 – 6]. Природним розвитком цього напрямку досліджень є опис груп з комутантами обмежених порядків [7 – 9].

В даній роботі здійснюється спроба знаходження загальної конструкції побудови довільних як скінченних, так і нескінченних груп з комутантом порядку pq при умові, що в досліджуваній нільпотентній групі G фактор-група G/G' є прямим добутком локально циклічних груп (в скінченних групах ця умова виконується автоматично).

В п. 1 встановлюються допоміжні результати, які використовуються в подальшому. Частинним випадком теорем 1 та 2 є конструктивне задання груп з комутантом порядку p.

В п. 2 розглядаються групи з комутантом типу (p, p). В теоремі 3 встановлюється, що довільна група G з комутантом типу (p, p), яка має G/G' прямим добутком примарних чи без скруту локально циклічних груп, має вигляд $G = CD$, $C \bigcap D = G'$, де підгрупа C є черніковською p-групою рангу 2, що не містить підгруп діедра порядку 8 і може бути лише групою одного з шести конструктивно описаних цією теоремою типів, а підгрупа D є стандартним добутком підгруп $G_i = G' \leftthreetimes X_i$, $i \in I$, де I — деяка множина індексів. Підкреслимо, що основна увага теореми звернута на конструктивний опис підгрупи C, оскільки виділення підгрупи D забезпечує теорема 1. Теорема 4 дає загальний метод побудови ненільпотентних груп з комутантом типу (p, p). В теоремі 5 розглядаються всі групи G з комутантом G' типу (p, p), який містить всі елементи порядку p із G.

Поняття та позначення, що використовуються в роботі, взяті із [10] і [11], окрім цього: p — просте число, $|M|$ — кількість елементів множини M, $|g| = |\langle g \rangle|$. Групу D назвемо стандартним добутком її нормальних підгруп G_i, якщо вона є добутком $G_i = K \leftthreetimes X_i$, X_i — примарна чи без скруту локально циклічна група, $K \lhd D$, D/K — прямий добуток фактор-груп G_i/K.

1. Допоміжні результати.

***Означення* 1** [10]. *Група G називається черніковською групою, якщо вона містить нормальну підгрупу R скінченного індексу в G, що розкладається в скінченний прямий добуток квазіциклічних груп.*

***Означення* 2.** *Підгрупа $\omega(G)$ групи G, яка породжена всіма елементами із G простих порядків, називається нижнім шаром групи G.*

Означення 3 [12]. *Нормальна підгрупа* A *групи* G *називається її локально нільпотентним корадикалом, якщо* G/A *є локально нільпотентною групою та* A *є перетином всіх нормальних підгруп* X, *для яких* G/X — *локально нільпотентна група.*

З означення 2 легко одержати такий результат.

Твердження 1. *Нижній шар* $\omega(G)$ *є характеристичною, а тому нормальною підгрупою групи* G.

Із теореми 12.5.2 [11] легко одержати наступний результат.

Твердження 2 [11]. *Локально скінченна не локально циклічна* p*-група* G, *у якої* $|\omega(G)| = p$, *ізоморфна групі* $A\langle b\rangle$, *де* A — *локально циклічна 2-група нормальна в* G, $|A| > 2$, $|b| = 4$, $\omega(A) = \langle b^2\rangle$; *для довільного* $a \in A$ *справедливо* $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Наслідок1. *Не локально циклічна* p*-група* G *зі скінченним комутантом* G', *у якої* $|\omega(G)| = p$, *є групою із твердження 2 з циклічною групою* A. *Більше того,* G — *група кватерніонів порядку 8, якщо* $|G'| = p$.

Наслідок очевидно випливає з твердження 2.

Використовуючи наслідок 0.2.1 [13], можна встановити наведену нижче теорему, яка має і самостійне значення.

Теорема 1. *Нехай комутант* G' *групи* G *є елементарною абелевою підгрупою порядку* p^m, $m > 0$, $\{1 = Z_4 \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 = P\}$ — *центральний ряд силовської* p*-підгрупи* P *із* G, *що містить* G', G/G' — *прямий добуток локально циклічних груп і виконується умова: якщо* $|Z_3| \neq 1$ *і* $p = 2$, *то* P/G' — *елементарна абелева група або прямий добуток локально циклічних груп, порядок кожної з яких більше, ніж 4. Тоді* $G = CD$, D — *стандартний добуток своїх нормальних підгруп* $G_i = G' \leftthreetimes X_i$, $i \in I$, $G' = C \cap D$, C — *черніковська* p*-група, всі елементи порядку* p *із* C *належать* G'. *Якщо* $m < 2$, *то* C — *локально циклічна група чи група кватерніонів.*

Повне доведення цієї теореми збігається з доведенням теореми 2 депонованої роботи автора [14].

Твердження 3 [15]. *Нехай* G — *група зі скінченним абелевим комутантом* G'. *Тоді* $G = A \leftthreetimes D$, $G' = A \times B$, *де* $B = D' \subset Z = C_D(A) \lhd G$, D — *нільпотентна група,* D/Z — *скінченна абелева підгрупа із* $\mathrm{Aut}(A)$.

Теорема 2. *Група* G *тоді і тільки тоді є ненільпотентною групою з циклічним комутантом порядку* p^m, $p \neq 2$, $m > 0$, *коли*

$$G = \langle f\rangle \leftthreetimes D, \quad [\langle f\rangle, D] = \langle f\rangle = G', \quad |f| = p^m, \ p \neq 2, \ m > 0,$$

$$D = Z\langle a\rangle, \ Z \cap \langle a\rangle = \langle a^s\rangle, \ Z = Z(G), \ (p-1)p^{m-1} \equiv 0 \pmod s, \quad s \equiv 0 \pmod q,$$

q — просте число, $q \neq p$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді за твердженням 3 $G = \langle f\rangle \leftthreetimes D$, де $G' = \langle f\rangle \leftthreetimes B$, D — нільпотентна підгрупа з G, $B = D'$. Звідси $|f| = p^m$, $|B| = 1$, $\langle f\rangle \not\subset Z(G)$.

Оскільки нормальна в G підгрупа порядку 2 належить $Z(G)$, то $p > 2$. Нехай $Z = C_D(\langle f\rangle)$, тоді очевидно, що $Z = Z(G)$. Відомо, що D/Z — підгрупа із $\mathrm{Aut}(\langle f\rangle)$ і при $p > 2$ $\mathrm{Aut}(\langle f\rangle)$ — циклічна група порядку $(p-1)p^{m-1}$; звідси D/Z — циклічна група порядку $s/\left((p-1)p^{m-1}\right)$. Оскільки G/Z — ненільпотентна група, D/Z — не нормальна група порядку s, то $s \equiv 0 \pmod q$, q — просте число, $q \neq p$. Звідси $D = Z\langle a\rangle$, $Z \cap \langle a\rangle = \langle a^s\rangle$. За твердженням 3 $C_{\langle f\rangle}(D) = 1$, $[\langle f\rangle, D] = [\langle f\rangle, \langle a\rangle] = \langle f\rangle$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $G = \langle f \rangle \leftthreetimes D$ — група з умови теореми, тоді $G' = \langle f \rangle$, $|f| = p^m$, $m > 0$, p — непарне просте число. G містить підгрупу $H = P \leftthreetimes \langle a \rangle$, $Z(H) = \langle a^s \rangle$, $H/Z(H)$ — скінченна група з циклічними силовськими підгрупами, комутант якої збігається з $(\langle f \rangle \times Z(H))/Z(H)$ і має порядок p^m. Звідси $H/Z(H)$, а тому і H — ненільпотентні групи, отже, G — ненільпотентна група. Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Всі групи G з комутантом порядку p^m, $m < 2$, і всі елементи порядку p із G належать G', вичерпуються групами типів:*

1) *G — абелева група без елементів порядку p;*

2) *G — нільпотентна група з єдиною неодиничною локально циклічною силовською p-групою P і $\omega(P) = G'$;*

3) *G — нільпотентна група, силовська 2-підгрупа якої ізоморфна групі кватерніонів Q, $G' = Q'$;*

4)
$$G = A \leftthreetimes D, \quad [A, D] = A = G', \quad |A| = p \neq 2, \quad D = Z\langle a \rangle,$$
$$Z \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle, \; s > 1, \quad p \equiv 1 \pmod{s},$$
$$Z = Z(G) \text{ і } D \text{ не містить } p\text{-елементів.}$$

Доведення. *Необхідність.* Хай G — досліджувана група. Тоді при $m = 0$ $G' = 1$. Оскільки всі p-елементи з G належать G', то G не містить p-елементів, і G — група типу 1 наслідку 2. Нехай $m = 1$ і $|G'| = p$.

Якщо G ненільпотентна, то вона задовольняє умову теореми 2, за твердженням якої $G = A \leftthreetimes D$, $|A| = p$, всі елементи порядку p належать $G' = A$. Звідси D не містить p-елементів і G — група типу 4 розглядуваного наслідку.

Якщо ж G нільпотентна, то вона містить єдину силовську p-підгрупу P, що містить G'. Оскільки $|G'| = p$, G — нільпотентна, то $G' \subset Z(G)$ і за умовою теореми елементи порядку p із P належать G', звідки $|\omega(P)| = p$. Якщо P — локально циклічна, то G — група типу 2 наслідку 2, якщо ж P — не локально циклічна, то G задовольняє умову наслідку 1 і є групою типу 3 наслідку 2.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 – 4 наслідку 2. Тоді очевидно, що $|G'| = p^m$, $m < 2$. В групі G типу 1 $m = 0$ і всі елементи порядку p із G належать G'. В групі G кожного з типів 2 і 3 $m = 1$; G містить єдину силовську p-підгрупу P, у якої $\omega(P) = G' \subset Z(G)$, і всі елементи порядку p із G належать $\omega(P)$. Нехай, нарешті, $G = A \leftthreetimes D$, тоді A — єдина силовська p-підгрупа групи G порядку p, що збігається з G'. Звідси всі елементи порядку p із G належать A.

Наслідок доведено.

2. Групи з комутантом типу (p, p).

Теорема 3. *Нехай G — група з комутантом типу (p, p) і G/G' — прямий добуток локально циклічних груп, тоді $G = CD$, $D \cap C = G'$, D — стандартний добуток своїх нормальних підгруп $G_i = G' \leftthreetimes X_i$ для всіх $i \in I$, C — черніковська p-група рангу 2, що не містить підгруп діедра порядку 8, яка може бути лише групою одного з типів:*

1) *$C = A \leftthreetimes B$, де кожна з підгруп A та B є неодиничною локально циклічною групою чи групою кватерніонів;*

2) $C = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a^2 b^2 = x^2$;

3) $C = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y] = [b, x]$, $b^2 = y^2 = [a, x]$, $a^2 b^2 = [b, y]$;

4) $C = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

5) $C = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді G має єдину, а тому нормальну силовську p-підгрупу P, що містить G'. Покладемо $Z_0 = P$, $Z_1 = G'$, $Z_2 = [Z_1, P]$, $Z_3 = [Z_2, P]$, тоді $1 = Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq Z_0$ є центральним рядом підгрупи P із G і задовольняє умову 1 теореми 3, за твердженням якої G породжується системою $\{G_i\}$ своїх нормальних підгруп $G_i = C \leftthreetimes X_i$, X_i — локально циклічна примарна чи без скруту група, $i \in I$ — деяка множина індексів, G/C — прямий добуток всіх G_i/C і C — нормальна в G черніковська p-група, що містить G'.

Нехай спочатку $|C'| < p^2$, тоді C задовольняє умову леми 3 [14], за якою C — підгрупа типу 1 даної теореми. Хай далі $|C'| > p$, тоді $|C'| = p^2$, $G' = C'$ і C задовольняє умову теореми 6 [14], а тому може бути лише групою одного з типів 1 – 5 згаданої теореми 6 [14]. Це означає, що C є підгрупою групи G типів відповідно 1 – 5 розглядуваної теореми, де в групі C типу 1 $U = A$, $X = B$, а в групах інших типів $U = \langle a \cdot b\rangle$. Покладемо $D = \langle G_i\rangle$, $i \in I$, тоді $G = CD$, $C \cap D = G' \le Z(G)$.

Достатність. Нехай G — група з розглядуваної теореми і $G_i = G' \leftthreetimes X_i$ задовольняють твердження теореми, тоді очевидно, що G' — група типу (p, p). Зрозуміло, що G/G' — прямий добуток локально циклічних p-груп і $G/G' = (C/G') \times (D/G')$, звідки G/G' — прямий добуток локально циклічних груп.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай G — ненільпотентна група з комутантом типу (p, p), тоді $G = A \leftthreetimes D$, де $|A| \in \{p, p^2\}$, $G' = A \times B$, де $B = D' \le Z(D)$, $|B| \in \{1, p\}$, $[A, D] = A$, $C_D(A) = Z \lhd G$, $C_A(D) = 1$ і G ізоморфна групі одного з типів:*

1) $|A| = |B| = p > 2$, $D = Z\langle a\rangle$, $Z \cap \langle a\rangle = \langle a^s\rangle$, $s > 1$, $p \equiv 1 \pmod s$;

2) A — *група типу* (p, p), $B = 1$, $Z = Z(G)$, D/Z — *скінченна неодинична абелева підгрупа із* $GL(2, p)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді за твердженням 3 $G = A \leftthreetimes D$, $G' = A \times B$, D — нільпотентна група з комутантом $D' = B$. Оскільки G — ненільпотентна група, то $|A| \in \{p, p^2\}$. Звідси $|B| \in \{1, p\}$. Зрозуміло, що у верхньому центральному ряді $\{1 = Z_0 \le \ldots \le Z_i \le \ldots \le Z_n = D\}$ знайдеться таке $k > 0$, для якого $B < Z_k$, $B \cap Z_{k-1} = 1$. За властивостями введеного центрального ряду маємо $[Z_k, D] \subset Z_{k-1}$. Оскільки $B \lhd D$, то $[B, D] \subset B \cap Z_{k-1}$. Звідси $B \le Z(D)$. Нехай $C_D(A) = Z$, тоді $Z \lhd G$, $Z \supset B$, $C_G(B) \supset Z$, отже, $C_D(G') = Z$. Оскільки D/Z — підгрупа із $\mathrm{Aut}(A)$, то $|D/Z| = s$, s — натуральне число. За твердженням 3 $[A, D] = A$, $C_A(D) = 1$.

Нехай $|A| = p$. Зрозуміло, що $A \not\subset Z(G)$, тому $p > 2$. Оскільки $\mathrm{Aut}(A)$ є циклічною групою порядку $p - 1$, то D/Z — циклічна група порядку s, що є підгрупою із $\mathrm{Aut}(A)$, звідки $p \equiv 1 \pmod s$, $D = Z\langle a\rangle$, $Z \cap \langle a\rangle = \langle a^s\rangle$. Оскільки

G — ненільпотентна, то $s > 1$; ясно, що $|B| = p$ і G — група типу 1.

Нехай $|A| \neq p$. Тоді $|A| = p^2$, $A = G'$, $B = D' = 1$. Звідси $Z = Z(G)$. Відомо, що $\mathrm{Aut}(A) \cong GL(2, p)$ і G — група типу 2 розглядуваної теореми.

Достатність. Нехай $G = A \leftthreetimes D$ — група одного з типів 1, 2 теореми. Очевидно, що G' — група типу (p, p). Покажемо, що G — ненільпотентна група. Нехай спочатку G — група типу 1. Тоді вона містить підгрупу $H = A \leftthreetimes \langle a \rangle$. Нехай $a^s = z$, тоді $z \in Z(H)$, $H/\langle z \rangle$ — скінченна група з ненормальною холлівською власною підгрупою $\langle a \rangle / \langle z \rangle$. Як відомо (наслідок 10.3.1 [11]), $H/\langle z \rangle$ є ненільпотентною групою, а тому і H — ненільпотентна група. Оскільки G містить ненільпотентну групу, то за результатами [10, с. 386] G — ненільпотентна група.

Достатність для груп типу 1 доведено.

Нехай G — група типу 2. Припустимо, що $Z = 1$, тоді D — підгрупа із $GL(2, p)$. Ясно, що нормальний дільник скінченної p-групи має неодиничний перетин з центром всієї групи. Оскільки $C_A(D) = 1$, то D не може бути p-групою і, значить, D містить q-елемент, q — просте, відмінне від p число, $|a| > 1$. Покладемо $H = A \leftthreetimes \langle a \rangle$. Оскільки $z = 1$, то $C_D(A)$ не містить a, а тому $\langle a \rangle$ — власна ненормальна холлівська підгрупа із H. Як і для груп типу 1, H і G — ненільпотентні групи.

Нехай $z \neq 1$, тоді, розглядаючи G/Z, прийдемо до вже розглянутого випадку, коли $z = 1$. За тим випадком G/Z — ненільпотентна група, а тому G — ненільпотентна група. Отже, група типу 2 — ненільпотентна.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Всі групи G з комутантом G' типу (p, p), який містить всі елементи порядку p із G, мають єдину силовську p-підгрупу P і вичерпуються групами типів:*

1)
$$G = A \leftthreetimes D, \quad |A| = p \neq 2, \quad [A, D] = A, \quad D = Z\langle a \rangle, \quad Z = C_D(A) \lhd G,$$
$$Z \cap \langle a \rangle = \langle a^s \rangle, \quad s > 1, \quad p \equiv 1 \pmod{s};$$

$P = A \times U$, де U — єдина силовська p-підгрупа із Z, що є локально циклічною p-підгрупою,

$$D' \subset Z(D), \quad |D'| = p, \quad C_A(D) = 1;$$

2) *$G = P \leftthreetimes D$, $G' = P$ — елементарна абелева підгрупа порядку p^2, $[P, D] = P$, $C_P(D) = 1$; D не містить p-елементів, $C_D(P) = Z = Z(G)$, D/Z — неодинична абелева підгрупа із $GL(2, p)$;*

3) *G — нільпотентна група, у якої підгрупа P ізоморфна підгрупі C теореми* 3 *і має ті ж властивості, що й C.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді $G' \lhd G$ — підгрупа типу (p, p) і тому G має єдину силовську p-підгрупу P, що містить G', а тому $P \lhd G$. Зрозуміло, що всі p-елементи із G належать P. Нехай G — ненільпотентна група. G задовольняє умову теореми 4, а тому може бути лише групою типів 1 чи 2 згаданої теореми. Нехай G — група типу 1 теореми 4, тоді $G = A \leftthreetimes D$ і справедливі всі твердження для груп цього типу. Оскільки $A \subset P$ і $|A| = p > 2$, то, як і в доведенні необхідності теореми 4, $A \subset Z(P)$ і $P = A \times U$, де $U = P \cap D$. Оскільки $P \lhd G$, то $U \lhd D$ і U — єдина силовська p-підгрупа із D. Для груп розглядуваного типу $D' = B \subset Z(D)$ і $C_D(A) \supset U$.

За умовою теореми всі елементи порядку p із D належать U. D — нільпотентна група, що задовольняє умову наслідку 2 і може бути лише групою типу 2 згаданої теореми. Звідси G — група типу 1 даної теореми.

Нехай G — група типу 2 теореми 4, тоді $G = A \leftthreetimes D$, де $G' = A$ — елементарна абелева група порядку p^2, що містить всі елементи порядку p із G. Звідси D не містить елементів порядку p, а тому $P = A$, і G — група типу 2 розглядуваної теореми.

Припустимо, що G — нільпотентна група. Тоді D також нільпотентна група, $\omega(P) = G'$, всі елементи порядку p із P, а тому і із G належать $\omega(P)$. З цього випливає, що P має в G всі ті ж властивості, що і підгрупа C із теореми 3 і, значить, G — група типу 3 розглядуваної теореми.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 – 3 теореми і P — її силовська підгрупа. Ясно, що G' — абелева група типу (p, p), всі елементи порядку p із G якої належать P і $G' = \omega(P)$.

За побудовою підгрупи P групи G кожного з розглядуваних типів всі елементи порядку p із P належать $\omega(P) = G'$, а тому і всі елементи порядку p із G належать G'.

Теорему доведено.

1. *Holder O.* Die Gruppen der Ordnungen p^3, p^2, q, pqr, p^4 // Math. Ann. – 1893. – **43.** – P. 301–412.
2. *Lunn A. C., Sentor J. K.* Determination of the groups of orders 162–215, omitting order 192 // Amer. J. Math. – 1935. – **57.** – P. 254–260.
3. *Taunt D.* Remarks on the izomorfizm problem the theore of construction of finite groups // Proc. Cambridge Ph. Soc. – 1950. – **51.** – P. 16–24.
4. *Huppert B.* Endiche Gruppen. – Berlin etc: Springer, 1967. – 793 p.
5. *Bender H. A.* A determination of the groups of order p^5 // Ann. Math. – 1927. – **2,** № 29. – P. 61–72.
6. *Пилявская О. С.* Классификация групп порядка p^6 $(p > 3)$. – М., 1983. – 63 с. / Деп. в ВИНИТИ, № 1877-83 Деп.
7. *Сергейчук В. В.* Конечно порожденные группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. журн. – 1978. – **30,** № 6. – С. 789–796.
8. *Blackburn N.* On a special class of p-groups // Acta Math. – 1958. – **100.** – P. 45–92.
9. *Famer R.* The groups of order p^6 (p odd and prime) // Math. Comp. – 1980. – **34**, № 150. – P. 613-637.
10. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
11. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
12. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 537 с.
13. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 230 с.
14. *Мазурок О. О.* Класифікація груп з деякими обмеженнями та комутантом порядку $p \cdot q$. – Київ, 1997. – 48 с. / Деп. в ДНТБ України, № 311-Ук97.
15. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72–130.

Одержано 07.08.96