УДК 519.4:513.88

Е. П. Белан (Симферопол. ун-т),
О. Б. Лыкова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We investigate central manifolds of quasilinear parabolic equations of arbitrary order in an unbounded domain. We suggest an algorithm for constructing an approximate central manifold in the form of asymptotically convergent power series. For the results obtained, we describe applications in the stability theory.

Досліджено центральні многовиди квазілінійних параболічних рівнянь довільного порядку в необмеженій області. Наведено алгоритм побудови наближеного центрального многовиду у вигляді асимптотично збіжного степеневого ряду. Вказано застосування отриманих результатів до теорії стійкості.

Введение. Как известно [1, 2], исследование поведения динамических систем при больших t в окрестности стационарных (периодических) решений опирается на метод инвариантных многообразий. В данной работе изучается поведение решений в окрестности нуля квазилинейного параболического уравнения порядка $2m$, рассматриваемого во всем пространстве. Доказывается существование центрального многообразия, имеющего свойство асимптотической полноты, кроме того, доказан принцип сведения и получено асимптотическое разложение центрального многообразия.

Переход от исследования поведения решений полулинейных параболических уравнений [3] к нелинейным параболическим уравнениям общего вида вызывает существенные затруднения (см. по этому поводу [4, 5]). При переходе от задач в ограниченных областях к задачам по всем пространстве возникают дополнительные трудности. Важную роль в разрешении возникающих здесь проблем играет выбор пространства решений. Следуя [4 – 7], уравнения в данной работе будем изучать в гельдеровых классах.

Метод, используемый далее при доказательстве существования инвариантных многообразий, исследовании их свойства, является развитием метода, предложенного в работе [8] и существенно обобщенного в [3] для полулинейных параболических уравнений. В этой связи отметим работу [9], в которой указанный выше подход использован для абстрактного параболического уравнения, отвечающего энергетическим методам исследования параболических систем. В работе используем обозначения из [6] в форме, представленной в [7].

Пусть m, n — натуральные числа, R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка из R^n. Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x, D^\beta u) D^\alpha u = f(x, D^\beta u), \quad |\beta| \le 2m - 1, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $D^\alpha = D^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$.

Для краткости через $a_\alpha(x, D^\beta u)$, $f(x, D^\beta u)$ обозначены соответственно отображения $a_{1\alpha}(x, u, \ldots, D^\beta u, \ldots)$, $f_1(x, u, \ldots, D^\beta u, \ldots)$. Функция $f_1(x, e)$ определена и непрерывна на $R^n \times R^p$, где p — число частных производных функции $u(x, t)$ по x до порядка $2m - 1$ включительно.

Полагаем, что на $R^n \times K$, где K — замыкание некоторой окрестности нуля в R^p, функция f_1 и ее частные производные f_{1,e_i}, $i = 1, \dots, p$, удовлетворяют условию Гельдера по x с показателем γ_0, $0 < \gamma_0 \le 1$, равномерно относительно $e \in K$ и условию Липшица по $e \in K$ равномерно относительно $x \in R^n$. Этим же условиям удовлетворяют функции $a_{1\alpha}$.

Пусть выполняется условие параболичности

$$(-1)^{m+1} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = 2m} a_{1\alpha}(x, e)\sigma^\alpha \ \ge\ \delta|\sigma|^{2m},$$

где постоянная $\delta > 0$ не зависит от $(x, e) \in R^n \times K$, $\sigma^\alpha = \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$.

Пусть также $f_1(x, 0) = 0$. Через C^γ, где $\gamma > 0$, обозначим банахово пространство непрерывных в R^n функций $u(x)$, производные которых до порядка $\gamma_0 = [\gamma]$ ($[\gamma]$ — целая часть γ) включительно удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\gamma - [\gamma] = \gamma - \gamma_0$,

$$\|u\|_{C^\gamma} = \sup_{x \in R^n} \sum_{|\alpha| \le \gamma_0} \left|D^\alpha u(x)\right| +$$

$$+ \sup_{x' \ne x'', |\alpha| = \gamma_0} \left|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')\right| \Big/ |x' - x''|^{\gamma - \gamma_0}.$$

Обозначим

$$Au = -\sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x, 0) D^\alpha u - [\, D_e f(x, 0) \,] D^\beta u,$$

где

$$\left[D_e f(x, e^0) \right] e = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x, e^0)}{\partial e_i} e_i .$$

Предположим, что в пространстве C^γ, где $0 < \gamma < \gamma_0$, оператор A удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \sigma(A) \ge 0$. Обозначим

$$\sigma_0 = \sigma(A) \cap \{ \lambda \in C\colon \operatorname{Re} \lambda = 0 \}, \quad \sigma_+ = \sigma(A) \cap \{ \lambda \in C\colon \operatorname{Re} \lambda > 0 \}.$$

Пусть существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что $\sigma_+ \subset \{ \lambda \in C\colon \operatorname{Re} \lambda > \kappa \}$.

Пусть собственное подпространство оператора A в C^γ, соответствующее спектральному множеству σ_0, является r-мерным.

Представим уравнение (1) в виде

$$\dot u + Au = \mathcal{R}(u), \tag{2}$$

где

$$\mathcal{R}(u) = \sum_{|\alpha| = 2m} \left[a_\alpha(\kappa, D^\beta u) - a_\alpha(\kappa, 0) \right] D^\alpha u + f(\kappa, D^\beta u) - [\, D_\alpha f(x, 0) \,] D^\beta u.$$

В дальнейшем решения уравнений будем понимать в классическом смысле. Кроме того, для решений, определенных на всей временной оси R, которые, следуя [10], называют глобальными решениями, потребуем, чтобы $\partial u / \partial t$, $D^\alpha u$ $(|\alpha| = 2m)$ были непрерывными по t, x и ограниченными по x функциями.

Введем обозначение $C^{2m+\gamma} = E$, $C^{\gamma} = E^*$, $\|\cdot\|_E = |\cdot|$, $\|\cdot\|_{E^*} = |\cdot|_*$.

Пусть P, Q — спектральные проекторы в E^*, отвечающие спектральному разложению $\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_+$. Обозначим $PE^* = E_1^*$, $QE^* = E_2^*$, $PE = E_1$, $QE = E_2$, $Pu = p$, $Qu = q$ и отождествим линейные r-мерные нормированные пространства E_1^*, E_1.

Выберем гладкую функцию $\theta: E_1 \to [0, 1]$ такую, что $\theta(p) = 1$ при $|p| \le 1$ и $\theta(p) = 0$ при $|p| \ge 2$. Обозначим $\mathcal{R}\left(p\theta\left(p\rho^{-1}\right) + q\right) = \mathcal{R}_\rho(p, q)$. Согласно определению $\mathcal{R}_\rho$ и представлению $\mathcal{R}$ отображение $\mathcal{R}_\rho$ удовлетворяет условиям

$$\left|\mathcal{R}_\rho(p, q)\right|_* \le C\rho^2, \tag{3}$$

$$\left|\mathcal{R}_\rho(p_1, q_1) - \mathcal{R}_\rho(p_2, q_2)\right|_* \le C\rho(|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|), \tag{4}$$

$$\left\|D\mathcal{R}_\rho(p_1, q_1) - D\mathcal{R}_\rho(p_2, q_2)\right\|_{\mathcal{L}(E, E^*)} \le C(|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|), \tag{5}$$

где $(p_i, q_i) \in E_1 \times E_2$, $|q_i| \le \rho$, $i = 1, 2$, а C — положительная постоянная.

1. Глобальные решения. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{p} + Ap &= P\mathcal{R}(p, q), \\ \dot{q} + Aq &= Q\mathcal{R}(p, q), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\rho$.

В следующей теореме утверждается существование r-параметрического семейства решений системы (6), определенных на отрицательной полуоси и ограниченных по переменной q. Это семейство решений, как будет далее показано, продолжимо на вещественную ось и образует r-параметрическое семейство глобальных решений, составляющих гладкую инвариантную поверхность системы (6).

Теорема 1. *Существуют положительные постоянные ρ_0, β, C_1 такие, что система уравнений (6) при $0 < \rho \le \rho_0$ для любого $\eta \in E_1$ имеет единственное определенное на отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$ решение $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ такое, что $p(0, \eta) = \eta$, $|q(t, \eta)| \le C_1\rho^2$, $t \le 0$. Отображения $\eta \to p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ дифференцируемы и, кроме того,*

$$\left\|\frac{\partial p}{\partial \eta}(t, \eta)\right\|_{\mathcal{L}(E_1)} \le C_1 e^{-\beta t}, \qquad \left\|\frac{\partial q}{\partial \eta}(t, \eta)\right\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le C_1\rho e^{-\beta t}, \tag{7}$$

$$\left\|\frac{\partial p}{\partial \eta}(t, \eta_1) - \frac{\partial p}{\partial \eta}(t, \eta_2)\right\|_{\mathcal{L}(E_1)} + \left\|\frac{\partial q}{\partial \eta}(t, \eta_1) - \frac{\partial q}{\partial \eta}(t, \eta_2)\right\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le C_1|\eta_1 - \eta_2| e^{-\beta t} \tag{8}$$

для всех $t \le 0$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Заметим, что выбор ρ_0 в теореме 1 осуществляется таким образом, что при $\rho < \rho_0$ встречающиеся далее неравенства вида $C_i\rho \le 1$, где C_i — некоторые постоянные, считаются выполненными. Обозначим $Lq = \dot{q} + Aq$.

Лемма 1. *Для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}_-$ функции $g(t)$, принимающей значения в E_2^*, уравнение $Lq = g$ имеет единственное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}_-$ решение со значениями в E_2.*

Лемма 1 следует из леммы 6 [6].

Для заданного банахова пространства F обозначим через $C_-(F)$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_-$ функций $g(t)$, принимающих значения в F с нормой $\|g\|_F = \sup_{t \le 0} \|g(t)\|_F$. Норму оператора $L^{-1}\colon C_-(E_2^*) \to C_-(E_2)$ обозначим через l.

Из леммы 1 и принципа сжимающих отображений вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $B \in C_-(\mathcal{L}(E_2, E_2^*))$. *Если для всех* $t \le 0$ *выполняется неравенство*

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(E_2, E_2^*)} \le \frac{1}{2} l, \tag{9}$$

то уравнение

$$L_B q = \dot{q} + Aq + B(t)q = g(t), \tag{10}$$

где $g \in C_-(E_2)$, *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}_-$ *решение* $q(t)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|q\| \le 2l\|q\|_*.$$

Для постоянной $\beta > 0$ обозначим через $C_-^{\beta}(F)$ пространство непрерывных на $\mathbb{R}_-$ функций, принимающих значения в F, для которых конечна величина

$$\sup_{t \le 0} \left\| q(t) e^{\beta t} \right\|_F = \|q\|_{F, \beta},$$

принимаемая за норму в этом пространстве.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда существует такое* β_0, *что для* $\beta \in [0, \beta_0]$ *уравнение* (7), *в котором* $g \in C_-^{\beta}(E_2^*)$, *имеет единственное решение* $q \in C_-^{\beta}(E_2)$; *при этом выполняется неравенство*

$$\|q\|_{\beta} \le 4l\|q\|_{*,\beta}.$$

Доказательство. Пусть $g \in C_-^{\beta}(E_2^*)$. Обозначим через $\delta_n\colon \mathbb{R}_- \to [0, 1]$ гладкую функцию, равную 1 при $t > -n$ и 0 при $t < -(n+1)$. Определим функцию $r(t) = e^{\beta t}$. Обозначим $q_n = L^{-1}(g\delta_n)$. Для функции $z_n = rq_n$ получим

$$L_B z_n = r\delta_n g + q_n \beta r.$$

Следовательно,

$$\|z_n\| \le 2l(\|r\delta_n g\|_* + \|q_n \beta r\|_*).$$

Отсюда следует, что при $2l\beta \le 1/2$ выполнястся неравенство

$$\|rq_n\| \le 4l\|r\delta_n g\|_*.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\eta \in E_1$, $q \in C_-(E_2)$, $\|q\| \le \rho$. *Существует единственное определенное на* $\mathbb{R}_-$ *решение* $\tilde{p}(t, \eta, q)$ *задачи*

$$\dot{p} + Ap = P\mathcal{R}(p, q(t)), \quad p(0) = \eta.$$

Пусть $q_i \in C_-(E_2)$, $\|q_i\| \le \rho$, $\eta_i \in E_1$, $i = 1, 2$. *Для* $t \le 0$ *выполняется неравенство*

$$|\tilde{p}(t,\eta_1,q_1) - \tilde{p}(t,\eta_2,q_2)| \le Me^{-\mu t}|\eta_1-\eta_2| + C\rho M\int_0^t e^{-\mu(t-s)}|q_1(s)-q_2(s)|ds,$$

где $\mu = \alpha + CM\rho \le 2\alpha$.

Доказательство. Существование решения $\tilde{p}$ следует из условий (3), (4).

Обозначим $\tilde{p}(t,\eta_i,q_i) = p_i(t)$, $i = 1, 2$, $p_1(t) - p_2(t) = p(t)$, $\eta_1 - \eta_2 = \eta$. Легко убедиться, что при $t \ge 0$ справедливо равенство

$$p(-t) = e^{At}\eta + \int_0^t e^{-A(t-s)}P(\mathcal{R}(p_1(-s),q_1(-s)) - \mathcal{R}(p_2(-s),q_2(-s)))ds.$$

Следовательно, согласно неравенству (4) выполняется неравенство

$$|p(-t)| \le Me^{\alpha t}|\eta| + \int_0^t MC\rho e^{\alpha(t-s)}(|p(-s)| + |q_1(-s) - q_2(-s)|)ds.$$

Отсюда с помощью неравенства Гронуолла получаем оценку для $p(t)$.

Лемма 5. *Пусть* $p(t)$ *— непрерывная на* $\mathbb{R}_-$ *функция, принимающая значения в* E_1. *Существует такое* $\rho_0 > 0$, *что для* $\rho \le \rho_0$ *уравнение*

$$Lq = Q\mathcal{R}(p(t),q)$$

имеет единственное решение $\tilde{q} \in C_-(E_1)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|\tilde{q}(\cdot,p)\| \le Cl\rho^2 \le \rho.$$

Если $p_i(t)$, $i = 1, 2$, *— непрерывные на* $\mathbb{R}_-$ *функции, принимающие значения в* E_1, *и при всех* $t \le 0$ $|p_1(t) - p_2(t)| \le \zeta e^{-\beta t}$, *где* $\beta \le \beta_0$, *то*

$$|\tilde{q}(t,p_1) - \tilde{q}(t,p_2)| \le Cl\rho\zeta e^{-\beta t}, \qquad t \le 0.$$

Доказательство. Пусть $q \in C_-(E_2)$, $\|q\| \le \rho$. Обозначим $L^{-1}Q\mathcal{R}(p(t), q(t)) = S(q)(t)$. Из неравенства (3) и лемме 1 следует неравенство

$$\|S(q)\| \le Cl\rho^2 \le \rho.$$

Пусть $q_i \in C_-(E_2)$, $\|q_i\| \le \rho$, $i = 1, 2$. Согласно (4) и лемме 1 выполняется неравенство

$$\|S(q_1) - S(q_2)\| \le Cl\rho\|q_1 - q_2\| \le \frac{1}{4}\|q_1 - q_2\|.$$

Из принципа сжимающих отображений следует, что уравнение $q = S(q)$ имеет единственное решение $\tilde{q} \in C_-(E_2)$, удовлетворяющее условию $\|\tilde{q}\| \le \rho$.

Обозначим $p_1(\cdot) - p_2(\cdot) = p(\cdot)$, $\tilde{q}(\cdot,p_1) - \tilde{q}(\cdot,p_2) = \tilde{q}_1(\cdot) - \tilde{q}_2(\cdot) = q(\cdot)$. Функция q удовлетворяет равенству

$$L_Bq = Gp,$$

где

$$B = -Q\int_0^1 D_q\mathcal{R}(p_2, \tilde{q}_2 + s(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2))ds,$$

$$G = Q\int_0^1 D_p\mathcal{R}(p_2 + s(p_1 - p_2), q_1)ds.$$

Из условий на $\mathscr{R}$ следует, что $B \in C_-\left(\mathscr{L}\left(E_2, E_2^*\right)\right)$ и выполняется неравенство $\|B\|_{\mathscr{L}(E_2, E_2^*)} \le C\rho \le l/2$. Соответственно $G \in C_-\left(\mathscr{L}\left(E_2, E_2^*\right)\right)$ и выполняется неравенство $\|G\|_{\mathscr{L}(E_2, E_2^*)} \le C\rho$. Следовательно, согласно лемме 3

$$\|q\|_\beta \le 4lC\rho\zeta.$$

Из полученного неравенства следует последнее утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Выберем $\eta \in E_1$, $q \in C_-(E_2)$, $\|q\| \le \rho$. Определим согласно лемме 4 функцию $\tilde{p}(t, \eta, q)$, а согласно лемме 5 функцию $\tilde{q}(t, \tilde{p}(\cdot, \eta, q))$. Определим оператор Φ равенством

$$\Phi(q, \eta)(t) = \tilde{q}(t, \tilde{p}(\cdot, \eta, q)).$$

Очевидно,

$$\|\Phi(q, \eta)\| \le Cl\rho^2 \le \rho.$$

Обозначим $\beta_0/2 = \beta$. Пусть $\eta_i \in E_1$, $i = 1, 2$, $q_i \in C_-(E_2)$, $\|q_i\| \le \rho$, $\|q_1 - - q_2\|_\beta < \infty$. Обозначим $p(t, \eta_1, q_1) - p(t, \eta_2, q_2) = p(t)$. Из леммы 4 следует оценка

$$|p(t)| \le M\left(|\eta_1 - \eta_2| + \frac{2C\rho}{\beta}\|q_1 - q_2\|_\beta\right)e^{-\beta t}, \quad t \le 0. \tag{11}$$

Согласно лемме 5 выполняется неравенство

$$\|\Phi(q_1, \eta_1) - \Phi(q_2, \eta_2)\|_\beta \le 4lC\rho M\left(|\eta_1 - \eta_2| + \frac{2C\rho}{\beta}\|q_1 - q_2\|_\beta\right). \tag{12}$$

На множестве функций $q \in C_-(E_2)$, удовлетворяющих условию $\|q\| \le \rho$, определим расстояние $\operatorname{dist}(q_1, q_2)$ формулой

$$\operatorname{dist}(q_1, q_2) = \|q_1 - q_2\|_\beta.$$

При $16C^2 l\rho^2/\beta \le 1$ отображение $q \to \Phi(q, \eta)$ во введенной метрике, как следует из неравенства (12), является липшицевым с постоянной Липшица $1/2$. Пусть $q(t, \eta)$ — неподвижная точка отображения Φ. Обозначим $p(t, \eta) = = \tilde{p}(t, \eta, q(\cdot, \eta))$. Тогда $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ — единственное решение системы (6), определенное на $\mathbb{R}_-$, такое, что $p(0, \eta) = \eta$, $\|q(\cdot, \eta)\| \le \rho$. Заметим, что согласно неравенствам (11), (12) при $t \le 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |p(t, \eta_1) - p(t, \eta_2)| &\le c_2|\eta_1 - \eta_2|e^{-\beta t}, \\ |q(t, \eta_1) - q(t, \eta_2)| &\le c_2|\eta_1 - \eta_2|e^{-\beta t}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $c_2 = \max(2M, 8MCl)$.

Осталось доказать часть теоремы, связанную с дифференцируемостью $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$.

2. Доказательство дифференцируемости $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$. Приводимое здесь доказательство дифференцируемости $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ отличается от приведенного в [3] и следует в основном схеме, предложенной в [8].

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{p} + Ap &= F_1(t)p + F_2(t)q + \xi(t), \\ \dot{q} + Aq &= G_1(t)p + G_2(t)q + \zeta(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где $F_i \in C_-(\mathscr{L}(E_i, E_1))$, $G_i \in C_-\left(\mathscr{L}\left(E_i, E_2^*\right)\right)$, $i = 1, 2$, и ограничены постоянной $C\rho$. Функции $(\xi, \eta) \in C_-^{\beta}(E_1) \times C_-^{\beta}(E_2^*)$, где $\beta = \beta_0 / 2$.

Покажем, что для малых ρ система (12) имеет единственное определенное на $\mathbb{R}_-$ решение $p_0(t, \eta)$, $q_0(t, \eta)$, удовлетворяющее условиям $p_0(0, \eta) = \eta$, $(p_0, q_0) \in C_-^{\beta}(E_1) \times C_-^{\beta}(E_2^*)$.

Пусть $q \in C_-^{\beta}(E_2)$. Обозначим через $\hat{p}$ определенное на $\mathbb{R}_-$ решение задачи

$$\dot{p} + Ap = F_1(t)p + F_2(t)q + \xi(t), \qquad p_0(0) = \eta,$$

где $\eta \in E_1$.

Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 4, приводят к неравенству

$$|\hat{p}(t)| \le M\left(|\eta| + \frac{8C\rho}{3\beta_0}\|q\|_{\beta} + \frac{8}{3\beta_0}\|\xi\|_{\beta}\right)e^{-\beta t}, \qquad t \le 0.$$

Пусть $\hat{q}(t) = \hat{q}(t, \hat{p}(\cdot, \eta))$ — решение уравнения

$$\dot{q} + Aq = G_1(t)\hat{p}(t) + G_2(t)q + \zeta(t),$$

такое, что $q \in C_-^{\beta}(E_2)$. Из леммы 3 следует, что существует единственное решение рассматриваемой задачи, причем это решение удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{q}\|_{\beta} \le 4l\left(C\rho\|\hat{p}\|_{\beta} + \|\zeta\|_{*,\beta}\right).$$

Следовательно, согласно оценке $\hat{p}$ имеем

$$\|\hat{q}\|_{\beta} \le 4l\left(CM\rho|\eta| + \frac{8MC^2\rho^2}{3\beta_0}\|q\|_{\beta} + \frac{8MC\rho}{3\beta_0}\|\xi\|_{\beta} + \|\zeta\|_{*,\beta}\right).$$

Отображение $\hat{q}(t, \hat{p}(\cdot, \eta, q)) = W(\eta, q)(t)$ является аффинным по p, q. Очевидно, что если $64MC^2\rho^2/3\beta_0 \le 1$, то уравнение $q = W(t, \eta)$ имеет единственное решение $q_0 \in C_-^{\beta}(E_2)$. Обозначим $p_0(0, \eta) = \hat{p}(t, \eta, q_0(\cdot, \eta))$.

Согласно приведенной схеме построения $p_0(0, \eta)$, $q_0(0, \eta)$ решение системы (14) удовлетворяет условиям $p_0(0, \eta) = \eta$, $(p_0, q_0) \in C_-^{\beta}(E_1) \times C_-^{\beta}(E_2)$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |p_0(t, \eta)| &\le M\left(2|\eta| + c_3\left(\|\xi\|_{\beta} + \|\zeta\|_{\beta}\right)\right)e^{-\beta t}, \qquad t \le 0, \\ |q_0(t, \eta)| &\le c_3\left(\rho|\eta| + \|\xi\|_{\beta} + \|\zeta\|_{\beta}\right)e^{-\beta t}, \qquad t \le 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где c_3 — постоянная. Заметим, что при соответствующем выборе c_3 неравенство (15) справедливо для всех $0 < \beta \le \beta_0$.

Определим коэффициенты системы (12) согласно равенствам

$$\begin{aligned} F_1(t) &= D_p P\mathscr{R}(p(t, \eta), q(t, \eta)), \qquad F_2(t) = D_q P\mathscr{R}(p(t, \eta), q(t, \eta)), \\ G_1(t) &= D_p Q\mathscr{R}(p(t, \eta), q(t, \eta)), \qquad F_2(t) = D_q Q\mathscr{R}(p(t, \eta), q(t, \eta)). \end{aligned} \tag{16}$$

В системе (14) положим $\xi = 0$, $\zeta = 0$ и обозначим через $p_0(t, \eta)$, $q_0(t, \eta)$ решение системы (14), удовлетворяющее условиям $p(0, \eta) = \eta$, $\eta \in E_1$, $(p(\cdot, \eta), q(\cdot, \eta)) \in C_-^{\beta}(E_1) \times C_-^{\beta}(E_2)$. Согласно (15) справедливо неравенство

$$\rho\|p_0(\cdot, \eta)\|_{\beta} + \|q_0(\cdot, \eta)\|_{\beta} \le c_4\rho\|\eta\|, \tag{17}$$

где c_4 — постоянная.

Отображение $\eta \to (p(\cdot,\eta), q(\cdot,\eta))$ линейно. Обозначим

$$p_0(t,\eta) = X_0(t)\eta, \quad q_0(t,\eta) = Y_0(t)\eta.$$

Пусть $\eta, \tilde{\eta} \in E_1$. Обозначим $p(t,\tilde{\eta}) = p_1(t)$, $p(t,\eta) = p_2(t)$, $q(t,\tilde{\eta}) = q_1(t)$, $q(t,\eta) = q_2(t)$, $p_1(t) - p_2(t) = p(t)$, $q_1(t) - q_2(t) = q(t)$. Функции $p(t) - X_0(t)(\tilde{\eta}-\eta) = \Phi(t)$, $q(t) - Y_0(t)(\tilde{\eta}-\eta) = \Theta(t)$, удовлетворяют системе

$$\dot{\Phi} + A\Phi = F_1(t)\Phi + F_2(t)\Theta + r_1(t),$$

$$\dot{\Theta} + A\Theta = G_1(t)\Phi + G_2(t)\Theta + r_2(t),$$

где

$$r_1(t) = P(\mathcal{R}(p_1(t), q_1(t)) - \mathcal{R}(p_2(t), q_2(t))) - F_1(t)p(t) - F_2(t)q(t) =$$

$$= \int_0^1 \left\{ P\Big(\mathcal{R}_p(p_2(t)+sp(t), q_2(t)+sq(t)) - \mathcal{R}_p(p_2(t), q_2(t))\Big)\right\} p(t)\,ds +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ P\Big(\mathcal{R}_q(p_2(t)+sp(t), q_2(t)+sq(t)) - \mathcal{R}_p(p_2(t), q_2(t))\Big)\right\} q(t)\,ds,$$

$$r_2(t) = Q(\mathcal{R}(p_1(t), q_1(t)) - \mathcal{R}(p_2(t), q_2(t))) - G_1(t)p(t) - G_2(t)q(t) =$$

$$= \int_0^1 \left\{ Q\Big(\mathcal{R}_p(p_2(t)+sp(t), q_2(t)+sq(t)) - \mathcal{R}_p(p_2(t), q_2(t))\Big)\right\} q(t)\,ds +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ Q\Big(\mathcal{R}_q(p_2(t)+sp(t), q_2(t)+sq(t)) - \mathcal{R}_q(p_2(t), q_2(t))\Big)\right\} q(t)\,ds.$$

Следовательно, согласно неравенствам (5), (13) имеем

$$\|r_1\|_{2\beta} + \|r_2\|_{2\beta} \le 2C\big(\|p\|_\beta + \|q\|_\beta\big)^2 \le c_4|\eta_1 - \eta_2|^2,$$

где c_4 — постоянная.

Так как $\Phi(0) = 0$, то согласно неравенствам (13) при $t \le 0$ выполняется следующее неравенство:

$$|p(t,\tilde{\eta}) - p(t,\eta) - X_0(t)(\tilde{\eta}-\eta)| + |q(t,\tilde{\eta}) - q(t,\eta) - Y_0(t)(\tilde{\eta}-\eta)| \le$$

$$\le c_5|\tilde{\eta}-\eta|^2 e^{-2\beta t},$$

где c_5 — постоянная. Таким образом, $D_\eta p(t,\eta)$, $D_\eta q(t,\eta)$ существуют и равны соответственно $X_0(t)$, $Y_0(t)$.

Будем считать что, $D_\eta p(t,\eta)$, $D_\eta q(t,\eta)$ удовлетворяют условию Липшица. Если $\tilde{X}_0(t) = D_\eta p(t,\tilde{\eta})$, $\tilde{Y}_0(t) = D_\eta q(t,\tilde{\eta})$, то $p^0(t) = \tilde{X}_0(t)\xi$, $q^0(t) = \tilde{Y}_0(t)\xi$ являются решением системы

$$\dot{p} + Ap = \tilde{F}_1(t)p + \tilde{F}_2(t)q,$$

$$\dot{q} + Aq = \tilde{G}_1(t)p + \tilde{G}_2(t)q,$$

удовлетворяющим условиям $p(0) = \xi$, $q \in C_-^\beta(E_2)$.

Функции $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ определены согласно равенствам (14), в которых η заменено на $\tilde{\eta}$.

Обозначим $z(t) = \big(X_0(t) - \tilde{X}_0(t)\big)\xi$, $w(t) = \big(Y_0(t) - \tilde{Y}_0(t)\big)\zeta$, где $\zeta \in E_1$. Функции z, w удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{z} + Az = F_1(t)z + F_2(t)w + r_1(t)\xi,$$
$$\dot{w} + Aw = G_1(t)z + G_2(t)w + r_2(t)\zeta,$$

в которой

$$r_1(t) = \left[F_1(t) - \tilde{F}_1(t)\right]\tilde{X}_0(t) + \left[F_2(t) - \tilde{F}_2(t)\right]\tilde{Y}_0(t),$$
$$r_2(t) = \left[G_1(t) - \tilde{G}_1(t)\right]\tilde{X}_0(t) + \left[G_2(t) - \tilde{G}_2(t)\right]\tilde{Y}_0(t).$$

Из неравенств (5), (13), (17) следует неравенство

$$\| r_1(t)\xi\| + \| r_2(t)\xi\|_* \le c_6|\eta - \tilde{\eta}||\xi|e^{-2\beta t}, \qquad t \le 0.$$

Так как $z(0) = 0$, то согласно неравенствам (15) справедливо неравенство

$$\| z\|_{2\beta} + \| w\|_{2\beta} \le c_7|\eta - \tilde{\eta}||\xi|,$$

которое согласно определению z, w приводит к неравенству

$$\| Dp(t, \eta) - Dp(t, \overline{\eta})\|_{\mathcal{L}(E_1)} + \| Dq(t, \eta) - Dq(t, \overline{\eta})\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le$$
$$\le c_8|\eta - \tilde{\eta}|e^{-2\beta t}, \qquad t \le 0.$$

3. Центральное многообразие. Из единственности решения $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ автономной системы (6) следует, что для всех $\tau > 0$, $t \le 0$

$$p(t-\tau, \eta) = p(t, p(-\tau, \eta)), \qquad q(t-\tau, \eta) = q(t, p(-\tau, \eta)). \tag{18}$$

Из равенств (18) следует, что решения $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ системы (6) продолжимы на вещественную ось и равенства (18) справедливы для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$\sigma(\eta) = q(0, \eta). \tag{19}$$

Из равенств (18), (19) следует

$$q(0, p(t, \eta)) = \sigma(p(t, \eta)) = q(t, \eta), \tag{20}$$

т. е. $q = \sigma(p)$ определяет инвариантное многообразие системы (6).

Согласно определению σ и теореме 1 выполняется неравенство

$$|\sigma(\eta)| \le c_1\rho^2.$$

Кроме того, производная $D\sigma$ существует и справедливы неравенства

$$\| D\sigma(\eta)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le c_1\rho,$$
$$\| D\sigma(\eta) - D\sigma(\tilde{\eta})\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le c_1|\eta - \tilde{\eta}|.$$

Согласно определению $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$, где $\eta \in E_1$, для малых $h \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$p(h, \eta) = e^{-Ah}\eta + \int_0^h e^{-A(h-s)}\eta P\mathcal{R}(p(s, \eta), q(s, \eta))ds =$$
$$= \eta + (-A\eta + P\mathcal{R}(\eta, \sigma(\eta)))h + o(h).$$

Очевидно, для фиксированного t

$$p(t, \tilde{\eta}) = p(t, \eta) + Dp(t, \eta)(\tilde{\eta} - \eta) + o(|\eta - \tilde{\eta}|).$$

Положив $\tilde{\eta} = p(h, \eta)$ и воспользовавшись (20), получим

$$p(t, p(h, \eta)) = p(t+h, \eta) = p(t, \eta) + Dp(t, \eta)(p(h, \eta) - \eta) +$$
$$+ o(|p(h, \eta) - \tilde{\eta}|) = p(t, \eta) + Dp(t, \eta)(-A\eta + P\mathcal{R}(\eta, \sigma(\eta)))h + o(h).$$

Следовательно, $\dfrac{dp(t,\eta)}{dt}$ существует и равно $Dp(t,\eta)(-Ah + P\mathcal{R}(\eta,\sigma(\eta)))$. Согласно равенствам (20) производная $\dfrac{dq(t,\eta)}{dt}$ также существует и

$$\frac{d}{dt}q(t,\eta) = Dq(0, p(t,\eta))\frac{d}{dt}p(t,\eta).$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}q(t,\eta) + Aq(t,\eta) = Q\mathcal{R}(p(t,\eta), q(t,\eta)).$$

Полагая в этих формулах $t = 0$, получаем равенство

$$D\sigma(\eta)(-A\eta + P\mathcal{R}(\eta,\sigma(\eta)) + A\sigma(\eta) - Q\mathcal{R}(\sigma(\eta),\sigma(\eta))) = 0. \tag{21}$$

Итогом предыдущих рассуждений является следующая теорема.

Теорема 2. *При* $\rho \le \rho_0$ *система* (6) *имеет инвариантное многообразие* $q = \sigma(p)$, *где* $\sigma\colon E_1 \to E_2$ — *дифференцируемое отображение такое, что*

$$|\sigma(\eta)| \le c_1\rho^2, \qquad \|D\sigma(\eta)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_2)} \le c_1\rho,$$
$$\|D\sigma(\eta) - D\sigma(\tilde\eta)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_2)} \le c_1|\eta - \tilde\eta|.$$

4. Принцип сведения. Аналогично пространству $C^{\beta}_{-}(F)$, $\beta > 0$, введем пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве F, для которых конечна величина

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)e^{-\beta|t|}\right\| = \|u\|_{F,\beta},$$

принимаемая за норму в этом пространстве.

Введем также в рассмотрение пространство $C^{\beta}_{+}(F)$, состоящее из функций, определенных на положительной полуоси, и аналогичное $C^{\beta}(F)$.

Следуя [5], можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 6. *Существует такое* β^0, *что операторы* $L^{-1}\colon C^{\beta}(E_2^*) \to C^{\beta}(E_2)$ *существуют при* $0 < \beta \le \beta^0$, *а их нормы не превышают* $2l$.

Произвольный элемент $g \in C^{\beta}_{+}(E_2^*)$ продолжим нулем на всю ось. Полученная функция принадлежит расширению пространства $C^{\beta}(E_2^*)$, на котором справедлива лемма 6. Положим по определению $(T^+g)(t) = (L^{-1}g)(t)$, $t \ge 0$. Получаем семейство ограниченных операторов $T^+\colon C^{\beta}_{+}(E_2^*) \to C^{\beta}_{+}(E_2)$. Заметим, что $(T^+g)(t) = 0$.

В [6] доказано, что задача Коши для уравнения (1) локально разрешима. Вопрос о разрешимости квазилинейных уравнений вида (1) с быстро осциллирующей главной частью на положительной полуоси решен в [6] (лемма 16). Аналогичный результат имеет место и в рассматриваемом случае.

Лемма 7. *Существует такое* $\delta > 0$, $\delta < \rho$, *что для любых* $(p_0, q_0) \in E_1 \times E_2$ *с* $|q_0| < \delta$ *существует и единственно решение* $(p(t), q(t))$ *системы* (6), *определенное на положительной полуоси и удовлетворяющее условиям* $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$.

Доказательство. Пусть $\eta \in E_1$. Согласно условиям на спектр оператора A существуют положительные постоянные M, α, где $2\alpha < \beta^0$, такие, что справедливо неравенство

$$|e^{-At}\eta| \le Me^{\alpha t}|\eta| \tag{22}$$

для всех $t \ge 0$.

Пусть $(p(\cdot), q(\cdot)) \in C_+^{\beta}(E_1) \times C_+(E_2)$, где $2\alpha < \beta \le \beta^0$, удовлетворяет условию $|q(\cdot)| \le \rho$. Обозначим

$$F(p,q)(t) = \left(\int_0^t e^{-A(t-s)} P\mathcal{R}(p(s), q(s))\,ds, \left(T^+ Q\mathcal{R}(p(\cdot), q(\cdot))\right)(t) \right).$$

Из неравенств (3), (22), определения оператора T^+ и леммы 1 следует

$$F(p,q) = (F_1(p,q), F_2(p,q)) \in C_+^{\beta}(E_1) \times C_+(E_2), \qquad |F_2(p,q)| \le \rho/2.$$

Из неравенств (4), (22) и леммы 6 следует справедливость неравенства

$$|F_1(p_1,q_1)(t) - F_1(p_2,q_2)(t)| + |F_2(p_1,q_1)(t) - F_2(p_2,q_2)(t)| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(|p_1 - p_2|_{\beta} + |q_1 - q_2|_{\beta}\right)e^{\beta t}, \qquad t \ge 0.$$

Следовательно, в метрике

$$\operatorname{dist}((p_1,q_1),(p_2,q_2)) = \|p_1 - p_2\|_{\beta} + \|q_1 - q_2\|_{\beta}$$

оператор F является липшицевым с постоянной Липшица, равной $1/2$. Уравнение

$$(p(t), q(t)) = \left(e^{-At}p_0, e^{-At}q_0\right) + F(p,q)(t)$$

при условии $\|e^{-At}q_0\| \le \rho/2$, $t \ge 0$, имеет единственное решение из множества функций $(p,q) \in C_+^{\beta}(E_1) \times C_+(E_2)$, для которых $|q| \le \rho$.

Для $\beta > 0$ и заданного банахова пространства F обозначим через $C^{-\beta}(F)$ пространство, состоящее из непрерывных на вещественной оси функций $u(t)$ со значениями в F, для которых конечна величина $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left\|u(t)e^{-\beta t}\right\|_F = \|u\|_{F,-\beta}$, принимаемая за норму в $C^{-\beta}(F)$.

Лемма 8. *Существует такое* $\hat{\beta} > 0$, *что при* $\beta \in (0, \hat{\beta}]$ *операторы* $L^{-1}\colon C^{-\beta}\left(E_2^*\right) \to C^{-\beta}(E_2)$ *ограничены, а их нормы не превышают* $2l$.

Доказательство. Пусть $g \in C^{-\beta}\left(E_2^*\right)$, $q = L^{-1}g$. Положим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \exp(\beta|t|), & t < n; \\ \exp(\beta n), & |t| \ge n. \end{cases}$$

Тогда для $z_n = \varphi_n q$ имеем $Lz_n = \varphi_n g + \varphi_n' q$. Поэтому

$$|z_n| = l\left(|\varphi_n g|_* + |\varphi_n' q|_*\right) \le l\left(|\varphi_n g|_* + \beta|\varphi_n' q|_*\right).$$

Так как $|\varphi_n q|_* \le |\varphi_n q|$, то при $l\beta \le 1/2$ получаем $|\varphi_n q| \le l\beta|\varphi_n g|_*$. Переходя к пределу, получаем требуемую оценку $\|q\|_{\beta} \le 2l\|g\|_{*,\beta}$.

Продолжим произвольный элемент $f \in C_+^{-\beta}\left(E_2^*\right)$ нулем на всю ось. Пусть $q = L^{-1}f$. Положим по определению $(I_+ f)(t) = q(t)$, $t \ge 0$. В результате получим семейство ограниченных операторов $I_+\colon C_+^{-\beta}\left(E_2^*\right) \to C_+^{-\beta}(E_2)$, $\beta \in (0, \hat{\beta}]$.

Лемма 9. *Пусть* $(p(t), q(t))$ — *решение системы* (6) *с* $(p(0), q(0)) \in E_1 \times \times E_2$. *Тогда если* $|p(0)| + |q(0)|$ *достаточно мало, то существует постоянная* c_9 *такая, что*

$$|q(t) - \sigma(p(t))| \leq c_9 e^{-\hat{\beta}t} |q(0) - \sigma(p(0))|$$

для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Обозначим $z(t) = q(t) - \sigma(p(t))$. Воспользовавшись равенством (21), получим

$$Lz = \dot{z} + Az = Q\mathfrak{G}(z),$$

где

$$\mathfrak{G}(z) = D\sigma(p)[P(\mathfrak{R}(p, \sigma(p)) - \mathfrak{R}(p, \sigma(p) + z))] +$$
$$+ \mathfrak{R}(p, \sigma(p) + z) - \mathfrak{R}(p, \sigma(p)).$$

Оператор $Q\mathfrak{G}$ определен на пространстве функций $z \in E_2$, удовлетворяющих условию $|q| \leq \rho/2$. Значения оператора $Q\mathfrak{G}$ принадлежат пространству E_2^*. Из неравенства (4) и теоремы 2 следует, что постоянная Липшица оператора $\mathfrak{G}$ не превышает $2C\rho$.

Рассмотрим уравнение

$$z = e^{-At}a + I_+ Q\mathfrak{G} = D(z),$$

где $a = q(0) - \sigma(p(0)) \in E_2$. Без ограничения общности можно предполагать, что $e^{-At}z_0 \in C_+^{-\hat{\beta}}(E_2)$. Постоянная Липшица оператора D в $C_+^{-\hat{\beta}}(E_2)$ равна $1/2$, если только $\|z\|_{-\beta} \leq \rho/2$. Поэтому процесс итераций сходится, если первое приближение $z_1 = D(0) = e^{-At}z_0$ мало в $C_+^{-\hat{\beta}}(E_2)$. При этом неподвижная точка z оператора D удовлетворяет оценке

$$\|z\|_{-\hat{\beta}} \leq 2\|z_1\|_{-\hat{\beta}} \leq c_9|a|.$$

Доказательство следующего предложения проводится аналогично [3].

Лемма 10. *Пусть* $(p(t), q(t))$ — *решение системы* (6), *удовлетворяющее условиям леммы* 9. *Существует единственное решение* $\overline{p}$ *уравнения*

$$\dot{p} + Ap = P\mathfrak{R}(p, \sigma(p))$$

такое, что

$$|p(t) - \overline{p}(t)| \leq c_{10}e^{-\hat{\beta}t} |q(0) - \sigma(p(0))|,$$

где c_{10} — *постоянная.*

Из предыдущих результатов следует один из основных результатов настоящей работы.

Теорема 3. *Существует гладкое локальное центральное многообразие уравнения* (2)

$$S = \{u = p + \sigma(p),\ p \in E_1,\ |p| < p_0\},$$

касательное к E_1 *в нуле. Поток* S *может быть представлен дифференциальным уравнением в* E_1:

$$\dot{p} + Ap = P\mathfrak{R}(p + \sigma(p)).$$

Если $\Sigma \subset S$ — *устойчивое, асимптотически устойчивое, неустойчивое инвариантное множество относительно потока на* S, *то* Σ — *соответственно* *устойчивое, асимптотически устойчивое, неустойчивое инвариантное множество уравнения* (2) *в* E.

5. Разложение центрального многообразия. Покажем, что для функции σ, задающей центральное многообразие уравнения (2), можно построить асимптотически сходящиеся степенные ряды, исходя непосредственно из дифференциального уравнения

$$D\sigma(p)[-Ap+P\mathcal{R}(p+\sigma(p))]+A\sigma(p)-Q\mathcal{R}(p+\sigma(p)) = 0.$$

Излагаемое доказательство представления σ в виде асимптотически сходящегося степенного ряда отличается от доказательств, приведенных в [3, 9, 11, 12].

Для функции $\varphi: E_1 \to E_2$, непрерывно дифференцируемой в окрестности нуля, определим

$$(V\varphi)(p) = D\varphi(p)(-Ap+P\mathcal{R}(p+\sigma(p))+A\varphi(p)-Q\mathcal{R}(p+\sigma(p))).$$

Теорема 4. *Пусть* φ — *непрерывно дифференцируемая функция, действующая из окрестности нуля* E_1 *в* E_2, *которая удовлетворяет уравнению при* $(V\varphi)(p) = O(|p|^r)$ *при* $p \to 0$, $r>1$, *причем* $\varphi(0)=0$, $D\varphi(0)=0$. *Тогда если* σ — *отображение, задающее локальное центральное многообразие уравнения* (2), *то* $|\sigma(p)-\varphi(p)| = O(|p|^r)$ *при* $p\to 0$.

Если функция $\mathcal{R}: E \to E^*$ *вблизи нуля* r *раз непрерывно дифференцируема, то существует единственная полиномиальная функция* φ *порядка* r, *удовлетворяющая приведенным уравнениям.*

Доказательство. Пусть $\theta: E_1 \to E_2$ — непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем такая, что $\theta(p)=\varphi(p)$ для малых p. Без ограничения общности можно считать, что для заданных положительных ρ, μ, $\rho \le \rho_0$, где ρ_0 определена в теореме 1, выполнены условия $|\theta(p)| \le \mu\rho$, $\|D\theta(p)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} \le \mu$ для всех $p \in E_1$. Положим

$$\Delta(p) = D\sigma(p)[-Ap+P\mathcal{R}(p,\theta(p))]+A\theta(p)-Q\mathcal{R}(p,\theta(p)),$$

где $\mathcal{R}(p,q)=\mathcal{R}_\rho(p,q)$, а функция $\mathcal{R}_\rho(p,q)$ определена выше. Согласно определению θ существует постоянная c_{11} такая, что для всех $p\in E_1$ выполняются неравенства

$$|\Delta(p)|_* \le c_{11}|p|^r, \qquad |\Delta(p)|_* \le c_{11}\mu\rho.$$

Пусть $p(t)=p(t,\eta)$, $q(t)=\sigma(p(t,\eta))$ — решение системы (6), определенное в теореме 1. Обозначим $z(t)=\sigma(p(t))-\theta(p(t))$. Тогда

$$\dot z + Az = QK(z),$$

где

$$K(z) = \Delta(p)-Q(\mathcal{R}(p,\theta(p)+z) - \mathcal{R}(p,\theta(p))) -$$
$$-D\theta(p)[P(\mathcal{R}(p,\theta(p)+z)-\mathcal{R}(p,\theta(p)))].$$

Из определения z следует ограниченность функции $z(t)$ на $\mathbb{R}_-$: $|z(\cdot)| \le \le \rho/2$. Константу $\varepsilon>0$ в неравенстве (8) можно считать удовлетворяющей условию $3\varepsilon r \le \beta_0$, где β_0 определена в лемме 3. Так как $p(t,0)=0$, то согласно неравенствам (13) $|p(t)| \le c_2|\eta|e^{-\beta t}$, $t\le 0$. Величину β за счет выбора ρ можно выбрать так, чтобы $\beta \le 3l$.

Пусть $z(\cdot)\in C_-(E_2)$, причем $|z(\cdot)| \le \rho/2$. Обозначим $L^{-1}QK(z)=\mathcal{B}(z)$.

Для $z_i \in C_-(E_2)$, $|z_i| \leq \rho/2$, $i = 1, 2$, таких, что $\|z_1(\cdot) - z_2(\cdot)\|_{\beta_0} < \infty$, согласно неравенствам (4), выбору θ и лемме 3 выполняется неравенство

$$\|\mathcal{B}(z_1)(\cdot) - \mathcal{B}(z_2)(\cdot)\|_{\beta_0} \leq \frac{1}{2}\|z_1(\cdot) - z_2(\cdot)\|_{\beta_0}.$$

Следовательно, процесс итераций решения уравнения $z = \mathcal{B}(z)$ сходится, если первое приближение $z_1 = \mathcal{B}(0)$ удовлетворяет оценкам $|z_1| \leq \rho/2$, $|z_1|_{\beta_0} < \infty$. Так как $K(0) = \Delta(p(t))$, то согласно оценкам $|\Delta(p(t))| \leq c_{11}\mu\rho$, $|\Delta(p(t))| \leq \leq c_{11}c_2^r|\eta|^r e^{-\beta_0 t}$ эти условия выполнены за счет выбора μ и ограниченности оператора L^{-1}. Следовательно, решение уравнения $z = \mathcal{B}(z)$ — функция $z(t)$ — удовлетворяет неравенству $|z(\cdot)| \leq 2|z_1(\cdot)|$. Так как $z(0) = \sigma(\eta) - \theta(\eta)$, то

$$|\sigma(\eta) - \theta(\eta)| \leq c_{12}|\eta|^r.$$

Доказательство заключительной части теоремы проводится согласно [3].

Заметим, что предложенная схема построения локальных центральных многообразий квазилинейных параболических уравнений, а также исследования их свойств применимы при достаточно общих условиях и в случае ограниченных областей.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 408 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
4. *Вишневский М. П.* Инвариантные множества нелинейных параболических систем. Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. – С. 32–56.
5. *Левитан Б. Н., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
7. *Левенштам В. Б.* Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1992. – **56**, № 44. – С. 813–851.
8. *Coppel W. A., Palmer K. J.* Averaging and integral manifolds // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – **2**. – P. 197–222.
9. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Теорема о центральном многообразии нелинейного параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1021–1036.
10. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 6. – С. 1380–1408.
11. *Hausrath A. B.* Stability in the critical case of purely imaginary roots for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1973. – **13**. – P. 329–357.
12. *Carr J.* Application of center manifold theory. – New York: Springer, 1981. – 142 p.
13. *Chen Yushu, Xu Jian.* Universal classification of bifurcating solutions to a primary parametrie resonance in der Pol-Duffing Matchicu's systems // Science in China. – 1996. –**39**, № 4. – P. 405–174.

Получено 25.09.97