УДК 517.9

А. Л. Лапшин (Киев. гос. экон. ун-т)

ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

We solve the problem of estimation of random state for a system with discrete time, which is described by a system of linear difference equations with coefficients dependent of a finite-valued Markov chain.

Розв'язано задачу про оцінку випадкового стану для системи з дискретним часом, яка описується системою лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами, залежними від скінченно-значного марковського ланцюга.

1. Рассматривается система линейных разностных уравнений со случайными коэффициентами

$$X_{n+1} = A(\zeta_n) X_n + B(\zeta_n) W_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \dim X_n = m, \tag{1}$$

где ζ_n – марковская цепь, принимающая конечное число значений $\theta_1, \dots, \theta_q$ с вероятностями

$$p_k(n) = P\{\zeta_n = \theta_k\}, \quad k = 1, \dots, q. \tag{2}$$

Последовательность независимых векторов W_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям

$$\langle W_n \rangle \equiv 0, \quad \langle W_n W_n^* \rangle = R, \quad R = R^* \geq 0. \tag{3}$$

Вектор X_n — m-мерный вектор состояния системы. Пусть Y_n — l-мерный вектор наблюдаемых выходных переменных

$$Y_n = H(\zeta_n) X_n + G(\zeta_n) V_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \det G(\zeta_n) > 0. \tag{4}$$

Предполагаем, что последовательность независимых случайных векторов V_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям

$$\langle V_n \rangle \equiv 0, \quad \langle W_n V_n^* \rangle \equiv 0, \quad \langle V_n V_n^* \rangle = S, \quad S = S^* > 0. \tag{5}$$

Пусть начальное состояние X_0 для системы (1) не зависит от ζ_n, W_n, V_n и имеет математическое ожидание $M(0) = \langle X_0 \rangle$ и матрицу вторых моментов $D(0) = \langle X_0 X_0^* \rangle$.

Предполагаем, что матрица S — положительно определенная симметрическая матрица.

2. Рассмотрим задачу получения оценки X_{n+1} по наблюдениям выходной переменной Y_n. Пусть оценка вектора X_{n+1} задается условным математическим ожиданием $\hat{X} = (n+1, n)$, удовлетворяющим системе разностных уравнений

$$\hat{X}(n+1, n) = A(\zeta_n)\hat{X}(n, n-1) +$$
$$+ K(n, \zeta_n)[Y_n - H(\zeta_n)\hat{X}(n, n-1)], \quad X(0, -1) = M(0). \tag{6}$$

Выберем матрицу $K(n, \zeta_n)$ так, чтобы минимизировать значение симметрической матрицы

$$P_{n+1} = \langle \tilde{X}_{n+1} \tilde{X}_{n+1}^* \rangle, \quad \tilde{X}_{n+1} = X_{n+1} - \hat{X}(n+1, n). \tag{7}$$

Вектор $\tilde{X}_n$ удовлетворяет системе разностных уравнений

$$\tilde{X}_{n+1} = (A(\zeta_n) - K(n,\zeta_n) H(\zeta_n))\, \tilde{X}_n + \\ + B(\zeta_n) W_n - K(n,\zeta_n) G(\zeta_n) V_n. \tag{8}$$

Умножим вектор X_{n+1} на транспонированный и согласно (8) получим

$$\tilde{X}_{n+1}\tilde{X}_{n+1}^* = \left(A(\zeta_n) - K(n,\zeta_n) H(\zeta_n)\right) \tilde{X}_n \tilde{X}_n^* \left(A^*(\zeta_n) - H^*(\zeta_n) K^*(n,\zeta_n)\right) + \\ + \left(A(\zeta_n) - K(n,\zeta_n) H(\zeta_n)\right) \tilde{X}_n \left(W_n^* B^*(\zeta_n) - V_n^* G^*(\zeta_n) K^*(n,\zeta_n)\right) + \\ + \left(B(\zeta_n) W_n - K(n,\zeta_n) G(\zeta_n) V_n\right) \tilde{X}_n^* \left(A^*(\zeta_n) - H^*(\zeta_n) K^*(n,\zeta_n)\right) + \\ + \left(B(\zeta_n) W_n - K(n,\zeta_n) G(\zeta_n) V_n\right) \left(W_n^* B^*(\zeta_n) - V_n^* G^*(\zeta_n) K^*(n,\zeta_n)\right). \tag{9}$$

Введем частные математические ожидания

$$P_k(n) = \left\langle \tilde{X}_n \tilde{X}_n^*,\ \zeta_n = \theta_k \right\rangle = \\ = \left\langle \tilde{X}_n \tilde{X}_n^* \mid \zeta_n = \theta_k \right\rangle P\{\zeta_n = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{10}$$

Из системы уравнений (9) получим уравнение для $P_k(n)$, $\quad k = 1, \ldots, q$:

$$\left\langle \tilde{X}_{n+1}\tilde{X}_{n+1}^*,\ \zeta_{n+1} = \theta_k \right\rangle = \sum_{s=1}^{q} \left\langle \tilde{X}_{n+1}\tilde{X}_{n+1}^*,\ \zeta_{n+1} = \theta_k, \zeta_n = \theta_s \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \left\langle \tilde{X}_{n+1}\tilde{X}_{n+1}^*,\ \zeta_n = \theta_s \right\rangle P\{\zeta_{n+1} = \theta_k \mid \zeta_n = \theta_s\}.$$

Пусть марковская цепь ζ_n определяется системой разностных уравнений

$$p_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}\, p_s(n), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{11}$$

Из системы уравнений (9) получим

$$P_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}\Big((A_s - K_s(n) H_s) P_s(n) \left(A_s^* - H_s^* K_s^*(n)\right) + \\ + B_s R B_s^* p_s(n) + K_s(n) G_s S G_s^* K_s^*(n) p_s(n)\Big), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{12}$$

где

$$A_s = A(\theta_s), \quad B_s = B(\theta_s), \quad H_s = H(\theta_s), \quad G_s = G(\theta_s), \quad s = 1, \ldots, q. \tag{13}$$

3. Правые части системы разностных уравнений (12) являются положительно определенными матрицами. Поэтому, в общем случае, будут выполнены матричные неравенства

$$P_k(n) \geq 0, \quad k = 1, \ldots, q; \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Минимизируем значения симметрических матриц $P_k(n+1)$, $k = 1, \ldots, q$, за счет выбора матриц $K_s(n)$. Из необходимых условий минимума правых частей системы разностных уравнений (12) находим систему уравнений

$$(A_s - K_s(n) H_s) P_s(n) \left(-H_s^*\right) \delta K_s^*(n) + K_s(n) G_s S G_s^* p_s(n)\, \delta K_s^*(n) = 0, \\ s = 1, \ldots, q.$$

Из нее получим значение матрицы $K_s(n)$:

$$K_s(n) = A_s P_s(n) H_s^*(H_s P_s(n) H_s^* + G_s S G_s^* p_s(n))^{-1}, \quad s = 1, \dots, q, \tag{15}$$

которые минимизируют значение матриц $P_k(n+1)$, $k = 1, \dots, q$.

Подставляя выражения $K_s(n)$, $s = 1, \dots, q$, в систему уравнений (12), приходим к системе уравнений для симметричных матриц $P_k(n)$:

$$P_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}[A_s P_s(n) A_s^* - A_s P_s(n) H_s^* \left(H_s P_s(n) H_s^* + \right.$$

$$\left. + G_s S G_s^* p_s(n)\right)^{-1} H_s P_s(n) A_s^* + B_s R B_s^* p_s(n)\Big], \quad k = 1, \dots, q, \tag{16}$$

которая интегрируется с начальными условиями $P_s(n) = 0$, $s = 1, \dots, q$, а матрицы $K_s(n)$, $s = 1, \dots, q$, находятся из (15).

Приведенный результат обобщает известный результат Р. Е. Калмана [1] и А. Н. Колмогорова [2].

Если марковская цепь ζ_n эргодична, то находим предельные значения вероятностей

$$p_k = \lim_{n \to \infty} p_k(n), \quad k = 1, \dots, q,$$

и предельные значения симметрических матриц

$$P_k = \lim_{n \to \infty} P_k(n),$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$P_k = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}[A_s P_s A_s^* - A_s P_s H_s^* \left(H_s P_s H_s^* + \right.$$

$$\left. + G_s S G_s^* p_s\right)^{-1} H_s P_s A_s^* + B_s R B_s^* p_s\Big], \quad k = 1, \dots, q. \tag{17}$$

В этом случае матрицы K_s, $s = 1, \dots, q$, могут быть выбраны постоянными

$$K_s = A_s P_s H_s^*(H_s P_s H_s^* + G_s S G_s^* p_s)^{-1}, \quad s = 1, \dots, q. \tag{18}$$

Для приложений важен случай, когда выполнены равенства

$$K_s = K, \quad s = 1, \dots, q,$$

что позволяет легче реализовать систему разностных уравнений (6).

1. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 322 с.
2. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. – Сер. мат. – 1941. – **5**, №1. – С.3–14.

Получено 22.02.97