УДК 517.9

Л. Я. Гадомский, Е. А. Гребеников, А. Р. Гурская, Н. И. Земцова
(Ин-т высокопроизвод. вычислит. систем РАН, Москва)

НОВЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОБЛЕМЕ МНОГИХ ТЕЛ, ВЗАИМНО ПРИТЯГИВАЮЩИХ ДРУГ ДРУГА ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ, ЗАВИСЯЩЕМУ ОТ ВЗАИМНЫХ РАССТОЯНИЙ

The existence of a 5-parameter family of exact solutions is proved for differential equations describing the motion of many bodies, which are mutually attracted by each other under an arbitrary law dependent of distances between the considered bodies.

Доведено існування 5-параметричної сім'ї точних розв'язків диференціальних рівнянь руху багатьох тіл, що взаємно притягуються один до одного за довільним законом, який залежить від відстаней між ними.

В работе [1] показано, что в плоской ньютоновой проблеме $(n+1)$-тел P_0, $P_1, \ldots, P_n$ с массами $m_0, m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, $n \geq 2$, образующих в начальный момент правильный многоугольник с центром P_0, существует 4-параметрическое семейство точных решений, геометрически изображаемых вращающимся вокруг центра P_0 многоугольником, каждая из вершин которого движется по коническому сечению.

В настоящей статье доказано существование 5-параметрического семейства точных решений дифференциальных уравнений движения в проблеме $(n+1)$-тел, взаимно притягивающих друг друга по закону $F_{ks} \sim \Delta_{ks}^{-(\alpha+1)}$, где F_{ks} — сила взаимного притяжения тел P_k и P_s, Δ_{ks} — их взаимное расстояние, α — произвольный числовой параметр, характеризующий гравитационное потенциальное поле. Случай $\alpha = 1$, которому соответствует классическая ньютонова проблема $(n+1)$-тел, рассмотрен в [1].

1. Симметричные решения плоской проблемы $(n+1)$-тел. Дифференциальные уравнения движения тел P_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеющих одну и ту же массу m, относительно тела P_0, находящегося в начале координат, в полярных координатах, как и для ньютоновой проблемы [2], могут быть легко выведены и имеют вид

$$\ddot{\rho}_k - \rho_k \dot{\lambda}_k^2 + \frac{f\alpha(m_0+m)}{\rho_k^{\alpha+1}} = f\alpha m {\sum_{s=1}^{n}}' \left[\frac{\rho_s \cos(\lambda_s - \lambda_k) - \rho_k}{\Delta_{ks}^{\alpha+1}} - \frac{\cos(\lambda_s - \lambda_k)}{\rho_s^{\alpha+1}} \right],$$

$$\rho_k \ddot{\lambda}_k + 2\dot{\rho}_k \dot{\lambda}_k = f\alpha m {\sum_{s=1}^{n}}' \left(\frac{\rho_s}{\Delta_{ks}^{\alpha+2}} - \frac{1}{\rho_s^{\alpha+1}} \right) \sin(\lambda_s - \lambda_k), \tag{1}$$

где f — постоянная тяготения,

$$\Delta_{ks}^2 = \rho_s^2 + \rho_k^2 - 2\rho_s \rho_k \cos(\lambda_s - \lambda_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n; \ s \neq k.$$

Знак „штрих" при суммах означает, что индекс суммирования s не может быть равен k. Заметим также, что общий порядок системы дифференциальных уравнений (1) равен $4n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решение системы* (1), *определяемое начальными условиями*

$$\rho_k(0) = a_0, \quad \dot{\rho}_k(0) = b_0, \quad \lambda_k(0) = \frac{2\pi(k-1)}{n},$$
$$\dot{\lambda}_k(0) = c_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

одновременно является решением n *одинаковых систем* 4-*го порядка вида*

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\lambda}^2 = -A_n \rho^{-(\alpha+1)},$$
$$\rho\ddot{\lambda} + 2\dot{\rho}\dot{\lambda} = 0, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\rho(0) = a_0, \quad \dot{\rho}(0) = b_0, \quad \lambda(0) = 0, \quad \dot{\lambda}(0) = c_0. \tag{4}$$

В уравнениях (3) *использованы обозначения*

$$\rho(t) = \rho_1(t) = \ldots = \rho_n(t),$$
$$\lambda(t) = \lambda_1(t), \tag{5}$$
$$A_n = f\alpha\left[m_0 + m2^{-(\alpha+1)}\sum_{s=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-\alpha}\right],$$

а величины $a_0 > 0$, b_0, c_0 *являются произвольными параметрами.*

Доказательство. Как и в работе [1], введем новые переменные u_k, v_k по формулам

$$u_k = \rho_k - \rho, \quad v_k = \lambda_k - \lambda, \quad k = 2, \ldots, n,$$
$$\rho(t) = \rho_1(t), \quad \lambda(t) = \lambda_1(t). \tag{6}$$

В новых переменных система (1) имеет вид

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\lambda}^2 =$$
$$= -\frac{f\alpha(m_0+m)}{\rho^{\alpha+1}} + f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s - \rho}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right],$$
$$\rho\ddot{\lambda} + 2\dot{\rho}\dot{\lambda} = f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right]\sin v_s\,; \tag{7$'$}$$

$$\ddot{u}_k - \rho(2\dot{\lambda}\dot{v}_k + \dot{v}_k^2) - u_k(\dot{\lambda}+\dot{v}_k)^2 =$$
$$= -f\alpha(m_0+m)\left[\frac{1}{(\rho+u_k)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\rho^{\alpha+1}}\right] +$$
$$+ f\alpha m\sum_{i=1}^{n}{}'\left[\frac{(\rho+u_i)\cos(v_i-v_k) - (\rho+u_k)}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}} - \frac{\cos(v_i-v_k)}{(\rho+u_i)^{\alpha+1}}\right] -$$
$$- f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s - \rho}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right],$$
$$\rho\ddot{v}_k + u_k(\ddot{\lambda}+\ddot{v}_k) + 2\dot{\rho}\dot{v}_k + 2\dot{u}_k(\dot{\lambda}+\dot{v}_k) = \tag{7$''$}$$

$$= f\alpha m \sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{\rho + u_i}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u_i)^{\alpha+1}} \right] \sin(v_i - v_k) -$$

$$- f\alpha m \sum_{s=2}^{n}{}' \left[\frac{\rho + u_s}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}} \right] \sin v_s,$$

$$\Delta_{ki}^2 = (\rho+u_k)^2 + (\rho+u_i)^2 - 2(\rho+u_k)(\rho+u_i)\cos(v_i - v_k),$$

$$\Delta_{1s}^2 = \rho^2 + (\rho+u_s)^2 - 2\rho(\rho+u_s)\cos v_s, \qquad s, k = 2, \ldots, n.$$

Система (7) имеет тот же порядок $4n$ и состоит из двух подсистем: подсистемы 4-го порядка (7′), состоящей из первых двух уравнений, и подсистемы (7″) порядка $4n-4$ с неизвестными функциями u_k, v_k. Покажем, что при любой дифференцируемой функции $\rho(t)$ подсистема (7″) имеет частное решение

$$u_2(t) = \ldots = u_n(t) = u(t) \equiv 0,$$
$$v_k(t) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \qquad k = 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Для этого будем искать частное решение в виде

$$u_2(t) = \ldots = u_n(t) = u(t), \qquad v_k(t) = \frac{2\pi(k-1)}{n}$$

с начальными условиями

$$u(t) = \dot{u}(0) = \dot{v}_k(0) = \dot{v}(0) = 0, \qquad v_k(0) = \frac{2\pi(k-1)}{n}.$$

Вместо подсистемы (7″) получим следующую систему дифференциальных уравнений, порядок которой также равен $4n-4$:

$$\ddot{u} - u\dot{\lambda}^2 = -f\alpha(m_0 + m)\left[\frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\rho^{\alpha+1}} \right] +$$

$$+ f\alpha m \sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{(\rho+u)\cos\dfrac{2\pi(i-k)}{n} - (\rho+u)}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}} - \frac{\cos\dfrac{2\pi(i-k)}{n}}{(\rho+u)^{\alpha+1}} \right] -$$

$$- f\alpha m \sum_{s=2}^{n} \left[\frac{(\rho+u)\cos\dfrac{2\pi(s-1)}{n} - \rho}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{\cos\dfrac{2\pi(s-1)}{n}}{(\rho+u)^{\alpha+1}} \right], \tag{9}$$

$$u\ddot{\lambda} + 2\dot{u}\dot{\lambda} = f\alpha m \sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{\rho+u}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}} \right] \sin\frac{2\pi(i-k)}{n} -$$

$$- f\alpha m \sum_{s=2}^{n} \left[\frac{\rho+u}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}} \right] \sin\frac{2\pi(s-1)}{n},$$

$$\Delta_{ki} = 2(\rho+u)\left| \sin\frac{\pi(i-k)}{n} \right|, \qquad \Delta_{1s} = 2\rho\sin\frac{\pi(s-1)}{n},$$

$$i \neq k, \qquad k, s = 2, \ldots, n.$$

Левые части дифференциальных уравнений (9) не зависят от индекса k, поэтому необходимо доказать, что для каждого $k = 2, \ldots, n$ подсистема из двух уравнений системы (9) имеет решение

$$u(t) \equiv 0, \qquad v_k(t) = \frac{2\pi(k-1)}{n}.$$

Это утверждение равносильно выполнению для любого $k = 2, \ldots, n$ следующих тождеств:

$$\begin{gathered}
-2^{-(\alpha+1)} \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-\alpha} - \sum_{i=1}^{n}{}' \cos \frac{2\pi(i-k)}{n} + \\
+ 2^{-(\alpha+1)} \sum_{s=2}^{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-\alpha} - \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{2\pi(s-1)}{n} = 0, \\
2^{-(\alpha+2)} \sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)} - \sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} - \\
- 2^{-(\alpha+1)} \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} + \sum_{s=2}^{n} \sin \frac{2\pi(s-1)}{n} = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Тождества (10) выполняются, если выполняются следующие тождества:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \cos \frac{2\pi(i-k)}{n} = \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{2\pi(s-1)}{n},$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} = \sum_{s=2}^{n} \sin \frac{2\pi(s-1)}{n},$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-\alpha} = \sum_{s=2}^{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-\alpha},$$

$$2^{-1} \sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)} =$$

$$= \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)}, \qquad k = 2, \ldots, n.$$

Справедливость этих тождеств проверяется непосредственно. Рассмотрим, например, последнее из них. Имеем

$$\begin{gathered}
2^{-1} \sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)} - \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} = \\
= 2^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)} + 2^{-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)} - \\
- \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} = -\sum_{i=1}^{k-1} \cos \frac{\pi(i-k)}{n} \left|\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+1)} + \\
+ \underline{\sum_{i=k+1}^{n} \cos \frac{\pi(i-k)}{n} \left(\sin \frac{\pi(i-k)}{n}\right)^{-(\alpha+1)}} - \underline{\sum_{s=2}^{n-k+1} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)}} - \\
- \sum_{s=n-k+2}^{n} \cos \frac{\pi(s-1)}{n} \left(\sin \frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} =
\end{gathered}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \cos\left[\pi + \frac{\pi(i-k)}{n}\right] \left|\sin\left[\pi + \frac{\pi(i-k)}{n}\right]\right|^{-(\alpha+1)} -$$

$$- \sum_{s=n-k+2}^{n} \cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} =$$

$$= \sum_{j=n-k+2}^{n} \cos\frac{\pi(j-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(j-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} -$$

$$- \sum_{s=n-k+2}^{n} \cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)} = 0.$$

Последнее равенство получено заменой индекса суммирования i на j с помощью формулы $j = n + i - k + 1$, а в первой подчеркнутой сумме следует положить $j = i - k + 1$.

Таким образом, мы показали, что уравнения (9) имеют частное решение $u(t) = 0$, $v_k = \dfrac{2\pi(k-1)}{n}$. Для нахождения частного решения всей системы (7) необходимо проинтегрировать подсистему (7′) после подстановки в нее $u_s = 0$, $v_s = \dfrac{2\pi(s-1)}{n}$ с учетом начальных условий (2).

После выполнения достаточно простых преобразований подсистема (7′) принимает вид системы (3) и, очевидно, ее интегрирование выполняется в квадратурах. Действительно, второе уравнение системы (3) имеет первый интеграл

$$\rho^2\dot{\lambda} = d_0 = a_0^2 c_0. \tag{11}$$

Используя это соотношение, первое уравнение системы (3) можно записать в виде равенства

$$\ddot{\rho} = d_0^2\rho^{-3} - A_n\rho^{-(\alpha+1)}.$$

Далее будем иметь

$$\pm\sqrt{\alpha}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{2h\alpha\rho^2 + 2A_n\rho^{2-\alpha} - d_0^2\alpha}} = t + C_1, \tag{12}$$

где h и C_1 — произвольные постоянные, причем

$$2h = b_0^2 + a_0^2 c_0^2 - 2A_n\alpha^{-1}a_0^{-\alpha}. \tag{13}$$

Из интеграла (11) в принципе можно найти зависимость полярного угла λ как функции t:

$$\lambda(t) = d_0\int \frac{dt}{\rho^2(t)}. \tag{14}$$

Заметим, что зависимость $\lambda = \lambda(\rho)$ аналитически более проста и выражается интегралом

$$\lambda(\rho) = \pm d_0\sqrt{\alpha}\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{2h\alpha\rho^2 + 2A_n\rho^{2-\alpha} - d_0^2\alpha}}. \tag{15}$$

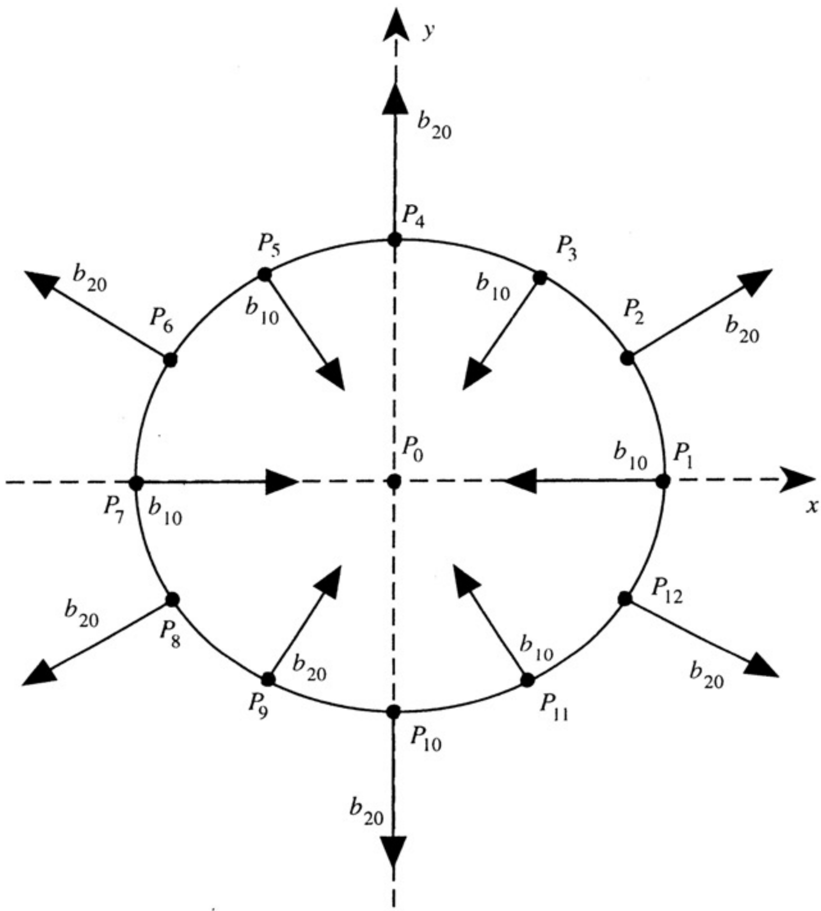
Соотношение (15) есть не что иное, как уравнение „орбиты". Таким образом, соотношения (12) и (14) дают полное решение проблемы. Из соотношения (11) видно, что $\dot{\lambda} \neq \text{const}$, т. е. многоугольник $P_1, P_2, \ldots, P_n$, оставаясь в любой момент правильным, но переменных размеров, вращается с переменной угловой скоростью вокруг геометрического центра (точки P_0), причем угловая скорость его вращения в любой момент t определяется интегралом (11). С увеличением размеров многоугольника его угловая скорость вращения уменьшается и наоборот, согласно интегралу (14).

Доказанная теорема устанавливает существование новых гомографических решений (в том числе и гомотетичных) в проблеме $(n+1)$-тел [3] относительно притягивающего центра P_0 с массой m_0.

2. Радиальные решения плоской ньютоновой проблемы $(n+1)$-тел. Если начальная угловая скорость $c_0 = 0$, т. е. в начальный момент начальные скорости тел $P_1, \ldots, P_n$ направлены коллинеарно соответствующему начальному радиусу-вектору, то величина $d_0 = 0$ и, следовательно,

$$\dot{\lambda}(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Это значит, что многоугольник будет себе подобно увеличиваться или уменьшаться в размерах в соответствии с интегралом (12), но будет отсутствовать всякое вращение. В этом случае, например, при $n = 4n_0$ возможно симметричное решение, в котором некоторые тела движутся сначала к центру, а другие — от центра. При $n_0 = 3$ оно изображено на рисунке.



Это решение не является гомотетичным в смысле Винтнера [2], а представляет собой „выпукло-вогнутое" решение. Для точек, имеющих начальную скорость b_{10}, следует в приближенном для этого случая соотношении (12) взять знак минус, а для точек с начальной скоростью b_{20} — знак плюс.

Эта конфигурация интересна тем, что она не будет представлять собой для всех t выпуклый правильный многоугольник, поэтому рассмотрим более подробно это решение. Будем считать, что $2n_0$ тел $P_1, P_3, \ldots, P_{4n_0-1}$ имеют начальную скорость b_{10}, а остальные $2n_0$ тел $P_2, P_4, \ldots, P_{4n_0}$ — начальную скорость b_{20}, направленную по своему радиусу-вектору от центра P_0. Не ограничивая общности, предположим, что тело P_1 движется по оси P_0x. Тогда приближенная динамическая картина конфигурации описывается соотношениями:

для тел P_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots, 2n_0$, $\lambda_{2k-1} = \dfrac{\pi(k-1)}{n_0}$

$$-\sqrt{\alpha}\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2h^{(1)}\alpha\rho^2 + 2A_n\rho^{2-\alpha}}} = t + C_1,$$
$$d_0 = 0, \quad 2h^{(1)} = b_{10}^2 - 2A_n\alpha^{-1}a_0^{-\alpha}, \tag{17}$$

для точек P_{2k}, $k = 1, 2, \ldots, 2n_0$, $\lambda_{2k} = \dfrac{\pi(2k-1)}{2n_0}$

$$\sqrt{\alpha}\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2h^{(2)}\alpha\rho^2 + 2A_n\rho^{2-\alpha}}} = t + C_1,$$
$$d_0 = 0, \quad 2h^{(2)} = b_{20}^2 - 2A_n\alpha^{-1}a_0^{-\alpha}. \tag{18}$$

В результате обращения интегралов (17) и (18) для ньютоновской проблемы (при $\alpha = 1$) получаем:

случай $h^{(1)} > 0$:

$$\sqrt{2h^{(1)}}\sqrt{F_1(\rho)} - A_n\ln\left|\frac{\sqrt{\rho-\rho_2}+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho-\rho_2}-\sqrt{\rho}}\right| = -\left(2h^{(1)}\right)^{3/2}(t + C_1),$$
$$F_1(\rho) = 2h^{(1)}\rho^2 + 2A_n\rho, \qquad \rho_2 = -A_n\left(h^{(1)}\right)^{-1}; \tag{19}$$

случай $h^{(1)} < 0$:

$$\rho(t) = -\frac{A_n}{h^{(1)}}\cos^2\left[\frac{(-2h^{(1)})^{3/2}}{2A_n}(t + C_1) - \frac{\sqrt{-2h^{(1)}}}{2A_n}\sqrt{F_1(\rho(t))}\right]; \tag{20}$$

случай $h^{(1)} = 0$:

$$\rho^{3/2} = a_0^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2A_n}t; \tag{21}$$

случай $h^{(2)} > 0$:

$$\sqrt{2h^{(2)}}\sqrt{F_2(\rho)} - A_n\ln\left|\frac{\sqrt{\rho-\rho_2}+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho-\rho_2}-\sqrt{\rho}}\right| = \left(2h^{(2)}\right)^{3/2}(t + C_1),$$
$$F_2(\rho) = 2h^{(2)}\rho^2 + 2A_n\rho, \qquad \rho_2 = -A_n\left(h^{(2)}\right)^{-1}; \tag{22}$$

случай $h^{(2)} < 0$:

$$\rho(t) = -\frac{A_n}{h^{(2)}}\cos^2\left[\frac{(-2h^{(2)})^{3/2}}{2A_n}(t+C_1) - \frac{\sqrt{-2h^{(2)}}}{2A_n}\sqrt{F_2(\rho(t))}\right]; \tag{23}$$

случай $h^{(2)} = 0$:

$$\rho^{3/2} = a_0^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2A_n t}. \tag{24}$$

Интегралы (17) и (18) представляют движение указанных двух групп тел с точностью до величин выше второго порядка малости относительно малого параметра $\dfrac{m}{m_0}$.

3. Случаи интегрируемости в элементарных и эллиптических функциях. Предположим сначала, что параметр закона гравитации $\alpha > 0$. Тогда можно заключить, что обращение квадратуры (12) возможно выразить в элементарных и эллиптических функциях при $\alpha = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1; 2; 4; 6$.

При $\alpha = 1$ получаем закон всемирного тяготения и квадратура (12) выражается в элементарных функциях, а уравнение орбиты (15) представляет собой уравнение конического сечения в полярных координатах.

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$. Если ввести положительную величину $\beta = -\alpha$, то вместо квадратуры (12) будем иметь квадратуру

$$\pm\sqrt{\beta}\int\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{2h\beta\rho^2 - 2A_n\rho^{2+\beta} - d_0^2\beta}} = t + C_1. \tag{25}$$

Интегрирование в элементарных и эллиптических функциях соотношения (25) возможно при $\beta = 1; 2; 4; 6$.

Заметим, что случай $\beta = 1$ соответствует „закону третьей силы".

4. Симметричные решения пространственной проблемы многих тел. Известно, что в трехмерном пространстве существует лишь пять правильных многогранников (так называемые тела Платона [4]): тетраэдр (число вершин — 4), куб (число вершин — 8), октаэдр (число вершин — 6), икосаэдр (число вершин — 20), додекаэдр (число вершин — 12)).

Вследствие этого можно утверждать, что радикальные симметричные решения пространственной проблемы многих тел могут существовать, по меньшей мере, для $n = 4, 6, 8, 12, 20$, т. е. для проблем пяти, семи, девяти, тринадцати и двадцати одного тел, взаимно притягивающих друг друга в соответствии с законом притяжения $P_{ki} \sim \Delta_{ki}^{-(\alpha+1)}$.

Такие радиальные решения существуют при условии, что начальные скорости всех тел, находящихся в вершинах перечисленных многогранников, направлены вдоль соответствующего радиуса-вектора от геометрического центра фигуры (начала координат — P_0), или к этому центру.

Дифференциальное уравнение движения каждого из n-тел вдоль радиуса-вектора имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{f[m_0 + A(m, n, \alpha)]}{r^{\alpha+1}} = 0, \tag{26}$$

где параметрическая функция $A(m, n, \alpha)$ для каждого многогранника и для каждого закона гравитации различна. Например, для куба и ньютонового закона гравитации

$$A(m, 8, 1) = \frac{\left(3\sqrt{3}+3\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)m}{4\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Уравнение (26) необходимо решать с учетом начальных условий

$$r(0) = a_0, \qquad \dot{r}(0) = b_0. \tag{28}$$

Если $b_0 > 0$, то соответствующий многогранник будет подобно себе расширяться (по крайней мере, на начальном отрезке времени, а при достаточно больших значениях b_0 будет постоянно расширяться); если же $b_0 < 0$, то многогранник будет подобно себе уменьшаться в размерах до полного вырождения в точку (при некотором $t^* > 0$ наступит одновременное соударение всех точек в начале координат P_0). Ситуация будет иной, если считать, что в вершинах многогранника находятся однородные шары массы m с одним и тем же или с различными радиусами.

1. *Гребеников Е. А.* Теорема о существовании точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Rom. Astronom. J. – 1997. –**7,** № 2.
2. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 854 с.
3. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. – 523 с.
4. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.

Получено 08.01.98