УДК 517.938

А. М. Самойленко, О. А. Бурилко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПИТАННЯ ГЛАДКОСТІ ФУНКЦІЇ ГРІНА ЗАДАЧІ ПРО ОБМЕЖЕНІ ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ

We investigate the smoothness of the Green function and of bounded invariant manifolds of linear extensions of dynamical systems.

Досліджуються питання гладкості функції Гріна і обмежених інваріантних многовидів лінійних розширень динамічних систем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\psi)x, \tag{1}$$

де $\psi \in \boldsymbol{R}^m$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, вектор-функція $a(\psi)$ і матрична функція $A(\psi)$ визначені при всіх $\psi \in \boldsymbol{R}^m$ і неперервні за сукупністю змінних $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Відносно вектор-функції $a(\psi)$ будемо також додатково припускати, що задача Коші

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi), \qquad \psi|_{t=0} = \psi_0, \tag{2}$$

має єдиний розв'язок $\psi_t(\psi_0)$, визначений при всіх $t \in \boldsymbol{R}$ і неперервно залежний від ψ_0. Позначимо через $C^0(\boldsymbol{R}^m)$ простір функцій $F(\psi)$, неперервних за сукупністю змінних $\psi_1, \ldots, \psi_m$ і обмежених на $\boldsymbol{R}^m$; через $C^q(\boldsymbol{R}^m)$, $q \geq 1$, — простір функцій, що мають всі неперервні частинні похідні до q-го порядку включно за кожною змінною ψ_j, $j = \overline{1, m}$, а саме $D_\psi^p F(\psi)$ — будь-яка частинна похідна порядку $|p| = \sum_{i=1}^m p_m$ функції $F(\psi)$ за змінними $(\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_m) = \psi$; через $C'(\boldsymbol{R}^m; a)$ — підпростір простору $C^0(\boldsymbol{R}^m)$ функцій $F(\psi)$ таких, що функція $F(\psi_t(\psi))$ — неперервно диференційовна по t при всіх $t \in$ $\in \boldsymbol{R}$, $\psi_0 \in \boldsymbol{R}^m$ і при цьому

$$\left.\frac{d}{dt} F(\psi_t(\psi))\right|_{t=0} := \dot{F}(\psi) \in C^0(\boldsymbol{R}^m).$$

Вивченню обмежених інваріантних многовидів динамічних систем присвячена велика кількість робіт [1–6]. Введення функції Гріна задачі про інваріантний тор [2] дозволило з єдиної точки зору викласти теорію збурення як диференційовних, так і неперервних інваріантних многовидів динамічних систем і призвело до необхідності вивчення властивостей цієї функції (гладкість, грубість та ін.). Зокрема, властивості гладкості функцій $G_0(\tau, \psi)$ та $u(\psi)$ достатньо вивчені у випадку, коли матрична функція $A(\psi)$ та векторна функція $a(\psi)$ є 2π-періодичними за кожною змінною ψ_j, $j = \overline{1, m}$, тобто задані на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$ [4]. Незважаючи на те, що значна кількість властивостей такої системи зберігається і у випадку, коли ці функції задані не на компактному многовиді, а в усьому просторі $\boldsymbol{R}^m$ [4, 5], у вивченні питань гладкості виникають суттєві відмінності і труднощі. Це пов'язано в першу чергу з тим, що в загальному випадку функції в правих частинах системи (1), а також її похідні можуть бути необмеженими. В даній роботі виділимо деякі класи функцій, належність до яких $a(\psi)$, $A(\psi)$ та $f(\psi)$ гарантувала б гладкість єдиної функції Гріна і обмеженого інваріантного многовиду системи (1).

© А. М. САМОЙЛЕНКО, О. А. БУРИЛКО, 1998

Відомо [2], що система (1) має функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди, якщо існує $n \times n$-вимірна матриця $C(\psi) \in C^0(\boldsymbol{R}^m)$ така, що для функції

$$G_0(\tau, \psi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\psi) C(\psi_\tau(\psi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\psi)[C(\psi_\tau(\psi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

виконується оцінка

$$\| G_0(\tau, \psi) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\}, \tag{4}$$

де додатні сталі K, γ не залежать від $\psi \in \boldsymbol{R}^m$, $t \in \boldsymbol{R}$, $\Omega_0^t(\psi)$ — матрицант лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(\psi_t(\psi))x$, $\Omega_0^t(\psi)|_{t=0} = I_n$. При цьому функція вигляду $G_0(\tau, \psi)$ називається функцією Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди для системи (1). Існування вказаної вище функції веде до існування обмеженого інваріантного многовиду системи рівнянь

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\psi)x + f(\psi) \tag{5}$$

для кожної вектор-функції $f(\psi) \in C^0(\boldsymbol{R}^m)$ і цей многовид може бути зображений таким чином:

$$x = u(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \psi) f(\psi_\tau(\psi)) d\tau. \tag{6}$$

Нагадаємо, що рівністю $x = u(\psi)$ задається обмежений інваріантний многовид системи (5), якщо $u(\psi) \in C'(\boldsymbol{R}^m; a)$ і виконується тотожність $\dot{u}(\psi) \equiv \equiv A(\psi)u(\psi) + f(\psi)$ для всіх $\psi \in \boldsymbol{R}^m$.

Відмітимо, що виконання оцінки (4) для функції Гріна (3) є еквівалентним виконанню оцінки

$$\| G_t(\tau, \psi) \| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\} \tag{7}$$

для функції $G_t(\tau, \psi) = \Omega_0^t(\psi) G_0(\tau, \psi)$. Останнє випливає з тотожності для матрицанта системи (1): $\Omega_\tau^t(\psi_\theta(\psi)) \equiv \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\psi)$, яка виконується для будь-яких $t, \tau, \theta \in \boldsymbol{R}$.

Для доведення основних результатів нам необхідні умови збіжності, а також оцінка інтегралу

$$J(\tau, t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma(|t - \sigma| + |\sigma - \tau|) + $$

$$+ \mu_1|\sigma| + \mu_2 \max\{|\sigma|, |\tau|\} + \mu_3 \max\{|\sigma|, |t|\}\} d\sigma \tag{8}$$

з параметрами $t, \tau \in \boldsymbol{R}$, де γ, μ_1 — додатні, а μ_2, μ_3 — невід'ємні константи. Сформулюємо попередній результат.

Лема. *При виконанні умови*

$$2\gamma > \mu, \tag{9}$$

де $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, *інтеграл* $J(\tau, t, \mu)$ *збігається для всіх* $t, \tau \in \boldsymbol{R}$ *і справедлива оцінка*

$$J(\tau, t, \mu) \le K \exp\{-\gamma|t-\tau| + \mu \max\{|t|, |\tau|\},$$

де $K = \dfrac{2(2\gamma + \max\{\gamma, \mu\})}{\mu_1(2\gamma - \mu)}$.

Доведення. Розіб'ємо координатну площину $O\tau t$ прямими $t = 0$, $\tau = 0$, $t = \tau$ і $t = -\tau$ на вісім частин. На кожній з цих частин будемо розглядати інтеграл $J(t, \tau, \mu)$ як суму інтегралів, межі яких вибрані так, щоб позбутись модулів у підінтегральних виразах. Нехай $0 \le t \le \tau$, тоді можемо записати

$$J(t, \tau, \mu) = \int_{-\infty}^{-\tau} \exp\{-\gamma(t-\tau) - \gamma(\tau-\sigma) - \mu_1\sigma - \mu_2\sigma - \mu_3\sigma\} d\sigma +$$

$$+ \int_{-\tau}^{-t} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\tau-\sigma) - \mu_1\sigma + \mu_2\tau - \mu_3\sigma\} d\sigma +$$

$$+ \int_{-t}^{0} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\tau-\sigma) - \mu_1\sigma + \mu_2\tau + \mu_3 t\} d\sigma +$$

$$+ \int_{0}^{t} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\tau-\sigma) + \mu_1\sigma + \mu_2\tau + \mu_3 t\} d\sigma +$$

$$+ \int_{t}^{\tau} \exp\{-\gamma(\sigma-t) - \gamma(\tau-\sigma) + \mu_1\sigma + \mu_2\tau + \mu_3\sigma\} d\sigma +$$

$$+ \int_{\tau}^{+\infty} \exp\{-\gamma(\sigma-t) - \gamma(\sigma-\tau) + \mu_1\sigma + \mu_2\sigma + \mu_3\sigma\} d\sigma. \tag{10}$$

Умова (9) гарантує збіжність кожного з інтегралів розкладу (10). З умови $0 \le t \le \tau$ також випливає, що $-\gamma(t+\tau) < -\gamma|\tau - t|$. Отже, маємо

$$J(t, \tau, \mu) = \frac{1}{2\gamma - \mu} \exp\{-\gamma(t + 3\tau) + \mu\tau\} +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma - \mu_1 - \mu_3} \exp\{-\gamma(t+\tau) + \mu_2\tau\}(\exp\{-(2\gamma - \mu_1 - \mu_3)t\} -$$

$$- \exp\{-(2\gamma - \mu_1 - \mu_3)\tau\}) +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma - \mu_1} \exp\{-\gamma(t-\tau) + \mu_2\tau + \mu_3 t\}(1 - \exp\{-(2\gamma - \mu_1)t\}) +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma + \mu_1} \exp\{-\gamma(t-\tau) + \mu_2\tau + \mu_3 t\}(\exp\{(2\gamma + \mu_1)t\} - 1) +$$

$$+ \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} \exp\{-\gamma(\tau - t) + \mu_2\tau\}(\exp\{(\mu_1 + \mu_3)\tau\} - \exp\{(\mu_1 + \mu_3)t\}) +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma - \mu} \exp\{-\gamma(\tau - t) + \mu\tau\} \le$$

$$\le K_1 \exp\{-\gamma(\tau - t) + \mu\tau\} = K_1 \exp\{-\gamma|\tau - t| + \mu|\tau|\},$$

де $K_1 = \dfrac{2(2\gamma + \mu)}{\mu_1(2\gamma - \mu)}$.

Розглянемо один з випадків, коли параметри t і τ лежать по різні боки від нуля, а саме нехай $-t \le \tau \le 0$. Тоді отримаємо

$$J(t,\tau,\mu) = \int_{-\infty}^{-t} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\tau-\sigma) - \mu_1\sigma - \mu_2\sigma - \mu_3\sigma\}d\sigma +$$

$$+ \int_{-t}^{-\tau} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\tau-\sigma) - \mu_1\sigma - \mu_2\sigma + \mu_3 t\}d\sigma +$$

$$+ \int_{\tau}^{0} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\sigma-\tau) - \mu_1\sigma - \mu_2\tau + \mu_3 t\}d\sigma +$$

$$+ \int_{0}^{-\tau} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\sigma-\tau) + \mu_1\sigma - \mu_2\tau + \mu_3 t\}d\sigma +$$

$$+ \int_{-\tau}^{t} \exp\{-\gamma(t-\sigma) - \gamma(\sigma-\tau) + \mu_1\sigma + \mu_2\sigma + \mu_3 t\}d\sigma +$$

$$+ \int_{t}^{+\infty} \exp\{-\gamma(\sigma-t) - \gamma(\sigma-\tau) + \mu_1\sigma + \mu_2\sigma + \mu_3\sigma\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\gamma-\mu}\exp\{-\gamma(3t+\tau) + \mu t\} +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma-\mu_1-\mu_2}\left(\exp\{(2\gamma-\mu_1-\mu_2)\tau\} - \exp\{-(2\gamma-\mu_1-\mu_2)t\}\right) +$$

$$+ \frac{2}{\mu_1}\exp\{-\gamma(t-\tau) - \mu_2\tau + \mu_3 t\}(\exp\{-\mu_1\tau\} - 1) +$$

$$+ \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\exp\{-\gamma(t-\tau) + \mu_3 t\}\left(\exp\{(\mu_1+\mu_2)t\} - \exp\{-(\mu_1+\mu_2)\tau\}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma-\mu}\exp\{-\gamma(t-\tau) + \mu t\} \le$$

$$\le K_2 \exp\{-\gamma|t-\tau| + \mu|t|\},$$

де $K_2 = \dfrac{3\gamma}{\mu_1(2\gamma-\mu)}$. Тут також використовували умову (9).

Розглянувши інші три випадки для параметрів, що лежать у першому та третьому квадрантах площини $O\tau t$, і проводячи відповідно заміни змінних $t \to \tau$, $\tau \to t$, або $t \to -t$, $\tau \to -\tau$, або $t \to -\tau$, $\tau \to -t$, переконуємось, що вони зводяться до першого з досліджених вище. Випадки параметрів, що лежать у двох інших квадрантах цієї ж координатної площини, тими ж замінами зводяться до другого з наведених вище. Таким чином, отримаємо оцінки інтегралу (9) для параметрів, що лежать у кожній з восьми частин $O\tau t$. Поклавши $K = \max\{K_1, K_2\}$, завершуємо доведення леми.

Позначимо через $C^q_\nu(\boldsymbol{R}^m)$ клас матричних або векторних функцій $F(\psi) \in C^q(\boldsymbol{R}^m)$ таких, що для деяких додатних сталих α, α_p, α'_p, ν виконуються оцінки

$$\|F(\psi)\| \le \alpha, \quad \|D_\psi^p F(\psi)\| \le \alpha_p \|\psi\|^{\nu|p|} + \alpha'_p \tag{11}$$

для всіх цілочислових векторів $p = (p_1, \ldots, p_m)$ таких, що $|p| = p_1 + \ldots$ $\ldots + p_m \le q$. Наприклад, $F(\psi) = \sin\psi^2$. Відносно вектор-функції $a(\psi)$ припускаємо, що

$$\|a(\psi)\| \le \alpha_1 \|\psi\| + \alpha_2, \tag{12}$$

$$\sup_{\psi \in \boldsymbol{R}^m} \|D_\psi^p a(\psi)\| < +\infty, \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{13}$$

де $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Прикладом таких функцій можуть бути $a(\psi) = \psi \sin \ln(1 + \psi^2)$ та інші. Доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай система рівнянь* (1) *має єдину функцію Гріна* (3) *з оцінкою* (4), $a(\psi) \in C^q(\boldsymbol{R}^m)$ *така, що виконується* (12), (13) *і* $A(\psi) \in C_\nu^q(\boldsymbol{R}^m)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$2\gamma > q(\alpha_0 + \alpha_1 \nu), \tag{14}$$

де

$$\alpha_0 = \sup_{\psi \in \boldsymbol{R}^m} \left(\max_{\|\eta\| = 1} \left| \left\langle \frac{\partial a(\psi)}{\partial \psi} \eta, \eta \right\rangle \right| \right), \tag{15}$$

функція Гріна $G_t(\tau, \psi)$ *має всі неперервні частинні похідні до порядку* q *включно і справедливі оцінки*

$$\|D_\psi^p G_t(\tau, \psi)\| \le \exp\{-\gamma|t - \tau| + |p|(\alpha_0 + \alpha_1 \nu)\max\{|t|, |\tau|\}\} \times$$
$$\times (K_p \|\psi\|^{\nu|p|} + K'_p), \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{16}$$

де K_p, K'_p *— деякі додатні сталі, не залежні від* ψ, t, τ.

Доведення. Внаслідок єдиності функції Гріна, згідно з [4], різницю $G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi})$ можна подати як

$$G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\sigma, \psi)[A(\psi_\sigma(\psi)) - A(\psi_\sigma(\overline{\psi}))] G_\sigma(\tau, \overline{\psi})\, d\sigma. \tag{17}$$

Оскільки в оцінці (7) сталі K і γ не залежать від ψ і τ, то обмеженість матричної функції $A(\psi)$ на всьому просторі $\boldsymbol{R}^m$ забезпечує рівномірну збіжність за параметрами ψ, $\overline{\psi}$ інтеграла (17). Тому права частина нерівності

$$Z(\psi, \overline{\psi}) := \|G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi})\| \le$$
$$\le K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\gamma(|t - \sigma| + |\sigma - \tau|)\} \|A(\psi_\sigma(\psi)) - A(\psi_\sigma(\overline{\psi}))\|\, d\sigma \le$$
$$\le K^2 \exp\{-\gamma(|t - \tau| + \delta \max\{|t|, |\tau|\}\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\delta|\sigma|\} \|A(\psi_\sigma(\psi)) - A(\psi_\sigma(\overline{\psi}))\|\, d\sigma$$

є неперервною функцією за сукупністю змінних ψ, $\overline{\psi}$, де δ — деяке фіксоване число з проміжку $(0, 2\gamma)$, крім того, при $\psi = \overline{\psi}$ виконується $Z(\overline{\psi}, \overline{\psi}) = 0$. Це дозволяє зробити висновок про неперервну залежність функції Гріна $G_0(\tau, \psi)$ від змінних ψ.

Нехай $\psi - \overline{\psi} = (0, \ldots, 0, \psi_i - \overline{\psi}_i, 0, \ldots, 0)$, $\psi_i \neq \overline{\psi}_i$ для деякого $i = \overline{1, m}$. Тоді, поділивши (17) на $\psi_i - \overline{\psi}_i$, одержимо

$$\frac{G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi})}{\psi_i - \overline{\psi}_i} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\sigma, \psi) \frac{A(\psi_\sigma(\psi)) - A(\psi_\sigma(\overline{\psi}))}{\psi_i - \overline{\psi}_i} G_\sigma(\tau, \overline{\psi})\, d\sigma .$$

Враховуючи неперервну залежність функції Гріна від змінної ψ, формально перейдемо в останній рівності до границі при $\overline{\psi}_i \to \psi_i$. Маємо

$$\frac{\partial G_t(\tau, \psi)}{\partial \psi_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(t, \tau, \sigma, \psi) d\sigma , \tag{18}$$

де

$$N_1(t, \tau, \sigma, \psi) = G_t(\sigma, \psi) \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial A(\psi_\sigma(\psi))}{\partial \psi_{\sigma_k}} \frac{\partial \psi_{\sigma_k}}{\partial \psi_i} \right] G_\sigma(\tau, \psi) . \tag{19}$$

Цей перехід є законним кожен раз, коли інтеграл справа рівномірно збігається по $\psi \in D$ в кожній обмеженій області $D \in \boldsymbol{R}^m$.

Проведемо оцінку підінтегрального виразу (19). Спершу оцінимо розв'язок $\psi_t(\psi)$ задачі Коші (2) та його похідні. Зобразимо його в інтегральній формі

$$\psi_t(\psi) = \psi + \int_0^t a(\psi_\tau(\psi))\, d\tau , \tag{20}$$

вважаючи, що $t \geq 0$. Тоді, використовуючи (12), можемо записати

$$\| \psi_t(\psi) \| \leq \|\psi\| + \int_0^t (\alpha_1 \|\psi_\sigma(\psi)\| + \alpha_2)\, d\sigma ,$$

звідки випливає [7], що

$$\| \psi_t(\psi) \| \leq \|\psi\| \exp\{\alpha_1 |t|\} + \alpha_2 \alpha_1^{-1} (\exp\{\alpha_1 |t|\} - 1) \leq$$

$$\leq (\|\psi\| + \alpha_2 \alpha_1^{-1}) \exp\{\alpha_1 |t|\} . \tag{21}$$

Аналогічно переконуємось, що оцінка (21) є справедливою і при $t < 0$.

Із належності вектор-функції $a(\psi)$ простору $C^q(\boldsymbol{R}^m)$ випливає, що розв'язок $\psi_t(\psi)$ системи (2) також належить цьому простору для будь-яких $t \in \boldsymbol{R}$. Підставимо розв'язок $\psi_t(\psi)$ в систему (2). Отриману тотожність маємо право q раз продиференціювати за будь-якими змінними ψ_j, $j = \overline{1, m}$. Маємо

$$\frac{d}{dt} (D_\psi^p \psi_t(\psi)) \equiv D_\psi^p a(\psi(\psi)), \quad |p| = \overline{1, q} . \tag{22}$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t\left(\dfrac{\partial a}{\partial \psi}\right)$ нормальну фундаментальну матрицю розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial a(\psi)}{\partial \psi}\Big|_{\psi = \psi_t(\psi)}\right) y, \quad y \in \boldsymbol{R}^m.$$

Тоді з обмеженості перших похідних функції $a(\psi)$ випливає оцінка

$$\left\|\Omega_\tau^t\left(\frac{\partial a}{\partial \psi}\right)\right\| \le C_1 \exp\{\alpha_0 |t-\tau|\}, \tag{23}$$

де $C_1 = \text{const} > 0$, α_0 визначена рівністю (15). Таким чином, отримано оцінку для перших похідних $\psi_t(\psi)$. При $|p| = 2$ рівність (23) матиме вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a(\psi)}{\partial \psi}\Big|_{\psi = \psi_t(\psi)}\right)\frac{\partial^2 \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} + R_2(\psi_t(\psi)), \tag{24}$$

де

$$R_2(\psi_t(\psi)) = \operatorname{colon}\left(\sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 a_1(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_{t_l} \partial \psi_{t_k}} \frac{\partial \psi_{t_k}}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_{t_l}}{\partial \psi_i}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 a_m(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_{t_l} \partial \psi_{t_k}} \frac{\partial \psi_{t_k}}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_{t_l}}{\partial \psi_i}\right), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi}\Big|_{t=0} = \operatorname{colon}\big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-i}\big),$$

то $[D_\psi^p \psi_t(\psi)]\big|_{t=0} = 0$ при $|p| = \overline{2, q}$. Тоді, записавши другу похідну від $\psi_t(\psi)$ як розв'язок лінійної неоднорідної системи (24) з неоднорідністю $R_2(\psi_t(\psi))$, при $t \ge 0$ маємо

$$\frac{\partial^2 \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} = \int_0^t \Omega_\sigma^t\left(\frac{\partial a}{\partial \psi}\right) R_2(\psi_\sigma(\psi))\, d\sigma.$$

Враховуючи оцінку (23) для перших похідних та обмеженість похідних $a(\psi)$ (13), можемо записати

$$\left\|\frac{\partial^2 \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{\partial^2 a}{\partial \psi^2}\right\|_0 m C_1^3 \int_0^t \exp\{\alpha_0 |t-\sigma| + 2\alpha_0 |\sigma|\}\, d\sigma = C_2 \exp\{2\alpha_0 |t|\}. \tag{25}$$

Цю ж оцінку для других похідних одержуємо аналогічно і при $t < 0$.

Далі, використовуючи метод математичної індукції, доведемо загальну оцінку

$$\|D_\psi^p \psi_t(\psi)\| \le C_p \exp\{\alpha_0 |p||t|\}, \quad |p| = \overline{1, q}. \tag{26}$$

Починаючи з другої похідної, ця оцінка еквівалентна наступній:

$$\left\| D_\psi^{p_1} \left(\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right) \right\| \le C_p \exp\{\alpha_0(|p_1| + 1)|t|\}, \quad |p_1| = \overline{1, q-1}, \tag{27}$$

де вектор p_1 — такий, що $|p_1| + 1 = |p|$. Як було доведено вище, нерівність (27) виконується при $|p_1| = 1$ (нерівність (25)). Припустимо, що (27) є дійсною для всіх $|p_1| \le |l| - 1$. Доведемо, що тоді вона виконується і для $|p_1| = |l|$. Рівність (22) при $p_1 = l$ можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\left(D_\psi^l \left(\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right) \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi} \left(D_\psi^l \left(\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right) \right) + R_l(\psi_t(\psi)), \tag{28}$$

де

$$R_l(\psi_t(\psi)) = D_\psi^l \left[\frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right] - \frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \left(D_\psi^l \left(\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right) \right).$$

$R_l(\psi_t(\psi))$ має вигляд диференціального виразу, що містить доданками такі добутки

$$D_\psi^{l-j} \left(\frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \right) D_\psi^j \left(\frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_\nu} \right),$$

j — цілочисловий вектор, $|j| = \overline{0, |l| - 1}$, $\nu = \overline{1, m}$, зі сталими коефіцієнтами. Тут

$$D_\psi^{l-j} \left(\frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \right) = \sum_{\sigma=1}^{|l-j|} D_{\psi_t}^\sigma \left(\frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \right) \times$$

$$\times \sum_\eta C_{\sigma\eta} (D_\psi \psi_t(\psi))^{\eta_1} (D_\psi^2 \psi_t(\psi))^{\eta_2} \ldots (D_\psi^{l-j} \psi_t(\psi))^{\eta_{l-j}},$$

де

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{l-j} = \sigma, \quad \eta_1 + 2\eta_2 + \ldots + |l-j|\eta_{l-j} = |l-j|,$$

$C_{\sigma\eta}$ — деякі додатні константи. Тоді, враховуючи (13) і припущення індукції, можемо записати оцінку

$$\left\| D_\psi^{l-j} \left(\frac{\partial a(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_t} \right) D_\psi^j \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial \psi} \right) \right\| \le$$

$$\le M \exp\{\alpha_0(|l-j||t| + (|j|+1)\alpha_0|t|\} =$$

$$= M \exp\{\alpha_0(|l|+1)|t|\} \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{R}, \tag{29}$$

де

$$M = C_{j+1} \sum_{\sigma=1}^{|l-j|} \sup_{\psi \in \boldsymbol{R}^m} \|D_\psi^{\sigma+1} a(\psi)\| \sum_\eta C_{\sigma\eta} \sum_{k=1}^{|l-j|} C_k^{\eta_k}.$$

Розглядаючи (28) як неоднорідну систему рівнянь, для частинних похідних $D_{\psi}^{l}\left(\frac{\partial\psi_t(\psi)}{\partial\psi_i}\right)$ при $t \geq 0$ маємо рівність

$$D_{\psi}^{l}\left(\frac{\partial\psi_t(\psi)}{\partial\psi_i}\right) = \int\limits_0^t \Omega_\tau^t\left(\frac{\partial a}{\partial\psi}\right) R_l(\psi_\tau(\psi))\, d\tau,$$

звідки, враховуючи (23) та (29), отримаємо оцінку (27) при $|p_1| = |l|$. Аналогічно одержимо оцінку для $t < 0$. Отже, нерівність (26) виконується при всіх $|p| = \overline{1, q}$.

Оцінки (11), (21) дозволяють отримати наступну нерівність:

$$\|D_{\psi_t(\psi)}^{p} A(\psi_t(\psi))\| \leq \alpha_p \|\psi_t(\psi)\|^{\nu|p|} + \alpha_p' \leq$$

$$\leq \alpha_p(\|\psi\| + \alpha_2\alpha_1^{-1})^{\nu|p|}\exp\{\alpha_1\nu|p||t|\} + \alpha_p' \leq$$

$$\leq \alpha_p' K(\nu|p|)(\|\psi\|^{\nu|p|} + (\alpha_2\alpha_1^{-1})^{\nu|p|})\exp\{\alpha_1\nu|p||t|\} + \alpha_p' =$$

$$= (\overline{\alpha}_p\|\psi\|^{\nu|p|} + \overline{\beta}_p)\exp\{\alpha_1\nu|p||t| + \alpha_p'\}, \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{30}$$

де $\overline{\alpha}_p = \alpha_p K(\nu|p|)$, $\overline{\beta}_p = \alpha_p K(\nu|p|)\alpha_2^{\nu|p|}\alpha_1^{-\nu|p|}$,

$$K(z) = \begin{cases} 2^{z-1}, & z > 1, \\ 1, & z \in [0; 1]. \end{cases}$$

Тепер, маючи необхідні оцінки (26), (30) та враховуючи (7), можемо оцінити підінтегральний вираз (19):

$$\|N_1(t, \tau, \sigma, \psi)\| \leq$$

$$\leq K^2 C_1\sqrt{m}\,[(\overline{\alpha}_1\|\psi\|^{\nu} + \overline{\beta}_1)\exp\{\alpha_1\nu|\sigma|\} + \alpha_1']\times$$

$$\times\exp\{-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) + \alpha_0|\sigma|\} \leq$$

$$\leq (K_1\|\psi\|^{\nu} + \overline{K}_1)\exp\{-\gamma(|t-\tau| + |\sigma-\tau|) + (\alpha_0 + \alpha_1\nu)|\sigma|\}, \tag{31}$$

де $K_1 = K^2 C_1\sqrt{m}\,\overline{\alpha}_1$, $\overline{K}_1 = K^2 C_1\sqrt{m}\,(\overline{\beta}_1 + \alpha_1')$. Використовуючи лему при $\mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\nu$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$, бачимо, що нерівність (14) при $q = 1$ гарантує рівномірну збіжність інтеграла (18). Тому існують всі частинні похідні функції Гріна $\frac{\partial G_t(\tau, \psi)}{\partial\psi_i}$, $i = \overline{1, m}$. Також із нерівності (31) випливає оцінка (16) при $|p| = 1$.

Таким чином, отримано твердження теореми при $q = 1$. Використовуючи метод математичної індукції, доведемо теорему в цілому. Припустимо, що функція Гріна має всі неперервні частинні похідні до порядку $q \leq |l| - 1$, де $l = (l_1, \ldots, l_m)$, $|l| = \sum_{i=1}^{m} l_i$. Також нехай виконуються оцінки (16) для всіх p таких, що $|p| = \overline{1, |l| - 1}$. Доведемо, що виконання нерівності (14) для $q = |l|$ гарантує умову $G_t(\tau, \psi) \in C^l(\boldsymbol{R}^m)$ і виконання оцінки (16) для цього ж значення q.

Аналогічно (18) похідні функції Гріна $|l|$-го порядку подамо у вигляді

$$D_\psi^l G_t(\tau, \psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3|=|l|} C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \times$$

$$\times D_\psi^{\lambda_1} G_t(\sigma, \psi)\, D_\psi^{\lambda_2} A(\psi_\sigma(\psi))\, D_\psi^{\lambda_3} G_\sigma(\tau, \psi)\, d\sigma, \tag{32}$$

де $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ — деякі додатні сталі, $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im})$, $\lambda_{1j} \geq 0$, $\lambda_{2j} \geq 1$, $\lambda_{3j} \geq \geq 0$, $|\lambda_i| = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}$,

$$D_\psi^{\lambda_2} A(\psi_t(\psi)) = \sum_{\theta=1}^{|\lambda_2|} D_\psi^\theta A(\psi)|_{\psi=\psi_\sigma(\psi)} \times$$

$$\times \sum_\omega C_{\theta\omega} (D_\psi \psi_\sigma(\psi))^{\omega_1} (D_\psi^2 \psi_\sigma(\psi))^{\omega_2} \ldots (D_\psi^{\lambda_2} \psi_\sigma(\psi))^{\omega_{\lambda_2}}, \tag{33}$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{\lambda_2} = \theta, \quad \omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + |\lambda_2|\omega_{\lambda_2} = |\lambda_2|.$$

Оскільки $|\lambda_1| \leq |l| - 1$ і $|\lambda_3| \leq |l| - 1$, то для похідних функцій Гріна у підінтегральному виразі згідно з припущенням індукції виконуються нерівності (16). Також згідно з (26) і (30) маємо

$$\|D_\psi^{\lambda_2} A(\psi_\sigma(\psi))\| \leq \sum_{\theta=1}^{|\lambda_2|} [(\alpha_\theta \|\psi\|^{\nu\theta} + \beta_\theta) \exp\{\alpha_1 \nu\theta|\sigma|\}] \times$$

$$\times \sum_\omega \overline{C}_{\theta\omega} \exp\{\alpha_0(\omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + |\lambda_2|\omega_{\lambda_2})|\sigma|\} \leq$$

$$\leq (M_{\lambda_2} \|\psi\|^{\nu|\lambda_2|} + \overline{M}_{\lambda_2}) \exp\{|\lambda_2|(\alpha_0 + \alpha_1\nu)|\sigma|\}$$

з деякими достатньо великими додатними сталими M_{λ_2}, $\overline{M}_{\lambda_2}$, що не залежать від ψ і σ. Оскільки $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| = |l|$, то, враховуючи оцінки для $D_\psi^{\lambda_1} G_t(\sigma, \psi)$, $D_\psi^{\lambda_3} G_t(\sigma, \psi)$ і щойно доведену за допомогою леми, де $\mu_1 = = |\lambda_2|\xi$, $\mu_2 = |\lambda_1|\xi$, $\mu_3 = |\lambda_3|\xi$, $\xi = \alpha_0 + \alpha_1\nu$, доводимо рівномірну збіжність інтеграла у правій частині (32). Виконання нерівності (14) також дає можливість отримати оцінку (16) для функції Гріна при $q = |l|$. Таким чином, ми переконались у правильності твердження теореми.

Зауваження 1. При виконанні умов теореми 1 матриця проектування $C(\psi)$ буде належати тому ж класу, що і $A(\psi)$.

Дійсно, оскільки $C(\psi) = G_0(0, \psi)$, то згідно з теоремою 1 існують всі $D_\psi^p C(\psi)$, $|p| = \overline{1, q}$. Поклавши в нерівності (16) $t = \tau = 0$, одержимо

$$\|D_\psi^p C(\psi)\| \leq K_p \|\psi\|^{\nu|p|} + \overline{K}_p, \quad |p| = \overline{1, q}.$$

Звідси $C(\psi) \in C_\nu^q(\boldsymbol{R}^m)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\gamma > q(\alpha_0 + \alpha_1\nu) \tag{34}$$

неоднорідна система (5) *для кожної фіксованої вектор-функції* $f(\psi) \in \in C_\nu^q(\boldsymbol{R}^m)$ *має єдиний обмежений інваріантний многовид* $x = u(\psi)$, *визначений рівністю* (6) *і при цьому* $u(\psi) \in C_\nu^q(\boldsymbol{R}^m)$.

Доведення. Очевидно, що при виконанні нерівності (34) буде також виконуватись нерівність (14). Тому згідно з попередньою теоремою $G_t(\tau, \psi) \in$ $\in C^q(\boldsymbol{R}^m)$ і виконуються нерівності (16) для всіх p таких, що $|p| = \overline{1, q}$. Також з належності вектор-функції класу $C^q_\nu(\boldsymbol{R}^m)$ можемо отримати оцінку

$$\|D^p_{\psi_t(\psi)} f(\psi_t(\psi))\| \le$$
$$\le \left(L^{(1)}_p \|\psi\|^{\nu|p|} + L^{(2)}_p\right) \exp\{\alpha_1 \nu |p| |t|\}, \quad t \in \boldsymbol{R}, \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{35}$$

з деякими додатними сталими $L^{(1)}_p$, $L^{(2)}_p$, не залежними ні від ψ, ні від t.

Існування єдиної функції Гріна (3), (4) системи (1), як уже відмічалось, гарантує існування єдиного обмеженого інваріантного многовиду системи (5) для кожної $f(\psi) \in C^q_\nu(\boldsymbol{R}^m)$, який має вигляд (6). Покажемо, що $u(\psi) \in C^q_\nu(\boldsymbol{R}^m)$. Диференціюючи $|p|$ раз підінтегральний вираз в (6) за параметрами $\psi_1, \ldots, \psi_m$, отримаємо

$$D^p_\psi G_0(\tau, \psi) f(\psi_\tau(\psi)) =$$
$$= \sum_{|s| + |r| = |l|} C_{sr} D^s_\psi G_0(\tau, \psi) D^r_\psi f(\psi_\tau(\psi)) := \overline{N}_p(\tau, \psi), \tag{36}$$

де C_{sr} — деякі додатні константи, вектори індексів $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $r =$ $= (r_1, \ldots, r_m)$ такі, що $s_i \ge 0$, $r_j \ge 0$, $|s| = \sum_{i=1}^m s_i$, $|r| = \sum_{j=1}^m r_j$. У (36)

$$D^r_\psi f(\psi_t(\psi)) = \sum_{\theta=1}^{|r|} D^\theta_{\psi_\tau} f(\psi_\tau(\psi)) \times$$
$$\times \sum_\omega C_{\theta\omega} (D_\psi \psi_\tau(\psi))^{\omega_1} (D^2_\psi \psi_\tau(\psi))^{\omega_2} \ldots (D^r_\psi \psi_\tau(\psi))^{\omega_r}$$

з індексами сумування

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_r = \theta, \quad \omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + |r|\omega_r = |r|.$$

Тоді, враховуючи (26) і (35), можемо оцінити

$$\|D^r_\psi f(\psi_\tau(\psi))\| \le$$
$$\le \left(T^{(1)}_r \|\psi\|^{\nu|r|} + T^{(2)}_r\right) \exp\{|r|(\alpha_0 + \alpha_1 \nu)|\tau|\}, \quad \tau \in \boldsymbol{R}, \tag{37}$$

де

$$T^{(i)}_r = \sum_{\theta=1}^{|r|} L^{(i)}_\theta \sum_\omega C_{\theta\omega} \prod_{\eta=1}^{\omega_r} (C_\eta)^\eta, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Враховуючи оцінки (4), (16), (37), бачимо, що нерівність (34) гарантує рівномірну збіжність по $\psi \in D$ інтегралів

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{N}_p(\tau, \psi) d\tau, \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{38}$$

в кожній обмеженій області $D \in \boldsymbol{R}^m$. Це дає можливість зробити висновок про існування всіх частинних похідних обмеженого інваріантного многовиду $x =$ $= u(\psi)$. Також, оцінюючи (38), переконуємось, що

$$\|D_\psi^p u(\psi)\| \le B_p^{(1)} \|\psi\|^{\nu|p|} + B_p^{(2)}, \quad |p| = \overline{1, q},$$

де

$$B_p^{(i)} = K^{|p|} \sum_{|s|+|r|=|p|} C_{sr} T_r^{(i)}, \quad i = \overline{1, 2},$$

тобто $u(\psi) \in C_\nu^q(\boldsymbol{R}^m)$. Теорему доведено.

Наклавши більш жорсткі умови на вектор-функцію $a(\psi)$ і слабкіші на $A(\psi)$ та $f(\psi)$, отримаємо ще деякі результати щодо гладкості $G_t(\tau, \psi)$, $u(\psi)$, $C(\psi)$. Введемо $C_{\nu,\beta}^q(\boldsymbol{R}^m)$, $0 < \beta < 1$, — клас матричних або векторних функцій $F(\psi) \in C^q(\boldsymbol{R}^m)$ таких, що виконуються умови

$$\|D_\psi^p F(\psi)\| \le L_p \exp\{\nu |p| \|\psi\|^{1-\beta}\} + L_p', \tag{39}$$

$$\|F(\psi)\| \le \alpha, \quad |p| = \overline{1, q},$$

де α, ν, L_p, L_p' — додатні сталі, $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $|p| = \sum_{i=1}^m p_i$, $p_i \in \boldsymbol{N}$.

Теорема 3. *Нехай існує єдина функція Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди, $A(\psi) \in C_{\nu,\beta}^q(\boldsymbol{R}^m)$, для $a(\psi) \in C^q(\boldsymbol{R}^m)$ виконується*

$$\|a(\psi)\| \le \alpha_1 \|\psi\|^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \tag{40}$$

а також нерівність (13). *Тоді виконання умови*

$$2\gamma > q(\alpha_0 + \alpha_1 \nu(1-\beta)) \tag{41}$$

достатньо для того, щоб $G_t(\tau, \psi) \in C^q(\boldsymbol{R}^m)$, $C(\psi) \in C_{\nu,\beta}^q(\boldsymbol{R}^m)$ і виконувались оцінки

$$\|D_\psi^p G_t(\tau, \psi)\| \le (W_p \exp\{\nu |p| \|\psi\|^{1-\beta}\} + \overline{W}_p) \times$$

$$\times \exp\{-\gamma(|t-\tau| + |p|(\alpha_0 + \alpha_1 \nu(1-\beta)) \max\{|t|, |\tau|\}\}, \quad |p| = \overline{1, q}. \tag{42}$$

Доведення. Єдиність функції Гріна $G_t(\tau, \psi)$ дає змогу записати різницю цієї функції при різних значеннях параметру ψ у вигляді (17) і переконатись (доведення теореми 1) у тому, що $G_t(\tau, \psi) \in C^0(\boldsymbol{R}^m)$. Далі можемо записати формальну рівність (18). Доведемо, що інтеграл справа у цій рівності при виконанні умов теореми 3 є рівномірно збіжним по ψ в кожній обмеженій області $D \subset \boldsymbol{R}^m$. Виконання умови (13) дозволяє отримати оцінки (26) для $D_\psi^p \psi_t(\psi)$.

Записавши єдиний розв'язок системи (2) в інтегральному зображенні (20) при $t \ge 0$ і використовуючи (40), одержуємо нерівність

$$\|\psi_t(\psi)\| \le \|\psi\| + \int_0^t \|\psi_\sigma(\psi)\|^\beta d\sigma.$$

Розв'язуючи цю інтегральну нерівність (теорема 1.12 із [7]), маємо

$$\|\psi_t(\psi)\| \le (\|\psi\|^{1-\beta} + \alpha_1(1-\beta)|t|)^{1/(1-\beta)}.$$

Аналогічно переконуємось, що остання оцінка є правильною при $t < 0$. Таким чином, згідно з (39) запишемо

$$\|D^p_{\psi_t(\psi)} A(\psi_t(\psi))\| \le$$
$$\le L_p \exp\{\nu|p|\,\|\psi_t(\psi)\|^{1-\beta}\} + L'_p \le$$
$$\le L_p \exp\{\nu|p|(\|\psi\|^{1-\beta} + \alpha_1(1-\beta)|t|)\} + L'_p \le$$
$$\le (L_p \exp\{\nu|p|\,\|\psi\|^{1-\beta}\} + L'_p)\exp\{\alpha_1\nu(1-\beta)|p|\,|t|\}, \qquad |p| = \overline{1, q}.$$

Тому підінтегральний вираз (18) можна оцінити як

$$\|N_1(t, \tau, \sigma, \psi)\| \le$$
$$\le K^2 C_1 \sqrt{m}\,(L_p \exp\{\nu\|\psi\|^{1-\beta}\} + L'_p) \times$$
$$\times \exp\{-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) + (\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta))\,|\sigma|\}.$$

Нерівність (41) дає змогу застосувати лему і, таким чином, довести рівномірну по ψ збіжність інтеграла (18), а також отримати оцінку (42) при $q = 1$. Отже, $G_t(\tau, \psi) \in C^1(\boldsymbol{R}^m)$.

Далі, використовуючи метод математичної індукції, доведемо теорему для будь-якого q. Припустимо, що твердження теореми є справедливим для всіх $|q| = \overline{1, |l|-1}$, $|l| = \sum_{i=1}^m l_i \ge 2$, тоді доведемо, що воно є таким і при $q = |l|$. Запишемо частинні похідні $|l|$-го порядку функції $G_t(\tau, \psi)$ у вигляді формальної рівності (32). Згідно з (33) можемо отримати оцінку

$$\|D^{\lambda_2}_{\psi} A(\psi_\sigma(\psi))\| \le$$
$$\le \sum_{\theta=1}^{|\lambda_2|} (L_{\lambda_2} \exp\{\nu\theta\,\|\psi\|^{1-\beta}\} + L'_{\lambda_2})\exp\{\alpha_1\nu\theta(1-\beta)|\sigma|\} \times$$
$$\times \sum_{\omega} C_{\theta\omega} \prod_{\eta=1}^{\omega_{\lambda_2}} (C_\eta)^\eta \exp\{\alpha_0(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{\lambda_2})|\sigma|\} \le$$
$$\le (S_{\lambda_2} \exp\{\nu|\lambda_2|\,\|\psi\|^{1-\beta} + \bar{S}_{\lambda_2}\})\exp\{(\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta))|\lambda_2|\,|\sigma|\},$$

де S_{λ_2}, $\bar{S}_{\lambda_2}$ — деякі додатні константи. Згідно з припущенням індукції оцінки (42) виконуються для похідних функцій Гріна, що стоять у підінтегральному виразі (32). Тому внаслідок леми нерівність (41) дозволяє переконатись у рівномірній збіжності інтегралу (32), а також у виконанні оцінки (42) при $q = |l|$.

Поклавши в оцінці (42) $t = \tau = 0$, переконуємось у тому, що $C(\psi) \in C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай система* (1) *має єдину функцію Гріна* (3) *з оцінкою* (4), $A(\psi) \in C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$ *і для вектор-функції* $a(\psi)$ *виконуються* (40) *і* (13). *Тоді при виконанні нерівності*

$$\gamma > q\,(\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta)) \tag{43}$$

система (5) *для кожної фіксованої вектор-функції* $f(\psi) \in C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$ *має єдиний обмежений інваріантний многовид* $x = u(\psi)$, *що також належить класу* $C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$.

Доведення. Оскільки умова (43) є більш вимогливою, ніж (41), то згідно з теоремою 3 можемо записати оцінки (42) для похідних функції Гріна $G_t(\tau, \psi)$. Аналогічно теоремі 2 оцінимо підінтегральний вираз (38), враховуючи при цьому, що $f(\psi) \in C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$. Маємо

$$\|\overline{N}_p(\tau, \psi)\| \le$$

$$\le \sum_{|s|+|r|=|p|} C_{sr}(W_s \exp\{\nu|s|\,\|\psi\|^{1-\beta} + \overline{W}_s\}) \times$$

$$\times \exp\{-\gamma|\tau| + |s|(\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta))|\tau|\} \times$$

$$\times \sum_{\theta=1}^{|r|} (L_r \exp\{\nu\theta\,\|\psi\|^{1-\beta}\} + L'_r)\exp\{\alpha_1\nu\theta(1-\beta)|\tau|\} \times$$

$$\times \sum_{\omega} C_{\theta\omega} \prod_{\eta=1}^{\omega_r} (C_\eta)^\eta \exp\{\alpha_0|r|\,|\tau|\} \le$$

$$\le (Q_p \exp\{\nu|p|\,\|\psi\|^{1-\beta}\} + \overline{Q}_p) \times$$

$$\times \exp\{-\gamma|\tau| + |p|(\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta))\}, \quad |p| = \overline{1, q}, \tag{44}$$

де $Q_p,\ \overline{Q}_p > 0$. Отже, умова (41) гарантує рівномірну по ψ збіжність інтегралу (38), що дозволяє зробити висновок про існування всіх частинних похідних обмеженого інваріантного многовиду $u(\psi)$ до порядку q включно. Також з оцінки (44) випливає, що $u(\psi) \in C^q_{\nu,\beta}(\boldsymbol{R}^m)$. Теорему доведено.

Зауваження 2. Розглянемо лінійне розширення динамічної системи на m-вимірному торі, тобто в системі (1) $\psi = \varphi \in \mathcal{T}_m$. Тоді, очевидно, в умовах теорем $1-4$ $\nu = 0$ і тому маємо оцінки

$$\|D^p_\varphi G_t(\tau, \varphi)\| \le K_p \exp\{-\gamma(|t-\tau| +$$

$$+ \alpha_0|p|\max\{|t|, |\tau|\}\}, \quad |p| = \overline{1, q}, \quad t, \tau \in \boldsymbol{R}.$$

Поклавши $t = 0$, отримаємо відомі [4] оцінки для похідних функції Гріна $G_0(\tau, \varphi)$.

Зауваження 3. Виявляється, що нерівності (14) при виконанні умов теореми 2 і відповідно нерівності (41) в умовах теореми 4 недостатньо для належності обмеженого інваріантного многовиду класу $C^q(\boldsymbol{R}^m)$. Тобто при виконанні

$$\gamma \le q(\alpha_0 + \alpha_1\nu) < 2\gamma$$

і відповідно (теорема 4)

$$\gamma \le q(\alpha_0 + \alpha_1\nu(1-\beta)) < 2\gamma$$

функція Гріна $G_t(\tau, \psi)$ буде обов'язково належати класу $C^q(\boldsymbol{R}^m)$, а інваріантний многовид $u(\psi)$ може йому і не належати.

Проілюструємо це на прикладі.

Приклад. Розглянемо систему

$$\frac{d\psi}{dt} = \operatorname{th}\psi, \qquad \frac{dx}{dt} = x + \frac{2\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}^2\psi},$$

де ψ, $x \in \boldsymbol{R}$, для якої $\alpha_0 = 1$, $\nu = 0$. Ця система має єдину функцію Гріна $G_0(\tau, \psi)$ з матрицею $C(\psi) \equiv 0$ і показником $\gamma = 1$, яка згідно з (3) має вигляд

$$G_0(\tau, \psi) = \begin{cases} 0, & \tau \le 0, \\ -e^{-\tau}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Інваріантний многовид визначається виразом

$$x = u(\psi) = \int_0^{+\infty} \frac{(-2) e^{-\tau} \operatorname{sh} \psi_\tau(\psi)}{\operatorname{ch}^2 \psi_\tau(\psi)} d\tau =$$

$$= -2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \psi \, e^{-2\tau}}{e^{-2\tau} + \operatorname{sh}^2 \psi} d\tau = \operatorname{sh} \psi \ln \operatorname{th}^2 \psi.$$

У даному випадку $2\gamma > \alpha_0 + \alpha_1 \nu = \gamma$, $q = 1$, тобто виконуються умови теореми 1, але не виконуються умови теореми 2. Незважаючи на те, що функція Гріна належить простору $C^1(\boldsymbol{R})$ (більше того, вона є аналітичною по ψ), інваріантний многовид $u(\psi)$ в точці $\psi = 0$ не має скінченної похідної:

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{du(\psi)}{d\psi} = \lim_{\psi \to 0} (\operatorname{ch} \psi \ln \operatorname{th}^2 \psi + 2 \operatorname{ch}^{-1} \psi) = -\infty,$$

тобто $u(\psi)$ не належить $C^1(\boldsymbol{R})$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 247 с.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219–1240.
3. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Наука, 1966. – 229 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии систем линейных дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
5. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О регулярности дифференциальных уравнений, линеаризованных по части переменных // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 5. – С. 773–777.
6. *Sacker R. J.* A pertrubation theorem for invariant manifold and Hölder continuily // J. Math. – 1969. – **18**, № 8. – P. 705–762.
7. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

Одержано 02.12.97