УДК 519. 21

В. А. Дубко, Е. В. Чалых (Биробиджан. пед. ин-т, Россия)

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛАНЖЕВЕНА С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We find an analytic representation of solution of the Ito–Langevin equations in R^3 with orthogonal random influences with respect to the vector of solution. We construct a stochastic process to which an integral of solution weakly converges as a small positive parameter with derivative of the equation tends to zero.

Знайдено аналітичне зображення розв'язку рівнянь Іто – Ланжевена в R^3 з ортогональними випадковими впливами по відношенню до вектора розв'язку. Побудовано стохастичний процес, до якого слабко збігається інтеграл від розв'язку, коли малий додатний параметр при похідній рівняння прямує до нуля.

Как показано в [1], система уравнений

$$dv(t) = -\mu v(t)dt + \frac{b}{|v(t)|}[v(t)\times dw(t)],$$

где $v \in R^3$, $w_i(t)$, $i = 1, 2, 3,$ — независимые винеровские процессы, имеет первый интеграл вида

$$u(v; t) = \exp\{2\mu t\}\left(|v(t)|^2 - \frac{b^2}{\mu}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} |v(t)|^2 = b^2/\mu$, т. е. процесс $|v(t)|$ является неслучайной функцией, а сам случайный процесс $v(t)$ вырождается на сферу постоянного радиуса $b/\mu^{1/2}$.

Подобные свойства имеет уравнение более общего вида [2]. Особенностью его является то, что оно допускает решение в аналитическом виде.

Основной результат данной работы представляют следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:* $a(t), \mu(t) \in C^1$, $v(0) = v_0 \neq 0$, $a(t) \neq 0$. *Тогда решение стохастического дифференциального уравнения*

$$dv(t) = -\mu(t)v(t)dt + a(t)[v(t)\times dw(t)] \tag{1}$$

существует и имеет вид

$$v(t) = \exp\left\{\int_0^t \left(a^2(\tau) - \mu(\tau)\right)d\tau\right\}\times$$

$$\times\left[I + \frac{\sin\left(\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}}\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)B_k^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}\right)}{\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)^2}\left(\sum_{k=1}^3\left(\int_0^t a(\tau)dw_k(\tau)\right)B_k^0\right)^2\right]v(0). \quad (2$$

Теорема 2. *Пусть процесс* $x_\varepsilon(t)$ *является решением системы стохастических дифференциальных уравнений вида*

$$dx_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)dt,$$

$$\varepsilon dv_\varepsilon(t) = -\mu(t)v_\varepsilon(t)dt + \frac{b}{|v_\varepsilon(t)|}[v_\varepsilon(t)\times dw(t)],$$

$$\varepsilon^2 M\left[|v(0)|^4\right] \le \text{const}, \quad |v(0)| \ne 0, \quad x(t)\big|_{t=0} = x_0, \tag{3}$$

где $\varepsilon,\ \mu(\cdot)>0,\ \mu(t)\in C^1$. *Тогда при* $\varepsilon\to 0$ *последовательность процессов* $x_\varepsilon(t)$ *слабо сходится к процессу* $x(t)$ *с компонентами*

$$x_i(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, b\, w\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\mu^2(\tau)}\right) + x_i(0),$$

где $w_i(\cdot)$ — *независимые винеровские процессы.*

Доказательство теоремы 1 основано на возможности формального представления решения уравнения (1) в виде

$$v(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} B_k^2(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{3}\int_0^t B_k(\tau)dw_k(\tau)\right\}v_0,$$

где $B_k^0 = B_k(t)/a(t)$ — инфинитезимальные матрицы алгебры Ли группы вращений в R^3,

$$B_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующие свойства для них:

$$B_1^0 B_2^0 - B_2^0 B_1^0 = -B_3^0, \qquad B_1^0 B_3^0 - B_3^0 B_1^0 = B_2^0,$$

$$B_2^0 B_3^0 - B_3^0 B_2^0 = -B_1^0.$$

Используя разложение экспоненты в ряд, приходим к выражению, соответствующему утверждению теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 можно получить, если представить $x_\varepsilon(t)$ с помощью (3) в таком виде:

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s) = \varepsilon\int_s^t \frac{b\,dv_\varepsilon(\tau)}{\mu(\tau)} + \int_s^t \frac{b}{\mu(\tau)}\left[\frac{v_\varepsilon(\tau)}{|v_\varepsilon(\tau)|}\times dw(\tau)\right]$$

и свойства представления (2) для $v(t)$, используя алгоритм из работы [2].

1. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений. – Киев, 1978. – 22 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78-27).
2. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВО РАН СССР, 1989. – 185 с.

Получено 05.01.98