УДК 517.5

П. К. Нитиема (Днепропетр. ун-т)

О НАИЛУЧШЕМ L_1-ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ УСЕЧЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ

We establish the asymptotic behavior of the best L_1-approximations of kernels $(x-a)_+^{r-1}$, $1<r<2$, and classes W_1^r by algebraic polynomials.

Встановлено асимптотичну поведінку найкращих L_1-наближень ядер $(x-a)_+^{r-1}$, $1<r<2$, і класів W_1^r алгебраїчними многочленами.

Усеченная степень $\frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1}$ определяется следующим образом:

$$g_{r,a}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1} := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)^{r-1}, & \text{если } x>a; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases},$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера. В дальнейшем будем предполагать, что a, $x \in [-1, 1]$ и $r>0$. Последнее условие обеспечивает интегрируемость усеченной степени.

Для функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$, обозначим через $E_n(f)_1$ наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве L_1. Пусть W_1^r — класс функций, представимых в виде

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{1}(x-t)_+^{r-1}\varphi(t)\,dt, \qquad x\in[-1,1], \tag{1}$$

где $\|\varphi(t)\|_1 \le 1$, и пусть

$$E_n(W_1^r)_1 = \sup_{f\in W_1^r} E_n(f)_1 .$$

Для случая, когда r — целое или $r\in(0,1)$, задача об асимптотическом поведении наилучших L_1-приближений алгебраическими многочленами усеченных степеней решена в [1 – 5]. В частности, в [5] доказано следующее утверждение:

Для любого $r\in(0,1)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$E_n(g_{r,a})_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right), \tag{2}$$

где

$$K_r = \frac{4\sin\frac{r\pi}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \tag{3}$$

а константа, определяющая остаточный член в (2), *не зависит от* a *и* r.

В настоящей работе рассматривается случай $r\in(1,2)$. Ее основные результаты состоят в следующем.

Теорема 1. *Для любого* $r \in (1, 2)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$E_n(g_{r,a})_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r} + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right), \tag{4}$$

где K_r *— наилучшее приближение константой в* L_1 *функции*

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

а константа, определяющая остаточный член в (4), *не зависит от* a и r.

Теорема 2. *Для любого* $r \in (1, 2)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \tag{5}$$

где константа K_r *— та же, что и в равенстве* (4), *а константа, определяющая остаточный член, не зависит от* r. *Кроме того, существует линейный метод приближения, который реализует наилучшее приближение класса* W_1^r.

Для r целых соответствующий результат получен в [6].

Доказательство. Будем использовать следующие вспомогательные утверждения.

1. Равенство

$$E_n(g_{r,a})_1 = \frac{1}{2}\tilde{E}_{n+1}(g_{r,\cos\theta}(\cos t)\sin t)_1 \tag{6}$$

редуцирует задачу о наилучшем приближении алгебраическими многочленами в задачу о наилучшем L_1-приближении тригонометрическими полиномами, где $\tilde{E}_{n+1}(f)_1$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n+1$ в пространстве $\tilde{L}_1$, $\cos\theta = a$.

2. Пусть

$$I_k\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)D_k(t)\,dt,$$

где k — целое, $\varphi(t)$ — интегрируема и может не быть ортогональной константе. Тогда [7]

$$\tilde{E}_n(I_k\varphi)_1 \le \frac{K_r}{(n+1)^r}\tilde{E}_n(\varphi)_1, \tag{7}$$

где K_r — константа Фавара.

3. Ядро $g_{r,a}(x)$ при $r > 1$ имеет $[r]$-ю интегрируемую производную ($[r]$— целая часть числа r):

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]} g_{r,a}(x) = g_{\rho,a}(x),$$

где $\rho = r - [r]$, $x \neq a$, удовлетворяющую условию Липшица в L_1 порядка ρ. Отсюда следует грубая оценка

$$E_n(g_{r,a})_1 \leq \frac{C}{n^r}. \tag{8}$$

4. Если $r \in (1, 2)$, то усеченная степень $g_{r+1}(x)$ имеет вторую интегрируемую производную $g_{\rho,a}(x)$, где $\rho = r - 1$, и удовлетворяет краевым условиям $g_{r+1}(-1) = g_r(-1) = 0$. Поэтому выполняется равенство (см. [3])

$$g_{r+1,a}(\cos t) = I_2(\psi_0) + I_3(\psi_1) + I_3(\tilde{\psi}_1),$$

где $\psi_0(t) = \sin^2 t\, g_{\rho,a}(\cos t)$, $\psi_1(t) = \sin t \cos t\, g_{\rho,a}(\cos t)$, $\tilde{\psi}_1(t) = \sin t\, g_{r,a}(\cos t)$ и, следовательно,

$$-\sin t\, g_{r,a}(\cos t) = I_1(\psi_0) + I_2(\psi_1) + I_2(\tilde{\psi}_1). \tag{9}$$

Из равенства (2) получаем оценку

$$\tilde{E}_{n+1}(\psi_1)_1 = \frac{K_\rho\left(\sqrt{1-a^2}\right)^\rho}{n^\rho} + O\left(\frac{1}{n^{2\rho}}\right),$$

поэтому в силу (7)

$$\tilde{E}_{n+1}(I_2\psi_1)_1 = C\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^\rho}{n^{\rho+2}} + O\left(\frac{1}{n^{2\rho+2}}\right)\right). \tag{10}$$

Используя равенство (6) и оценку (8), получаем

$$\tilde{E}_{n+1}(\tilde{\psi}_1)_1 = 2E_n(g_{r,a})_1 \leq \frac{C}{n^r},$$

а значит,

$$\tilde{E}_{n+1}(I_2\tilde{\psi}_1)_1 \leq \frac{C}{n^{r+2}}. \tag{11}$$

5. Пусть

$$\eta(t) = \eta_\theta(t) := \{D_r(\theta + t) - D_r(\theta - t)\}\sin^r\theta,$$

где $a = \cos\theta$. Из равенств (6) и (9), оценок (10) – (11) в силу полуаддитивности $\tilde{E}_{n+1}(f)_1$ получаем неравенства

$$\frac{1}{2}\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 - \frac{1}{2}\tilde{E}_{n+1}(I_1\psi_0 - \eta)_1 - C\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right) \leq E_n(g_{r,a})_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 + \frac{1}{2}\tilde{E}_{n+1}(I_1\psi_0 - \eta)_1 + C\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right). \tag{12}$$

Таким образом, чтобы доказать теорему 1, необходимо оценить сверху вел чину $\tilde{E}_{n+1}(I_1\psi_0 - \eta)_1$ и определить величину $\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1$.

Оценка величины $\tilde{E}_{n+1}(I_1\psi_0 - \eta)_1$ дана в лемме 1.

Лемма 1. *Для всех* $r \in (1, 2)$ *имеет место неравенство*

$$\tilde{E}_{n+1}(I_1\psi_0 - \eta_\theta)_1 \le C\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right). \tag{13}$$

Чтобы оценить снизу величину $\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1$, воспользуемся утверждением, являющимся аналогом леммы 4 из [5].

Лемма 2. *Пусть* $r > 1$, $a_k = \cos\theta_k$, *где* $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+2} + \dfrac{\gamma}{n+2}$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n+2$, *а* $\gamma \in [0, \pi)$ *является корнем уравнения*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{(2j+1)\gamma - \frac{r\pi}{2}\right\}}{(2j+1)^r} = 0. \tag{14}$$

Тогда выполняются неравенства

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 > E_n((x-a_{k_0})_+^{r-1})_1\left(1 - \frac{r\pi}{n}\right), \tag{15}$$

если $a \in (a_{k+1}, a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *где* $k_0 = k+1$, *если* $a < 0$, *и* $k_0 = k$, *если* $a \ge 0$;

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \le E_n((x-a_{n+1})_+^{r-1})_1\left(1 + \frac{2\pi^2}{n^2}\right)^r, \tag{16}$$

если $a \in [-1, a_n]$;

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \le \frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{r}\sin^r\frac{2\pi}{n+2}, \tag{17}$$

если $a \in [a_1, 1]$.

Из неравенств (15) – (17) следует, что теорему 1 достаточно доказать для a, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{1-a^2} \ge \sin\frac{\pi}{n+2}. \tag{18}$$

Оценку сверху величины $\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1$ получим, пользуясь методом В. П. Моторного [5].

Лемма 3. *Пусть* $r > 1$. *Тогда*

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 \le \frac{2K_r\sin^r\theta}{(n+1)^r}, \tag{19}$$

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_k})_1 = \frac{2K_r\sin^r\theta_k}{(n+1)^r}, \quad k = 1, \ldots, n+1, \tag{20}$$

где $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+2} + \dfrac{\gamma}{n+2}$, $k = 1, \ldots, n+1$, *а* $\gamma \in [0, \pi)$ — *корень уравнения* (14).

Доказательство. Используя неравенство

$$\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \frac{K_r}{(n+2)^r},$$

доказанное в [8] (см. [9, с. 171]), получаем оценку сверху:

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta_\theta)_1 \le 2\sin^r\theta\, \tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \frac{2K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{(n+2)^r}.$$

Величину $\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1$ можно представить в виде [8]

$$\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \left|\int_{-\pi}^{\pi} D_r(t)\operatorname{sign}\sin\{(n+2)t-\gamma\}\,dt\right|. \tag{21}$$

Из (21) и соотношений двойственности для наилучших приближений [9, с. 42] получим оценку снизу для величины $\tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_i})_1$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$:

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_i})_1 \ge \sin^r\theta_i \left|\int_{-\pi}^{\pi}[D_r(\theta_i+t) - D_r(\theta_i-t)]\operatorname{sign}\sin(n+2)t\,dt\right| =$$

$$= 2\sin^r\theta_i\left|\int_{-\pi}^{\pi} D_r(t)\operatorname{sign}\sin\{(n+2)t-(n+2)\theta_i\}\,dt\right. -$$

$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t)\operatorname{sign}\sin\{-(n+2)t+(n+2)\theta_i\}\,dt\right| = \frac{2K_r\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^r}{(n+2)^r}. \tag{22}$$

Из неравенств (19) и (22) следует равенство (20). Лемма доказана.

Из неравенств (12), (13), (19) следует неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(r)}E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \le \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{(n+1)^r} + C\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}},$$

где $a \in [a_n, a_1]$ и C — абсолютная константа. Из равенства (20) и оценок (12), (13) получаем оценку нижней границы

$$\frac{1}{\Gamma(r)}E_n((x-a_i)_+^{r-1})_1 \ge$$

$$\ge \frac{K_r\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^r}{(n+1)^r} - C\frac{\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Пусть теперь a — любая точка из интервала (a_{i+1}, a_i) и предположим для определенности, что $a > 0$. Тогда, используя неравенства (15) и (23), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(r)}E_n((x-a)_+^{r-1})_1 > \frac{1}{\Gamma(r)}E_n((x-a_i)_+^{r-1})_1\left(1-\frac{r\pi}{n}\right) >$$

$$> \frac{K_r\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^r}{(n+1)^r} - C\frac{\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}. \tag{24}$$

Так как для $a \in (a_{i+1}, a_i)$ и $r > 1$

$$\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^r > \left(\sqrt{1-a^2}\right)^r - \frac{r\pi}{n}\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}$$

и

$$\sqrt{1-a_i^2} < \sqrt{1-a^2},$$

то из неравенства (24) следует (23) для любого $a \in (a_{i+1}, a_i)$. Принимая во внимание неравенство (23) для $i = n$ и неравенства (16) и (17), получаем (4) для всех $a \in [-1, 1]$.

Теорема 1 доказана. Отметим, что из неравенства (17) следует более точная оценка остаточного члена для $a \in [a_1, 1]$.

Доказательство теоремы 2. В силу соотношений двойственности для наилучших приближений [9, с. 42]

$$E_n(W_1^r)_1 = \sup_{a\in[-1,1]} \frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a)_+^{r-1})_1. \tag{25}$$

Из равенств (2) и (4) сразу получаем равенство

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

где константа, определяющая остаточный член, не зависит от r. Как в [6], на базе многочлена наилучшего приближения конструируется линейный метод приближения функций из класса W_1^r. При этом в отличие от случая $r < 1$, как и для натуральных r, у нас не возникает вопросов, связанных с единственностью и непрерывностью (от параметра a) многочленов наилучшего приближения усеченной степени.

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a-x|^s$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**, № 3. – С. 139–180.
2. *Моторная О. В.* Уточнение одного асимптотического результата С. М. Никольского // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1992. – С. 63–69.
3. *Моторная О. В.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1. – Киев: 1993. – 30 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т матем.; 93-20).
4. *Моторная О. В.* Об асимптотических оценках наилучших приближений дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 859–862.
5. *Motornyi V. P., Nitiema P. C.* On the best L-approximation by polinomials of the functions which are fractional integrals of summable functions // East J. Appr. – 1996. – **2**, № 4. – P. 409–425.
6. *Никольский С. М.* О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. – 1947. – **58**, № 2. – С. 185–188.
7. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61–70.
8. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691–701.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 14.04.97