УДК 517. 5

Вит. В. Волчков (Донец. ун-т)

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

We investigate the accuracy of some sufficient conditions for multipliers obtained by Trigub.

Досліджується точність деяких достатніх умов для мультиплікаторів, здобутих Р. М. Тригубом.

Пусть H^p, $0 < p < +\infty$, — класс голоморфных в единичном круге функций f с конечной квазинормой

$$\| f \|_p = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p}$$

(см., например, [1, с. 57]).

Последовательность $\{ \lambda_k \}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$ называется мультипликатором в H^p (будем писать $\{ \lambda_k \}_{k=0}^{\infty} \in M_p$), если для любой $f \in H^p$ функция

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

принадлежит H^p и существует $\gamma > 0$ такое, что $\| \Lambda f \|_p \le \gamma \| f \|_p$ для всех $f \in$ $\in H^p$. При этом полагают $\left\| \{ \lambda_k \}_{k=0}^{\infty} \right\|_{M_p} = \sup_{\| f \|_p \le 1} \| \Lambda f \|_p$. Функция $\varphi :$ $[0,$ $+\infty) \to \mathbb{C}$ принадлежит $M_p[0, +\infty)$, если $\sup_{\varepsilon > 0} \left\| \{ \varphi(\varepsilon k) \}_{k=0}^{\infty} \right\|_{M_p} < +\infty$.

При $p \in (1, +\infty)$ последовательность $\{ \lambda_k \}_{k=0}^{\infty}$ является мультипликатором в H^p тогда и только тогда, когда продолжение ее нулем на $\mathbb{Z}$ является мультипликатором рядов Фурье в $L_p[-\pi, \pi)$. Этот случай изучался многими авторами (см. работу [2] и библиографию в ней). В [3] получены оценки сверху для норм мультипликаторов в H^p, $p \in (0, 1]$ и показано их применение к различным вопросам теории приближений.

В данной статье показано, что достаточные условия для норм мультипликаторов, полученные в [3], являются точными в ряде случаев. Отметим, что некоторые необходимые условия для мультипликаторов в H^p, $p \in (0, 1]$, приведены в [4]. Результаты данной работы анонсированы в [5].

1. Поведение функций из $M_p[0, +\infty)$ на бесконечности. В [3] показано, что если $p \in (0, 1]$, $\alpha > 1/2$, $\varphi \in C^r[0, +\infty)$ при некотором $r > 1/p - 1/2$ и $\varphi(x) = O\left(1/x^{\alpha}\right)$, $\varphi^{(r)}(x) = O\left(1/x^{\alpha}\right)$ при $x \to +\infty$, то $\varphi \in M_p[0, +\infty)$ для всех $p \in (1/(\alpha + 1/2), 1]$. С другой стороны, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для любого* $\alpha \in (0, 1/2)$ *и* $r \in \mathbb{N}$ *существует функция* $\varphi \in$ $\in C^r[0, +\infty)$ *такая, что*

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \qquad \varphi^{(r)}(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \qquad x \to +\infty,$$

и φ *не принадлежит* $M_p[0, +\infty)$ *ни при каком* $p \in (0, 1]$.

Доказательство достаточо провести для $p = 1$. Здесь и далее символами c, c_1, $c_2, \ldots$ обозначаются абсолютные положительные постоянные, в различных случаях, вообще говоря, разные. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (см. [6]). *Для любого натурального числа* N *существует набор чисел* $\{\varepsilon_{n,N}\}_{n=1}^N$, $\varepsilon_{n,N} = \pm 1$, *такой, что*

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n,N} e^{int} \right| dt \geq c\sqrt{N}.$$

Покажем теперь, что последовательность

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \varepsilon_{n, 2^4} / n^\alpha, & 1 \leq n \leq 2^4, \\ \varepsilon_{n, 2^{4^k}} / n^\alpha, & 2^{4^{k-1}} < n \leq 2^{4^k}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

не принадлежит M_1. Предположим противное. Тогда для любой $f \in H^1$ $\| \Lambda f \|_1 \leq c_1 \| f \|_1$. Положим

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{2^{4^k}} n^\alpha e^{int}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Из неравенства Бернштейна следует $\| f_k \|_1 \leq c_2 4^k 2^{\alpha 4^k}$. Далее,

$$(\Lambda f_k)(t) = \sum_{n=1}^{2^{4^k}} \varepsilon_{n, 2^{4^k}} e^{int} - g(t),$$

де

$$g(t) = \sum_{n=1}^{2^{4^k}} \varepsilon_{n, 2^{4^k}} e^{int} - \varepsilon_{1, 2^4} e^{it} - \varepsilon_{2, 2^4} e^{irt} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=2^{4^{m-1}}+1}^{2^{4^m}} \varepsilon_{n, 2^{4^m}} e^{int}.$$

Поскольку $\| g \|_1 \leq 2 \cdot 2^{4^{k-1}}$, из неравенства треугольника и леммы 1 получаем $c_1 2^{4^k/2} - 2 \cdot 2^{4^{k-1}} \leq c_2 4^k 2^{\alpha 4^k}$. Отсюда следует, что $\alpha \geq 1/2$, т. е. противоречие. Итак, $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty \notin M_1$.

Пусть теперь

$$\xi_n = \begin{cases} \varepsilon_{n, 2^4}, & 1 \leq n \leq 2^4, \\ \varepsilon_{n, 2^{4^k}}, & 2^{4^{k-1}} < n \leq 2^{4^k}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

и функция $\eta \in C^\infty(R)$ имеет следующие свойства: $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1/6$, $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 1/3$ и $|\eta(x)| \leq 1$, $x \in R$. Тогда функция $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n \dfrac{\eta(x-n)}{x^\alpha}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

2. Поведение функций из $M_p[0,+\infty)$ в нуле. Любая финитная функция $\varphi \in C^1[0,+\infty)$ принадлежит $M_p[0,+\infty)$ при $p \in (2/3, 1]$ (см. [3]). Приведенный ниже результат показывает, что условие гладкости функции φ в нуле ослабить нельзя.

Теорема 2. *Существует дифференцируемая на $[0,+\infty)$ функция φ со следующими свойствами*:

1) $\varphi \in C^\infty(0,+\infty)$ *и* $\varphi(x) = 0$ *при* $x \geq 1$;

2) φ *не принадлежит* $M_p[0,+\infty)$ *ни при каком* $p \in (0, 1]$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Построим функцию φ на $I_n = (1/n, 1/(n-1)]$. Очевидно, что числа $\frac{n^6+1}{n^7}, \frac{n^6+2}{n^7}, \ldots, \frac{n^6+n^5}{n^7}$ принадлежат I_n. Положим

$$\varphi\left(\frac{n^6+m}{n^7}\right) = \frac{\varepsilon_{m,n^5}}{n^2}, \qquad m = 1, \ldots, n^5,$$

где $\left\{\varepsilon_{m,n^5}\right\}_{m=1}^{n^5}$ — набор чисел из леммы 1. Продолжим φ на I_n так, чтобы

$$\varphi \in C^\infty(I_n), \qquad \varphi = 0 \text{ на } \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^8}\right) \cup \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n-1}\right]$$

и $|\varphi(x)| \leq 1/n^2$ для каждого $x \in I_n$.

Пусть еще $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 0$ при $x \geq 1$. Тогда φ дифференцируема на $[0, +\infty)$ и $\varphi'(0) = 0$. Покажем, что $\varphi \notin M_1[0,+\infty)$. Предположим противное. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{n^5} \varphi\left(\frac{n^6+m}{n^7}\right) e^{i(n^6+m)t} \right| dt \leq c \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{n^5} e^{i(n^6+m)t} \right| dt.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем $\sqrt{n} \leq c_1 \ln n$. Последнее неравенство не выполняется при достаточно больших n. Таким образом, $\varphi \notin M_1[0,+\infty)$, и теорема 2 доказана.

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
2. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
3. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Докл. РАН. – 1994. – **335**, № 6. – С. 697–699.
4. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы Фурье и некоторые вопросы теории приближений // Междунар. конф. по теории приближения функций: Тез. докл. – Калуга, 1996. – С. 214–216.
5. *Волчков Вит. В.* Мультипликаторы степенных рядов в пространствах Харди // Там же. – С.59–60.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 543 с.

Получено 10.02.97