УДК 511.331

В. І. Мельник (Київ)

НАБЛИЖЕНЕ ЗОБРАЖЕННЯ НАТУРАЛЬНОГО СТЕПЕНЯ ДЗЕТА-ФУНКЦІЇ РІМАНА

An approximate functional equation for $\zeta^m(z)$, $m \in N$, is obtained.

Одержано наближене функціональне рівняння для $\zeta^m(z)$, $m \in N$.

Наближеним функціональним рівнянням функції $\zeta(z)$ називають співвідношення [1, с.82, 85]

$$\zeta(z) = \sum_{n \le N} \frac{1}{n^z} + \chi(z) \sum_{n < M} \frac{1}{n^{1-z}} + O\left(N^{-x}\right) + O\left(|y|^{1/2-x} M^{x-1}\right), \tag{1}$$

$$z = x + iy, \quad 0 \le x < 1, \quad 2\pi M N = |y|, \quad 0 < k < M, \quad 0 < k < N,$$

$$\chi(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z).$$

Рівність (1) можна поширити на функцію $\zeta^2(z)$, але кількість доданків в сумах тоді збільшується: $MN = \left(|y| / 2\pi\right)^2$, доведення досить складне [1, с. 95]. Формулу (1) та її узагальнення для $\zeta^2(z)$ одержано на початку століття. Пізніше дослідження наближених фукціональних співвідношень типу (1) інтенсивно продовжувалося (див., наприклад, [2 – 7]). Розглядалися не лише натуральні степені дзета-функції Рімана, а й функції Діріхле, що задовольняють узагальнені функціональні рівняння. Але одержані співвідношення в застосуванні до $\zeta^m(z)$ або досить громіздкі, або мають громіздкий залишковий член. Сформулюємо ще один результат цього типу.

Нехай

$$\zeta^m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^m n^{-z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Для спрощення записів коефіцієнти розкладу d_n^m будемо записувати далі як d_n, опускаючи верхній індекс.

Теорема. *Для довільних чисел: натурального* m, $a < -1$, $0 \le l$, $0 < \varepsilon < 1/2m$, — *існує таке натуральне число* q, *що виконується співвідношення*

$$\zeta^m(z) = \sum_{n \le N} \frac{d_n}{n^z} + \sum_{N < n \le N + qA} c_n(N, A, q) \frac{d_n}{n^z} +$$

$$+ \chi^m(z) \left(\sum_{n \le M'} \frac{d_n}{n^{1-z}} + \sum_{M' < n \le M} b_n(N, A, q) \frac{d_n}{n^{1-z}} \right) + O\left(N^{-l}\right), \tag{2}$$

$$M'(N + qA) = MN = \left(|y| / 2\pi\right)^m, \quad z = x + iy, \quad a < x < 1,$$

$$0 < y_0 < |y|, \quad 1 < N_0 < N < |y|^{1/2\varepsilon},$$

$$cN^{1-\varepsilon} \le A \le N, \quad 0 < c < 1.$$

Тут $c_n(N, A, q) = Q_{q,j}\left((n-N)/A\right)$, $N + jA \le n \le N + (j+1)A$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, q-1$, $Q_{q,j}\left((n-N)/A\right)$ *є алгебраїчний многочлен степеня не вище* q *від*

$(n-N)/A$, $Q_{q,0}(0)=1$, $Q_{q,q-1}(q)=0$, $Q_{q,j-1}(j)=Q_{q,j}(j)$, $j=1,2,\ldots$ $\ldots, q-2$, *числа* $c_n(N,A,q)$ *спадають від* 1 до 0 *при* $N \le n \le N+qA$. *В свою чергу,*

$$b_n(N,A,q) = D_{q,j}\left(\frac{\left(|y|/2\pi\right)^m / n - N}{A}\right),$$

$$\left(|y|/2\pi\right)^m \Big/ (N+(j+1)A) \le n \le \left(|y|/2\pi\right)^m \Big/ (N+jA),$$

$j=0,1,\ldots,q-1$, $D_{q,j}(\ldots)$ *є алгебраїчний многочлен степеня не вище* q, $D_{q,0}(0)=0$, $D_{q,q-1}(q)=1$, $D_{q,j}(j)=D_{q,j-1}(j)$, $j=1,2,\ldots,q-2$, *числа* $b_n(N,A,q)$ *спадають від* 1 *до* 0 *при* $M' \le n \le M$. *Константа в залишковому члені залежить лише від* m, a, l, ε.

Доведення. Нехай F — оператор, який функцію $g(N)$ перетворює у функцію $A^{-1}\int_N^{N+A} g(N)\,dN$, $A>0$, і для натурального q через F_q позначимо оператор, який є повторним q-кратним застосуванням оператора F.

Лема 1. *Нехай* $z=x+iy$, $x<1<b$, $2|z|<T$, $2N<T$, $1<N_0<N$, q — *натуральне. Тоді*

$$F_q\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}dw\right) = \sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z} +$$

$$+ \sum_{N<n\le N+qA}\frac{d_n}{n^z}c_n(N,A,q) + O\left(\frac{N^{b+1-x}\log T}{TA}\right), \tag{3}$$

де числа $c_n(N,A,q)$ *задовольняють умови теореми.*

Доведення. Запишемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}dw = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{N}{n}\right)^{w-z}\frac{dw}{w-z}. \tag{4}$$

Якщо $|N-n| < N/T$, то

$$(N/n)^{w-z} = e^{(w-z)\log(N/n)} = 1 + O((w-z)\log(N/n)) =$$

$$= 1 + O\left((w-z)\frac{n-N}{N}\right), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{N}{n}\right)^{w-z}\frac{dw}{w-z} = O(1), \tag{5}$$

і член d_n/n^z в сумі (4) має коефіцієнт $O(1)$.

Якщо $|N-n| \ge N/T$, то при $N<n$ відрізок інтегрування переносимо паралельно дійсній осі в $+\infty$ і для интеграла (5) одержуємо оцінку $O\left(\frac{(N/n)^{b-x}}{T|\log(N/n)|}\right)$, а при $n<N$ відрізок інтегрування переносимо в $-\infty$ і для інтеграла (5) одержуємо значення $1 + O\left(\left(\frac{N}{n}\right)^{b-x}\Big/ T\log\frac{N}{n}\right)$. Отже, для інтеграла (5) маємо

$$\begin{cases} 1+R, & n \le N, \\ R, & n < N, \end{cases}$$

де

$$R = \begin{cases} O(1), & |n-N| < N/T; \\ O\left(\left(\frac{N}{n}\right)^{b-x} N/T|N-n|\right), & N/T \le |n-N| < \frac{1}{2}N; \\ O\left(\left(\frac{N}{n}\right)^{b-x} /T\right), & N/2 < |n-N|. \end{cases}$$

При однократному інтегруванні $(1/A)\int\limits_N^{N+A} dN$, заданому в (3), для різних значень R залишок містить доданки

$$\begin{cases} O(N/TA), & N(1-1/T) \le n \le (N+A)(1+1/T), \\ O\left((N/n)^{b-x} N(\log T)/TA\right), & N/2 \le n \le 3(N+A)/2, \\ O\left((N/n)^{b-x} /T\right). \end{cases}$$

Якщо підставити ці доданки в ряд (4) і просумувати по n, для залишкового члена одержимо оцінку $O\left(\left(N^{b-x+1}\log T\right)/TA\right)$. При наступних усередненнях по N, заданих в (3), оцінка залишкового члена не може погіршитись, цим самим вигляд залишкового члена формули (3) обгрунтований.

Основний член в (4) має вигляд $\sum\limits_{n\le N} d_n n^{-z}$. При одноразовому усередненні по N цього виразу одержимо

$$\frac{1}{A}\int\limits_N^{N+A}\sum_{n\le\nu}\frac{d_n}{n^z}d\nu = \sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z} + \sum_{N<n\le N+A}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{A}\int\limits_n^{N+A} d\nu =$$

$$= \sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z} + \sum_{N<n\le N+A}\frac{d_n}{n^z}\left(1-\frac{n-N}{A}\right).$$

При $q=1$ числа $c_n(N,A,1) = 1-(n-N)/A$ є спадаючою від 1 до 0 послідовністю на проміжку $N \le n \le N+A$, отже, задовольняють умови леми 1. Індукцією по q покажемо, що числа $c_n(N,A,q)$ задовольняють умови леми 1 при будь-якому q. Нехай при деякому q це виконується, тоді

$$F_{q+1}\left(\sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z}\right) = \frac{1}{A}\int\limits_N^{N+A}\left(\sum_{n\le\nu}\frac{d_n}{n^z} + \sum_{\nu<n\le\nu+qA}\frac{d_n}{n^z}c_n(\nu,A,q)\right)d\nu =$$

$$= \sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z} + \sum_{N<n\le N+A}\frac{d_n}{n^z}\left(1-\frac{n-N}{A}\right) + \sum_{N<n\le N+(q+1)A}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{A}\int\limits_{\max(N,n-qA)}^{\min(n,N+A)} c_n(\nu,A,q)\,d\nu =$$

$$= \sum_{n\le N}\frac{d_n}{n^z} + \sum_{N<n\le N+A}\frac{d_n}{n^z}\left(1-\frac{n-N}{A}\right) + \sum_{N<n<N+A}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{A}\int\limits_N^n c_n(\nu,A,q)d\nu +$$

$$+\sum_{N+A\le n<N+qA}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{A}\int\limits_N^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu+\sum_{N+qA\le n\le N+(q+1)A}\frac{d_n}{n^z}\frac{1}{A}\int\limits_{n-qA}^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu.$$

Отже,

$$c_n(N,A,q+1)=\begin{cases}1-\dfrac{n-N}{A}+\dfrac{1}{A}\int\limits_N^n c_n(\nu,A,q)\,d\nu, & N<n<N+A;\\ \dfrac{1}{A}\int\limits_N^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu, & N+A\le n<N+qA;\\ \dfrac{1}{A}\int\limits_{n-qA}^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu, & N+qA\le n\le N+(q+1)A.\end{cases}$$

Оскільки за припущенням числа $c_n(\nu,A,q)$ містяться між 1 і 0 і утворюють спадну послідовність по n при кожному ν, то такими ж будуть і числа $\frac{1}{A}\int\limits_N^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu$, тобто $c_n(N,A,q+1)$ на проміжку $N+A\le n<N+qA$.

Тим більше такий висновок справедливий для чисел $\frac{1}{A}\int\limits_{N-qA}^{N+A}c_n(\nu,A,q)\,d\nu$, тому що при зростанні n проміжок інтегрування зменшується, а підінтегральна функція є додатною. При $N<n_1<n_2<N+A$ буде

$$c_{n_1}(N,A,q+1)-c_{n_2}(N,A,q+1)=\frac{n_2-n_1}{A}+$$

$$+\frac{1}{A}\int\limits_N^{n_1}\Big(c_{n_1}(\nu,A,q)-c_{n_2}(\nu,A,q)\Big)d\nu-\frac{1}{A}\int\limits_{n_1}^{n_2}c_{n_2}(\nu,A,q)\,d\nu\ \ge$$

$$\ge\ \frac{1}{A}\int\limits_{n_1}^{n_2}\Big(1-c_{n_2}(\nu,A,q)\Big)d\nu\ \ge\ 0,$$

і числа $c_n(N,A,q+1)$ на проміжку $N<n<N+A$ є спадною послідовністю. Отже, на кожному з інтервалів між точками $N<N+A<N+qA<N+(q+1)A$ послідовність $c_n(N,A,q+1)$ є спадною. Але в межових точках суміжні формули переходять одна в одну, тобто дають одне і те ж значення для $c_n(N,A,q+1)$, тому монотонне спадання $c_n(N,A,q+1)$ буде на всьому проміжку $N\le n\le N+(q+1)A$. Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай* $a<x$, $a<0$, $A<N$ *і виконано всі умови леми* 1. *Тоді*

$$F_q\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a\pm iT}^{b\pm iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}\,dw\right)=O\Big(T^{m(1/2-a)-1-q}\,N^{b-x+q}\,A^{-q}\Big).\tag{6}$$

В півплощині $a\le\operatorname{Re}w$ справедлива оцінка $\zeta^m(w)=O\big(|w|^{m(1/2-a)}\big)$, $1<$ $<|w|$, отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a\pm iT}^{b\pm iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}\,dw=O\Big(T^{m(1/2-a)-1}\,N^{b-x}\Big).\tag{7}$$

Оскільки

$$F\left(N^{w-z}\right) = \frac{(N+A)^{w-z+1} - N^{w-z+1}}{A(w-z+1)}, \quad w-z+1 \neq 0,$$

то однократне усереднення по N долучить в оцінку (7) множник $O(N/TA)$, а q-кратне усереднення приведе до оцінки (6).

Лема 3. *Нехай виконано всі припущення теореми. Тоді для* $m<q$ *має місце співвідношення*

$$F_q\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}dw\right) = \chi^m(z)\left(\sum_{n\le M'}\frac{d_n}{n^{1-z}}+\sum_{M'<n\le M}b_n(N,A,q)\frac{d_n}{n^{1-z}}\right)+$$

$$+\,O\left(N^{1/2-x-q(1/2m-\varepsilon)}+N^{a-x+q\varepsilon+3/5m}\,T^{m(1/2-a)-q-1}\right), \tag{8}$$

де числа $b_n(N,A,q)$ *задовольняють умови теореми.*

Не зменшуючи загальності, будемо припускати, що $y_0<y$, де y_0 — достатньо велике число. Із співвідношення $\zeta^m(w) = \chi^m(w)\zeta^m(1-w)$ і розкладу $\zeta^m(w)$ в ряд маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT}\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}dw = N^{-z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT}\chi^m(w)\frac{(nN)^w}{w-z}dw. \tag{9}$$

Інтеграли, які з'явилися в правій частині формули (9), розкладемо в асимптотичний ряд, використовуючи метод перевалу, але почнемо це з більш простого інтеграла

$$I(B) = \int_a^{a+i\infty}\Gamma^m(1-w)\left(Be^{-m\pi i/2}\right)^w dw \equiv \int_a^{a+i\infty}e^{\Omega(w)}dw, \tag{10}$$

$$B = (2\pi)^m nN, \quad \Omega(w) = m\log\Gamma(1-w)+w\log B-\pi i m w/2.$$

За допомогою формули Стірлінга в півплощині $u=\operatorname{Re}w\le a<0$ маємо

$$\Omega(w) = m\{(1/2-w)\log(1-w)-1+w+1/2\log 2\pi+\ldots\} + w\log B-\pi i m w/2.$$

На промені $(a,\ a+i\infty)$ буде $\log(1-w) = \log w-\pi i+\log(1-1/w)$ і

$$\Omega(w) = w(-m\log w+\pi i m/2+m+\log B)+m/2\log w-\pi i m/2+m/2\log 2\pi+\ldots . \tag{11}$$

В формулі (11) можна виписати члени з від'ємними степенями w, і залишок буде мати порядок першого відкинутого члена. Подібне зауваження справедливе і відносно всіх інших асимптотичних розкладів, в яких будемо виписувати лише перші члени. Формулу (11) можна почленно диференціювати. В цьому легко переконатися, записавши похідну за формулою Коші. Так одержимо розклади

$$\Omega'(w) = -m\log w+\pi i m/2+\log B+m/2w+\ldots, \tag{12}$$

$$\Omega''(w) = -m/w+\ldots, \tag{13}$$

$$\Omega^{(k)}(w) = (-1)^k m(k-1)!\,w^{-k+1}+\ldots+O(w^{-l}), \quad 2\le k\le l. \tag{14}$$

Для розв'язання рівняння $\Omega'(w)=0$ використаємо метод послідовних наближень. В нульовому наближенні можна покласти

$$\log w = \frac{\pi i}{2}+\frac{1}{m}\log B+\frac{1}{2w},$$

$$w_0 = iB^{1/m}+1/2.$$

Взявши в формулі (12) більше членів, ніж там наведено, переконаємось, що

$$\Omega'(w_0) = -m\Big(\frac{1}{m}\log B + i\pi/2 + \log\Big(1+\frac{1}{2iB^{1/m}}\Big)\Big) + \pi i/2 + \log B +$$

$$+ m/2w_0 + \sum_{r=2}^{l+1} A_r w_0^{-r} + O\Big(C_l\, w_0^{-l-2}\Big) = \sum_{r=2}^{l+1} B_r w_0^{-r} + O\Big(C_l\, w_0^{-l-2}\Big).$$

Тоді за формулами (13), (14)

$$w_1 = w_0 - \frac{\Omega'(w_0)}{\Omega''(w_0)} = w_0 + \sum_{r=1}^{l} D_r w_0^{-r} + O\Big(C_l\, w_0^{-l-1}\Big),$$

$$\Omega'(w_1) = \Omega'(w_0) + \Omega''(w_0)(w_1 - w_0) + \int_{w_0}^{w_1}(w_1 - w)\,\Omega'''(w)\,dw =$$

$$= \int_{w_0}^{w_1}(w_1 - w)\,\Omega'''(w)\,dw = O\Big(w_0^{-4}\Big),$$

отже, за формулою (12)

$$\Omega'(w_1) = \sum_{r=4}^{l+1} B_r{}'\, w_0^{-r} + O\Big(C_l\, w_0^{-l-2}\Big).$$

Існує така константа $A(l)$, що при $B > A(l)$ послідовні наближення w_k збіжні до деякого числа ω, і це число є коренем рівняння $\Omega'(w) = 0$. З викладеного вище випливає справедливість асимптотичного розкладу

$$\omega = iB^{1/m} + 1/2 + \sum_{r=1}^{l} A_r B^{-r/m} + O\Big(C_l\, B^{-(l+1)/m}\Big), \quad 0 < l, \quad A(l) < B. \tag{15}$$

Нехай $\theta = \arg\omega$, $\varphi = \arg\sqrt{-2/\Omega''(\omega)}$. Тоді $\theta = \pi/2 + O(1/\omega)$, $\varphi = \pi/4 + O(1/\omega)$. Шлях інтегрування в інтегралі (10) — промінь $(a,\ a + i\infty)$. Перенесемо шлях інтегрування в нове положення Γ_+, сполучивши відрізками точки a; $|\omega|\cos\theta - |\omega|^{3/5}\cos\varphi$; $\omega - |\omega|^{3/5}e^{i\varphi}$; $\omega + |\omega|^{3/5}e^{i\varphi}$; $\omega + |\omega|^{3/5}e^{i\varphi} + i\infty$. Позначимо інтеграли вздовж окремих частин ламаної через I^1, I^2, I^3, I^4 (в порядку запису точок).

Розглянемо спочатку інтеграл I^3, взятий вздовж відрізка, серединою якого є точка ω. В околі точки ω має місце розклад

$$\Omega(w) = \Omega(\omega) + \Omega''(\omega)(w-\omega)^2/2! + \ldots + \Omega^{(l-1)}(\omega)(w-\omega)^{l-1}/(l-1)! +$$

$$+ \Big(\int_{\omega}^{w} \Omega^{(l)}(z)(w-z)^{l-1}\,dz\Big)/(l-1)!. \tag{16}$$

На шляху інтегрування $|w - z| \le |\omega|^{3/5}$, а за формулою (14)

$$\int_{\omega}^{w} \Omega^{(l)}(z)(w-z)^{l-1}\,dz = O\big(|\omega|^{1-2l/5}\big). \qquad (1'$$

Отже, при великому l можна покласти

$$e^{\Omega(w)} \approx \exp\big(\Omega(\omega) + \Omega''(\omega)(w-\omega)^2/2\big)\exp\Bigg(\sum_{k=3}^{l-1}\Omega^{(k)}(\omega)(w-\omega)^k/k!\Bigg),$$

і останній множник виразу замінюємо рядом

$$1 + \sum + \Big(\sum\Big)^2/2! + \ldots \Big(\sum\Big)^j/j! + \ldots, \quad \sum = \sum_{k=3}^{l-1}\Omega^{(k)}(\omega)(w-\omega)^k/k!.$$

Для досягнення потрібної точності в усіх сумах, включаючи Σ, достатньо розглядати скінченну кількість доданків. Таким чином,

$$I^3 =$$

$$= e^{\Omega(\omega)} \int\limits_{\omega-|\omega|^{3/5}\exp(i\varphi)}^{\omega+|\omega|^{3/5}\exp(i\varphi)} \exp\left(\Omega''(\omega)(w-\omega)^2/2\right)\left(1+\sum_{k=3}^{l-1}\Omega^{(k)}(\omega)(w-\omega)^k/k!+\ldots\right)dw.$$

В інтегралі виконаємо заміну змінної $\sqrt{-\Omega''(\omega)/2}(w-\omega)=\xi$, $dw = \sqrt{-2/\Omega''(\omega)}d\xi$. Змінна ξ буде пробігати відрізок $[-\Delta,\Delta]$ дійсної осі довжиною $\Delta = \sqrt{m/2}|\omega|^{1/10}+O\left(|\omega|^{-9/10}\right)$. Вихідний інтеграл набуде вигляду

$$I^3 = \sqrt{-2/\Omega''(\omega)}e^{\Omega(\omega)}\Bigg(\int_{-\Delta}^{\Delta}\exp\left(-\xi^2\right)d\xi +$$

$$+\sum_{k=3}^{l-1}\frac{\Omega^{(k)}(\omega)}{k!}\left(\sqrt{-2/\Omega''(\omega)}\right)^k\int_{-\Delta}^{\Delta}\xi^k\exp\left(-\xi^2\right)d\xi+\ldots\Bigg). \tag{18}$$

При парних k

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}\xi^k\exp\left(-\xi^2\right)d\xi = \int_0^{\Delta^2}t^{\frac{k-1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)+\ldots,$$

а при непарних k цей інтеграл дорівнює нулю. Продовжимо обчислення, використовуючи (11) – (15) і умову $\Omega'(\omega)=0$:

$$\sqrt{-2/\Omega''(\omega)} = \sqrt{2/m}\,B^{1/2m}e^{i\pi/4}(1+\ldots),$$

$$\Omega(\omega) = m\omega-\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\log\omega-\frac{\pi i}{2}m+\frac{m}{2}\log 2\pi+\ldots =$$

$$= miB^{1/m}+\frac{1}{2}\log B-\frac{m\pi i}{4}+\frac{m}{2}\log 2\pi+\ldots. \tag{19}$$

Підставивши (19) у формулу (18), інтеграл I^3 остаточно подамо у вигляді

$$I^3 = (2\pi)^{m/2}\sqrt{2\pi m}\,e^{imB^{1/m}-\pi i(m-1)/4}\,B^{1/2+1/2m}\left(1+A_1B^{-1/m}+\ldots\right). \tag{20}$$

Тепер оцінимо інтеграл вздовж вертикальних частин ламаної. В точках $w_{1,2} = \omega\mp|\omega|^{3/5}e^{i\varphi}$ за формулами (16), (17), (19), (13)

$$\operatorname{Re}\Omega(w_{1,2}) = \operatorname{Re}\left\{\Omega(\omega)+\Omega''(\omega)(w_{1,2}-\omega)^2/2+O\left(\omega^{-1/5}\right)\right\} =$$

$$= O(\log\omega)-c|\omega|^{1/5} < -c_1|\omega|^{1/5}, \quad 0<c_1. \tag{21}$$

При русі точки $w=u+iv$ вздовж вертикальної прямої змінну $\operatorname{Re}\Omega(w)$ оцінимо, використовуючи формулу (12). На прямій $w=u_1+iv$

$$\operatorname{Re}\Omega(w) = \operatorname{Re}\Omega(w_1)+\operatorname{Re}\int_{w_1}^{w}\Omega'(w)dw = \operatorname{Re}\Omega(w_1)-$$

$$-\int_{v_1}^{v}\operatorname{Im}\Omega'(w)dv = \operatorname{Re}\Omega(w_1)+\int_{v_1}^{v}\left(m\left(\frac{\pi}{2}-\arg w\right)+O\left(\frac{1}{w}\right)\right)dv <$$

$$< -c_1|\omega|^{1/5}+O(\log\omega) < -c_2|\omega|^{1/5}, \quad 0<c_2,$$

оскільки на відрізку $w=u_1+iv$, $0\le v\le v_1$ буде $\arg w>\pi/2$. Отже,

$$I^2 = O(\exp(-c|\omega|^{1/5})), \quad 0<c. \tag{22}$$

Аналогічно на прямій $w=u_2+iv$

$$\operatorname{Re}\Omega(w) = \operatorname{Re}\Omega(w_2) - \int_{v_2}^{v} \operatorname{Im}\Omega'(w)\,dv =$$
$$= \operatorname{Re}\Omega(w_2) - \int_{v_2}^{v} m\left(\frac{\pi}{2} - \arg w + O\left(\frac{1}{v}\right)\right)dv.$$

Але при $w = u_2 + iv,\ v_2 \le v,\ 0 < u_2$ буде $\arg w \le \pi/2 - c|\omega|^{3/5}/v$, і згідно з (21)

$$\operatorname{Re}\Omega(w) \le -c_1|\omega|^{1/5} - c|\omega|^{3/5}\log(v/v_2).$$

Функція $e^{\Omega(w)}$ швидко спадає за модулем і

$$I^4 = O(\exp(-c|\omega|^{1/5})), \quad 0 < c. \tag{23}$$

Для обчислень в нижній півплощині використаємо криву Γ_-, яка симетрична кривій Γ_+ відносно дійсної осі. Нехай Γ^* — крива, яка складається з Γ_- і Γ_+. Схему обчислень, викладену для інтеграла (10), тепер застосуємо до інтеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT} \chi^m(w)\frac{(nN)^w}{w-z}\,dw,$$

який міститься в (9). Якщо в цьому інтегралі шлях інтегрування перенести в нове положення Γ_T^*, сполучивши точки $a+iT,\ a-iT$ з контуром Γ^* двома відрізками, паралельними дійсній осі, то новий контур Γ_T^* при деяких n може проходити поблизу точку z або й через цю точку, що погіршить оцінки інтеграла J. Тому зробимо останню деформацію кривої Γ_+. Якщо $nN \le (y/2\pi)^m$, то відрізок кривої Γ_+, для якого точка ω є серединою, замінимо на півколо, що має цей відрізок діаметром і розташоване нижче діаметра. Якщо $(y/2\pi)^m < nN < y^m$, то той же відрізок кривої Γ_+ замінимо на півколо, розташоване над своїм діаметром. Перетворену криву позначимо Γ'_+. Тепер відрізок $[a+iT,\ a-iT]$, за яким обчислюється інтеграл J, замінимо кривою Γ_T, яка складається з чотирьох частин: 1) відрізка, паралельного дійсній осі, який точку $a+iT$ сполучає з деякою точкою кривої Γ'_+; 2) частини кривої Γ'_+, яка міститься у смузі $0 \le \operatorname{Im} w \le T$; 3) частини кривої Γ_-, яка міститься у смузі $-T \le \operatorname{Im} w \le 0$; 4) відрізка, паралельного дійсній осі, який деяку точку кривої Γ_- сполучає з точкою $a-iT$. Відповідно до цього інтеграл J буде сумою чо тирьох інтегралів:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \kappa, \tag{24}$$

$$\kappa = \begin{cases} \chi^m(z)(nN)^z, & nN \le (y/2\pi)^m; \\ 0, & (y/2\pi)^m < nN; \end{cases}$$

κ — залишок в точці z, якщо при переході до контура Γ_T проходимо над точкою z.

При обчисленнях в верхній півплощині використаємо формулу $\sin(\pi w/2) = (i/2)\exp(-\pi i w/2)\left(1 + O\left(e^{-v}\right)\right)$, тоді інтеграли J_1 і J_2 набудуть вигляду

$$(J_1 + J_2)\left((2\pi i)^{-1}\right)(i/2\pi)^m\,\Gamma^m(1-w)\left((2\pi)^m nNe^{-m\pi i/2}\right)^w\left(1 + O\left(e^{-v}\right)\right)(w-z)^{-1}dw$$

і J_2 наблизиться до формули (10). Фактично асимптотичні розклади інтеграла (10) нам не потрібні, але проведені обчислення показують, що інтеграли від модулів підінтегральних функцій обмежені в порівнянні з модулем першого члена відповідного асимптотичного розкладу.

На кривій, на якій обчислюється інтеграл J_2, виконана умова

$$|w-z| \geq c|\omega|^{1/2} > c(nN)^{1/2m}, \quad c>0. \tag{25}$$

В крузі $|w-z| \leq A|\omega|^{1/2}$ згідно з (16), (17), (19) буде $\Omega(w) = \Omega(\omega) + O(1)$, тому замість (20) для відповідної частини інтеграла J_2 одержимо оцінку $O\big((nN)^{1/2}\big)$. Використовуючи її, а також (22) і (23), маємо

$$J_2 = O\big((nN)^{1/2}\big). \tag{26}$$

Якщо ж n досить велике, наприклад, $n > T^m/N$, то інтеграл J_2 містить лише частину інтеграла I^2 і задовольняє співвідношення (22). Внесок цих членів можна не враховувати, бо він явно поглинається залишковим членом формули (2).

Для оцінки інтеграла J_1 спочатку зауважимо, що за формулою (11)

$$\operatorname{Re}\Omega(a+iT) = m(1/2-a)\log|a+iT| + a\log\big((2\pi)^m nN\big) + O(1),$$

і для модуля підінтегральної функції в точці $w = a + iT$ маємо оцінку

$$O\big(T^{m(1/2-a)-1}(nN)^a\big). \tag{27}$$

Зміна модуля підінтегральної функції на прямій $w = u + iT$ оцінюється з допомогою співвідношення

$$\operatorname{Re}\Omega(u+iT) = \operatorname{Re}\Omega(a+iT) + \int_a^u \operatorname{Re}\Omega'(w)\,dw, \tag{28}$$

де згідно з (12)

$$\operatorname{Re}\Omega'(u+iT) = -m\log|u+iT| + \log\big((2\pi)^m nN\big) + O(1/|u+iT|). \tag{29}$$

Розглянемо тепер окремо три випадки.

Якщо $\left|2\pi(nN)^{1/m} - T\right| \leq c\,T^{1/2}$, $1 < c$, то інтеграл J_1 береться по відрізку, який повністю належить кругу $|w-\omega| \leq c_1|\omega|^{1/2}$, $|\omega| = T(1+o(1))$, і за (16), (17), (19) зміна значення $\Omega(w)$ в цьому крузі є обмеженою величиною. Довжина відрізка інтегрування в усіх випадках є $O\big(\|\omega^{3/5}\|\big)$, і з (27) одержуємо оцінку

$$J_1 = O\big(T^{m(1/2-a)-1}(nN)^{a+3/5m}\big) \tag{30}$$

Якщо $2\pi(nN)^{1/m} < T - cT^{1/2}$, то при великому A в інтегралі J_1 відрізок інтегрування розташований праворуч від точки $a + iT$, отже, $a < u$, згідно з (29) $\operatorname{Re}\Omega'(u+iT) \leq 0$ і згідно з (28) $\operatorname{Re}\Omega(u+iT) \leq \operatorname{Re}\Omega(a+iT)$. Нерівність (30) тепер одержуємо, як і раніше.

Якщо $T + cT^{1/2} < 2\pi(nN)^{1/m}$, то в інтегралі J_1 відрізок інтегрування розташований ліворуч від точки $a + iT$, отже, $u < a$, згідно з (29) маємо $\operatorname{Re}\Omega'(u+iT) \geq 0$, а згідно з (28) $\operatorname{Re}\Omega(u+iT) \leq \operatorname{Re}\Omega(a+iT)$. Нерівність (30) знову доведено.

Інтеграли J_3, J_4 оцінюються в такий же спосіб, як інтеграли J_2, J_1, і оцінки в деяких випадках будуть навіть кращими, бо точка z лежить в верхній півплощині. Підставляючи (26), (30) в (24), а потім (24) в (9), знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{a-iT} \zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}\,dw = \chi^m(z)\sum_{nN\leq(y/2\pi)^m}\frac{d_n}{n^{1-z}} +$$

$$+ O\left(N^{1/2-x}\sum_{n\leq T^m/N}\frac{d_n}{n^{1/2}} + N^{a-x+3/5m}\,T^{m(1/2-a)-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n^{1-a-3/5m}}\right). \tag{31}$$

Як було з'ясовано при доведенні леми 2, при застосуванні оператора F до криволінійного інтеграла під інтегралом з'являється множник типу $O(N/A \times \times |w-z|)$. Якщо F застосовується до J_1, то цей множник дорівнює $O(N/AT) = = O(N^{\varepsilon}/T)$, якщо ж F застосовується до J_2, то згідно з (25) множник дорівнює $O\left(N/A(nN)^{1/2m}\right) = O\left(N^{\varepsilon-1/2m} n^{-1/2m}\right)$. Якщо використано оператор F_q, то в оцінці (30) треба дописати множник $O\left(N^{q\varepsilon} T^{-q}\right)$, а в оцінці (26) — множник $O\left(N^{-q(1/2m-\varepsilon)} n^{-q/2m}\right)$. При застосуванні оператора F_q до рівності (31) залишковий член набуває вигляду

$$O\left(N^{1/2-x-q(1/2m-\varepsilon)} \sum_{n \le T^m/N} n^{-1/2-q/2m} + \right.$$

$$\left. + N^{a-x+3/5m+q\varepsilon} T^{m(1/2-a)-q-1} \sum n^{a+3/5m-1} d_n \right) =$$

$$= O\left(N^{1/2-x-q(1/2m-\varepsilon)}\right) + O\left(N^{a-x+3/5m+q\varepsilon} T^{m(1/2-a)-q-1} \right).$$

Цим доведено вигляд залишкового члена формули (8).

При застосуванні оператора F до головного члена в (31) одержимо

$$\chi^m(z) \frac{1}{A} \int_N^{N+A} \sum_{n \le (y/2\pi)^m/\nu} n^{z-1} d_n \, d\nu =$$

$$= \chi^m(z) \sum_{n \le (y/2\pi)^m/N} n^{z-1} d_n \frac{1}{A} \int_N^{\min(N+A;\ (y/2\pi)^m/n)} d\nu =$$

$$= \chi^m(z) \left(\sum_{n \le (y/2\pi)^m/(N+A)} n^{z-1} d_n + \right.$$

$$\left. + \sum_{(y/2\pi)^m/(N+A) < n \le (y/2\pi)^m/N} n^{z-1} d_n \left((y/2\pi)^m/n - N\right)/A \right).$$

При $q = 1$ числа $b_n(N,\ A,\ 1) = \left((y/2\pi)^m/n - N\right)/A$ є спадаючою від 1 до 0 послідовністю на проміжку $(y/2\pi)^m/(n+A) < n \le (y/2\pi)^m/N$, отже, задовольняють умови леми 3. Індукцією по q покажемо, що числа $b_n(N, A, q)$ задовольняють умови леми 3 при будь-якому q. Нехай при деякому q це так, тоді

$$F_{q+1}\left(\sum_{n \le (y/2\pi)^m/N} n^{z-1} d_n \right) =$$

$$= \int_N^{N+A} \left(\sum_{n \le (y/2\pi)^m/(\nu+qA)} n^{z-1} d_n + \sum_{(y/2\pi)^m/(\nu+qA) < n \le (y/2\pi)^m/\nu} n^{z-1} d_n b_n(\nu,\ A,\ q) \right) d\nu =$$

$$= \sum_{n \le (y/2\pi)^m/(N+qA)} n^{z-1} d_n \frac{1}{A} \int_N^{\min\left(N+A;\ (y/2\pi)^m/n-qA\right)} d\nu +$$

$$+ \sum_{(y/2\pi)^m/(N+(q+1)A) < n \le (y/2\pi)^m/N} n^{z-1} d_n \frac{1}{A} \int_{\max\left(N;\ (y/2\pi)^m/n-qA\right)}^{\min\left(N+A;\ (y/2\pi)^m/n\right)} b_n(\nu,\ A,\ q) \, d\nu =$$

$$= \sum\nolimits_1 n^{z-1} d_n + \sum\nolimits_2 n^{z-1} d_n \frac{1}{A}\left((y/2\pi)^m / n - qA - N + \int_{(y/2\pi)^m/n-qA}^{N+A} b_n(\nu, A, q)\, d\nu \right) +$$

$$+ \sum\nolimits_3 n^{z-1} d_n \frac{1}{A}\int_N^{N+A} b_n(\nu, A, q)\, d\nu + \sum\nolimits_4 n^{z-1} d_n \frac{1}{A}\int_N^{(y/2\pi)^m/n} b_n(\nu, A, q)\, d\nu,$$

де суми Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 беруться відповідно по чотирьох проміжках між точками 1; $(y/2\pi)^m/(N+(q+1)A)$; $(y/2\pi)^m/(N+qA)$; $(y/2\pi)^m/(N+A)$; $(y/2\pi)^m/N$.

Отже,

$$b_n(N, A, q+1) = \begin{cases} \dfrac{(y/2\pi)^m/n - qA - N}{A} + \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_{(y/2\pi)^m/n-qA}^{N+A} b_n(\nu, A, q)\, d\nu; & (32)\\[2ex] \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_N^{N+A} b_n(\nu, A, q)\, d\nu; & (33)\\[2ex] \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_N^{(y/2\pi)^m/n} b_n(\nu, A, q)\, d\nu & (34)\end{cases}$$

відповідно на трьох проміжках між точками $(y/2\pi)^m/(N+(q+1)A)$; $(y/2\pi)^m/(N+qA)$; $(y/2\pi)^m/(N+A)$; $(y/2\pi)^m/N$.

Тепер монотонність чисел $b_n(N, A, q+1)$ можна довести приблизно так, як в лемі 1. Докладніше обгрунтуємо зображення чисел $b_n(N, A, q+1)$ поліномами на відповідних проміжках.

Нехай $(|y|/2\pi)^m/(N+(q+1)A) \le n \le (|y|/2\pi)^m/(N+qA)$. Тоді для будь-якого $\nu \in \left[(|y|/2\pi)^m/n - qA;\ N+A\right]$ виконано співвідношення

$$(|y|/2\pi)^m/(\nu+qA) \le n \le (|y|/2\pi)^m/(N+qA) \le (|y|/2\pi)^m/(\nu+(q-1)A).$$

За індуктивним припущенням, $b_n(\nu, A, q) = D_{q,\,q-1}\left(\left((|y|/2\pi)^m/n - \nu\right)/A\right)$, і після підстановки цього виразу в (32) одержимо

$$b_n(N, A, q+1) = \frac{(|y|/2\pi)^m/n - N - qA}{A} + \int\limits_{\left[(|y|/2\pi)^m/n-N\right]/A-1}^{q} D_{q,\,q-1}(r)\, dr.$$

Видно, що на проміжку $\left[(|y|/2\pi)^m/(N+(q+1)A);\ (|y|/2\pi)^m/(N+qA)\right]$ числа $b_n(N, A, q+1)$ дійсно визначаються так, як стверджує теорема.

Розглянемо тепер проміжок $(|y|/2\pi)^m/(N+(j+1)A) \le n \le (|y|/2\pi)^m/(N+jA)$, $j = q-1, q-2, \ldots 1$. Відрізок $[N,\ N+A]$, по якому береться інтеграл у формулі (33), розіб'ємо на два відрізки точкою $(|y|/2\pi)^m/n - jA$. Якщо ν лежить на першому з цих відрізків, то

$$(|y|/2\pi)^m/(\nu+(j+1)A) \le (|y|/2\pi)^m/(N+(j+1)A) \le n \le (|y|/2\pi)^m/(\nu+jA),$$

і за індуктивним припущенням $b_n(\nu, A, q) = D_{q,\,j}\left(\left((|y|/2\pi)^m/n - N\right)/A\right)$ на першому з розглядуваних відрізків. Якщо ж ν лежить на другому з можливих відрізків, то

$$(|y|/2\pi)^m/(\nu+jA) \le n \le (|y|/2\pi)^m/(N+jA) \le (|y|/2\pi)^m/(\nu+(j-1)A),$$

і за індуктивним припущенням $b_n(\nu, A, q) = D_{q,\,j-1}\left(\left((|y|/2\pi)^m/n - \nu\right)/A\right)$ на другому з розглядуваних відрізків. Підставляючи знайдені значення $b_n(\nu, A, q)$ в (33), одержуємо

$$b_n(N, A, q+1) = \int_{j}^{[(|y|/2\pi)^m/n-N]/A} D_{q,j}(r)dr + \int_{[(|y|/2\pi)^m/n-N-A]/A}^{j} D_{q,j-1}(r)dr,$$

і знову приходимо до потрібного висновку.

Нарешті, нехай $(|y|/2\pi)^m/(N+A) \le n \le (|y|/2\pi)^m/N$. Тоді для будь-якого $\nu \in \left[N;\ (|y|/2\pi)^m/n\right]$ виконується співвідношення

$$(|y|/2\pi)^m/(\nu+A) \le (|y|/2\pi)^m/(N+A) \le n \le (|y|/2\pi)^m/\nu.$$

За індуктивним припущенням $b_n(\nu, A, q) = D_{q,0}\left(\left((|y|/2\pi)^m/n-\nu\right)/A\right)$, і після підстановки цього виразу в (34) одержимо

$$b_n(N, A, q+1) = \int_{0}^{[(|y|/2\pi)^m/n-N]/A} D_{q,0}(r)dr,$$

і знову числа $b_n(N, A, q+1)$ визначаються через алгебраїчний поліном. Лему 3 доведено.

Закінчимо доведення теореми. За теоремою про лишки

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{b+iT} + \int_{b+iT}^{a+iT} + \int_{a+iT}^{a-iT} + \int_{a-iT}^{b-iT}\right)\left(\zeta^m(w)\frac{N^{w-z}}{w-z}dw\right) = \zeta^m(z) + N^{1-z}P_{m-1}(\log N), \quad (35)$$

$$N^{1-z}P_{m-1}(\log N) = \operatorname*{Res}_{w=1}\zeta^m(w)\,N^{w-z}/(w-z),$$

$P_{m-1}(\log N)$ — деякий поліном від $\log N$ степеня $m-1$, коефіцієнти якого залежать від z.

Застосуємо до рівності (35) оператор F_q. Праворуч константа $\zeta^m(z)$ перейде в себе, а член $N^{1-z}P_{m-1}(\log N)$ при кожному застосуванні оператора F буде одержувати додатковий множник $O(N/A|z|) = O\left(N^{-\varepsilon}\right)$. Якщо q достатньо велике, то $F_q\left(N^{1-z}P_{m-1}(\log N)\right) = O\left(N^{-l}\right)$, тобто внесок від цього члена поглинається залишком. Застосування оператора F_q до лівої частини рівності (35) визначається співвідношеннями (3), (6), (8). Якщо q достатньо велике, то можна спрямувати $T \to +\infty$, і доданки, що містять T, перейдуть в нуль, а залишковий член $O\left(N^{1/2-x-q(1/2m-\varepsilon)}\right)$, за рахунок вибору великого q, знову можна записати як $O\left(N^{-l}\right)$.

Теорему доведено.

1. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 407 с.
2. *Гельфонд А.О.* О некоторых фукциональных уравнениях, являющихся следствиями уравнений типа Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, №4. – С. 469–474.
3. *Chandrasekharan K., Narasimhan Raghavan.* The Approximate Functional Equation for a class of Zeta-functions // Math. Ann. – 1963. – **152**, N1. – P. 30–64.
4. *Лаврик А.Ф.* О функциональных уравнениях функций Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, №2. – С. 431–442.
5. *Гриценко С.А.* Приближенное функциональное уравнение для произведения двух L-функций Дирихле // Изв. РАН. Сер. мат. – 1994. – **58**, №5. – С. 26–52.
6. *Titchmarsh E.C.* The theory of the Riemann zeta-function. – New York: The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1986. – 412 p.
7. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. — М.: Физматгиз, 1994. – 376 с.

Одержано 17.05.95