УДК 517.9

С. І. Дудзяний, М. О. Перестюк (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ПРО СТІЙКІСТЬ ТРИВІАЛЬНОГО ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

The asymptotic stability of trivial invariant torus of a certain class of pulse systems is considered. Sufficient criteria of asymptotic stability are obtained by the method of freezing in one case and, in another case, by the Lyapunov direct method for studying the stability of solutions of pulse systems.

Розглядається питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора одного класу імпульсних систем. Достатні ознаки асимптотичної стійкості отримано, в одному випадку, за допомогою методу заморожування, в іншому — прямим методом Ляпунова дослідження стійкості розв'язків імпульсних систем.

Розглянемо розривну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \qquad\qquad (1)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x,$$

де $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\Im_m)$; $P(\varphi), B(\varphi) \in C(\Im_m)$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — малий параметр; $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$, $\tau_i > t_0$, τ_0 — початковий момент.

Вивчимо питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора $x = 0, \varphi \in \Im_m$ системи (1). Нехай $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, — розв'язок першого рівняння системи (1). Тоді розв'язки системи (1) будуть еквівалентні розв'язкам системи лінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \qquad t \neq \tau_j, \quad \varphi \in \Im_m, \qquad\qquad (2)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_j} = B(\varphi_{\tau_j}(\varphi))x.$$

Як відомо [1], будь-який розв'язок системи (2) $x_t(\varphi, x_0)$, $x_{t_0}(\varphi, x_0) = x_0$, $\varphi \in \Im_m$, визначається формулою

$$x_t(\varphi, x_0) = X_{t_0}^t(\varphi)x_0, \qquad (3)$$

в якій $X_{t_0}^t(\varphi)$ — матрицант системи (2), який може бути записаний в явному вигляді

$$X_{t_0}^t(\varphi) = \Omega_{\tau_i}^t(\varphi) \prod_{t_0 < \tau_j < \tau_i} (E + B(\varphi_{\tau_j}(\varphi)))\Omega_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}(\varphi), \qquad (4)$$

де $\tau_0 = t_0$, $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$, $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант лінійної системи диференціальних рівнянь, яка відповідає системі (2), а саме:

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \qquad \varphi \in \Im_m. \qquad (5)$$

З формули (3) видно, що тривіальний інваріантний тор системи (1) буде асимптотично стійким лише при виконанні умови

$$\lim_{t \to +\infty} \|X_{t_0}^t(\varphi)\| = 0, \qquad \varphi \in \Im_m. \qquad (6)$$

Визначимо обмеження, які треба накласти на матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ системи (5) та послідовність моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$, щоб виконувалась умова (6) при зображенні матрицанта $X_{t_0}^t(\varphi)$ у вигляді (4).

Нехай $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m$, де Ω_φ — ω-гранична множина півтраєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $t \in [0, +\infty)$, а

$$\gamma = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi \in \Omega}} \operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi))),$$

тобто

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi))) \leq \gamma, \qquad \varphi \in \Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Зафіксуємо деяке $\varphi^* \in \Im_m$ та розглянемо компактну півтраєкторію $\varphi_t(\varphi^*)$, $t \in [0, +\infty)$. Множина її ω-граничних точок Ω_{φ^*} — не порожня, замкнута, інваріантна, компактна та зв'язна множина [2], для якої $\lim_{t \to +\infty} \rho(\varphi_t(\varphi^*), \Omega_{\varphi^*}) = 0$. Якщо $\varphi^* \in \Omega_{\varphi^*}$, то $\operatorname{Re}(\lambda_j(\varphi_t(\varphi^*))) \leq \gamma$, $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Нехай $\varphi^0 \in \Omega_{\varphi^*}$. Тоді існує послідовність $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що $\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty$ і $\lim_{n \to +\infty} \varphi(t_n, \varphi^*) = \varphi^0$. Розглянемо послідовність функцій $\varphi(t + t_n, \varphi^*)$, кожна з яких визначена при $t \in [-t_n, +\infty)$. З неперервності розв'язку $\varphi(t, \varphi)$ по φ випливає

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t + t_n, \varphi^*) = \lim_{n \to \infty} \varphi(t, \varphi(t_n, \varphi^*)) = \varphi_t(\varphi^0) \subset \Omega_{\varphi^*}.$$

Звідси

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(\varphi^0)) \leq \gamma \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_j(\varphi(t, \varphi^0))) \leq \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\lambda_j\left[\lim_{n \to \infty} \varphi(t, \varphi(t_n, \varphi^*))\right]\right) \leq \gamma \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\lambda_j\left[\lim_{n \to \infty} \varphi(t + t_n, \varphi^*)\right]\right) \leq \gamma.$$

Внаслідок довільності φ^* одержуємо умову

$$\varlimsup_{t \to \infty} \operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi_t(\varphi)))) \leq \gamma \qquad \forall\, \varphi \in \Im_m. \tag{7}$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \lambda_j((E + B(\varphi_t(\varphi)))^T (E + B(\varphi_t(\varphi)))) \leq \alpha^2 \qquad \forall\, \varphi \in \Im_m, \tag{7a}$$

де $\alpha^2 = \max\limits_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi \in \Omega}} \lambda_j((E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi)))$.

Умова (7) фактично означає, що для будь-якого $\varepsilon^* > 0$ та довільного початкового значення $\varphi \in \Im_m$ існує такий момент часу $T(\varphi) > 0$, що для всіх $t \geq T(\varphi)$ справедлива умова

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi_t(\varphi)))) \leq \gamma + \frac{\varepsilon^*}{2}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Аналогічно при $t \geq T(\varphi)$ умова (7а) еквівалентна умові

$$\lambda_j((E + B(\varphi_t(\varphi)))^T (E + B(\varphi_t(\varphi)))) \le \alpha^2 + \frac{\varepsilon^*}{2}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{8a}$$

Покажемо, що існує такий скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від початкового значення $\varphi \in \Im_m$, що умова (8) буде справедлива при будь-якому $\varphi \in \Im_m$.

Припустимо супротивне, тобто $T = \infty$. Розглянемо довільну послідовність точок $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$ на торі. Кожну з них можна інтерпретувати як початкову для півтраєкторії $\varphi_t(\varphi_i)$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots$. З умови (8) випливає, що для кожної з цих точок існує скінченний момент часу $T(\varphi_i)$. Впорядкуємо дану послідовність таким чином, щоб $T(\varphi_i) \le T(\varphi_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots$. Оскільки тор — компактна множина, то з цієї послідовності можна вибрати збіжну підпослідовність $\{\varphi_{t_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} \varphi^* \in \Omega$. Це означає, що буде існувати скінченний момент часу T такий, що $\lim\limits_{k \to \infty} T(\varphi_{i_k}) = T$, але ми припустили, що $T = \infty$. Дана суперечність доводить, що дійсно існуватиме такий скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від початкового значення $\varphi \in \Im_m$, що умова (8) буде справедлива при будь-якому $\varphi \in \Im_m$. Аналогічно можна показати, що існуватиме такий момент часу $T > 0$, не залежний від початкового значення $\varphi \in \Im_m$, що умова (8а) буде справедлива при будь-якому $\varphi \in \Im_m$.

В подальшому через $T > 0$ будемо позначати такий момент часу, не залежний від початкового значення $\varphi \in \Im_m$, що умови (8) і (8а) одночасно будуть справедливі при будь-якому $\varphi \in \Im_m$.

Для оцінки матриціанта $\Omega_\tau^t(\varphi)$ системи (5) застосуємо ідеї методу заморожування. Зафіксуємо деякий момент часу t_1 та перепишемо систему (5) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_{t_1}(\varphi))x + [P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\varphi))]x, \quad \varphi \in \Im_m.$$

Тоді матрицант системи (5) запишеться як

$$\Omega_{t_0}^t(\varphi) = e^{P(\varphi_{t_1}(\varphi))(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{P(\varphi_{t_1}(\varphi))(t-s)}[P(\varphi_s(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\varphi))]\Omega_{t_0}^s(\varphi)ds.$$

Поклавши в останній рівності $t = t_1$ та позначивши t_1 знову через t, отримаємо інтегральне зображення матрицанта системи (5):

$$\Omega_{t_0}^t(\varphi) = e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-s)}[P(\varphi_s(\varphi)) - P(\varphi_t(\varphi))]\Omega_{t_0}^s(\varphi)ds. \tag{9}$$

Сформулюємо та доведемо аналог теореми 10.2.2 з [3] для розглядуваного випадку.

Теорема 1. *Нехай для будь-якого $\varphi \in \Im_m$ виконуються умови*:

1) $\| e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-t_0)} \| \le \eta(t-t_0)$, *де* $\eta(t-t_0) = O(e^{\lambda(t-t_0)})$;

2) $\| P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_s(\varphi)) \| \le \alpha(t-s)$, *де* λ — *таке, що*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\eta(\tau)\alpha(\tau)d\tau < 1.$$

Тоді для матрицанта системи (5) *справедлива оцінка*

$$\|\Omega_{t_0}^{t}(\varphi)\| \le D_1 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad \text{де} \quad D_1 = \text{const} > 0.$$

Доведення. З умов теореми та інтегрального зображення матриканта випливає оцінка

$$\|\Omega_{t_0}^{t}(\varphi)\| \le \eta(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \eta(t-s)\alpha(t-s)\,\|\Omega_{t_0}^{s}(\varphi)\|\,ds. \tag{10}$$

Позначимо

$$(t) = \eta(t-t_0) \ge 0, \qquad \psi(t-s) = \eta(t-s)\alpha(t-s) \ge 0, \qquad y(t) = \|\Omega_{t_0}^{t}(\varphi)\| \ge 0.$$

Тоді нерівність (10) матиме вигляд

$$y(t) \le \xi(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)y(s)ds.$$

Покажемо, що справедливий ланцюжок нерівностей

$$0 \le y(t) \le u(t) \le D_1 e^{\lambda(t-t_0)}, \tag{11}$$

де $u(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t) = \xi(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)u(s)ds. \tag{12}$$

Розглянемо простір B_1^{λ} — множину заданих на $[t_0, t_1)$ неперервних скалярних функцій таких, що $u(t) = O(e^{\lambda(t-t_0)})$, тобто $|u(t)| \le D\, e^{\lambda(t-t_0)}$. Введемо в B_1^{λ} норму $\|u(t)\| = \sup\limits_{[t_0, t_1)} |u(t)|\, e^{-\lambda(t-t_0)}$. Очевидно, що

$$|u(t)| \le \|u(t)\|_{\lambda}\, e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{13}$$

Тоді B_1^{λ} — банахів простір, повнота якого випливає з того, що він ізометричний простору обмежених неперервних скалярних функцій $g(t) = u(t)e^{-\lambda(t-t_0)}$ з нормою $\|g\| = \sup\limits_{t} |g(t)|$. Перша умова фактично означає, що $\xi(t) \in B_1^{\lambda}$.

Введемо оператор $J\,u(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)u(s)ds$, що має властивості:

1) $J\colon B_1^{\lambda} \to B_1^{\lambda}$, тобто $|J\,u(t)| \le D\,e^{\lambda(t-t_0)}$; оскільки оператор J — лінійний, то ця властивість буде випливати з наведеної нижче, коли $J(0) = 0$;

2) оператор J — стискаючий, тобто $|J\,u(t) - J\,v(t)| \le \theta\,|u - v|$, де $0 < \theta < 1$; враховуючи (3), останню нерівність можна записати у вигляді

$$|J\,u(t) - J\,v(t)| \le \theta\,\|u - v\|_{\lambda}\, e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Доведемо дану нерівність, використовуючи при цьому умови теореми, нерівність (13) та заміну $t - s = z$:

$$|J\,u(t) - J\,v(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)[u(s) - v(s)]\,ds \right| \le$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)|u(s) - v(s)|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} \psi(t-s)\, \|u-v\|_\lambda\, e^{\lambda(s-t_0)} ds =$$

$$= \|u-v\|_\lambda \int_{t_0}^{t} \psi(t-s) e^{\lambda(s-t_0)} ds = \|u-v\|_\lambda\, e^{\lambda(t-t_0)} \int_{0}^{t-t_0} \psi(z) e^{-\lambda z} dz \leq$$

$$\leq \theta \| u - v \|_\lambda\, e^{\lambda(t-t_0)},$$

де $\theta < 1$ — з умов теореми. Оскільки оператор $J: B_1^\lambda \to B_1^\lambda$ — стискаючий, при будь-якому $\xi(t) \in B_1^\lambda$ рівняння (12) має в B_1^λ єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень, починаючи з будь-якого елемента $u_0 \in B_1^\lambda$. Більше того, оскільки $\xi(t)$, $\psi(z)$ — неперервні при $t \geq t_0$, $z \geq 0$, то цей розв'язок можна продовжити на нескінченний проміжок $[t_0, \infty)$ і він на ньому буде єдиним.

Таким чином доведено, що рівняння (12) на $[t_0, \infty)$ має єдиний розв'язок $u(t)$, причому $u(t) \leq D_1 e^{\lambda(t-t_0)}$.

Оскільки простір B_1^λ частково впорядкований (у розумінні звичайної нерівності), то оператор $J: B_1^\lambda \to B_1^\lambda$ зберігає цей порядок, а саме:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow Jx_1 \leq Jx_2.$$

Тому за допомогою методу послідовних наближень можна показати, що для будь-яких двох елементів $u, y \in B_1^\lambda$ таких, що

$$u = \xi + Ju,$$

$$y \leq \xi + Jy,$$

справджується нерівність $y(t) \leq u(t)$.

Дійсно, починаючи процес знаходження розв'язку $u(t)$ з точки $u_0 = y$, отримуємо $u_1 = \xi + Jy \geq y$ і в загальному $u_{k-1} \geq y$, то $u_k = \xi + Ju_{k-1} \geq \xi + Jy \geq y$, а тому $u(t) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(t) \geq y(t)$.

Таким чином, доведено справедливість ланцюжка нерівностей (11). Переходячи до початкових позначень, отримуємо твердження теореми $\|\Omega_{t_0}^t(\varphi)\| \leq D_1 e^{\lambda(t-t_0)}$.

Теорему доведено.

Оскільки для власних чисел матриці $P(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, справджується умова (8), то перша умова теореми 1 у розглядуваному випадку задовольняється наступним чином (див., наприклад, [3, 4]):

$$\| e^{P(\varphi_t(\varphi))(t-T)} \| \leq K_1 e^{(\gamma+\varepsilon_1)(t-T)}, \quad t \geq T,$$

де $K_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, T — момент часу, починаючи з якого умова (8) справедлива для будь-якого $\varphi \in \Im_m$.

Друга умова теореми 1 у даному випадку матиме вигляд

$$\| P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_s(\varphi)) \| \leq \varepsilon K_2 |t-s|,$$

де $K_2 > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — малий параметр, що входить у систему (1). В даній роботі виходимо з припущення, що ε_0 вибрано таким чином, що задовольняється третя умова теореми 1, і згідно з цією теоремою для матриціанта системи (5) справедлива оцінка

$$\|\Omega_T^t(\varphi)\| \le D_1 e^{(\gamma+\varepsilon_1)(t-T)}, \tag{14}$$

де $D_1 = \text{const} > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ — як завгодно мала стала.

Враховуючи все викладене вище, одержуємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай в системі* (1) *моменти імпульсних збурень* $\{\tau_i\}$ *такі, що рівномірно по* $t \ge t_0$ *існує скінченна границя*:

$$\lim_{\tilde{T}\to\infty} \frac{i(t, t+\tilde{T})}{\tilde{T}} = p,$$

де $i(t, t+\tilde{T})$ *— кількість точок послідовності* $\{\tau_i\}$, *що належать проміжку* $[t, t+\tilde{T}]$. *Позначимо*

$$\gamma = \max_{\substack{j=1,\dots,n\\ \varphi\in\Omega}} \operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi))),$$

$$\alpha^2 = \max_{\substack{j=1,\dots,n\\ \varphi\in\Omega}} \lambda_j((E+B(\varphi))^T(E+B(\varphi))).$$

Тоді якщо виконується нерівність

$$\gamma + p\ln\alpha < 0,$$

то можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ *системи* (1) *— асимптотично стійкий.*

Доведення. Як було відмічено, розв'язки системи (1) еквівалентні розв'язкам системи (2). Для власних чисел матриць $P(\varphi)$, $B(\varphi)$, $\varphi\in\Im_m$, справджуються умови (7) і (7а), які еквівалентні умовам (8) і (8а). Нехай $T > 0$ — момент часу, починаючи з якого умови (8) і (8а) справедливі для будь-якого $\varphi \in \Im_m$. Розв'язок системи (2) $x_t(\varphi, x_0) = X_{t_0}^t(\varphi)x_0$ будемо розглядати при $t \ge T$. Тоді запишемо $x_t(\varphi, x_0) = X_T^t(\varphi)X_{t_0}^T x_0$, де матриціант $X_T^t(\varphi)$ системи (2) на проміжку $t \ge T$ має вигляд

$$X_T^t(\varphi) = \Omega_{\tau_i}^t(\varphi) \prod_{T<\tau_j<\tau_i} (E + B(\varphi_{\tau_j}(\varphi)))\Omega_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}(\varphi),$$

а $\Omega_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}(\varphi)$ — матриціант системи (5) на проміжку $[\tau_{j-1}, \tau_j)$.

Згідно з умовами теореми, застосовуючи метод заморожування і теорему 1, приходимо до висновку, що при $t \ge T$ справедлива оцінка

$$\|X_T^t(\varphi)\| \le D_1 e^{(\gamma+\varepsilon_1)(t-T)} \alpha^{i(T,t)},$$

де $D_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, γ — не залежні від φ і t.

Позначимо $K_1 = \max\limits_{\varphi\in\Im_m} \|X_{t_0}^T(\varphi)\|$, тоді можна записати

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \le K_1 D_1 e^{(\gamma+\varepsilon_1)(t-T)} \alpha^{i(T,t)} \|x_0\|.$$

З існування скінченної границі для $\{\tau_i\}$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $K_2 = K_2(\varepsilon) > 0$, при якому

$$\alpha^{i(T,t)} \le K_2 e^{(\varepsilon_2 + p\ln\alpha)(t-T)}.$$

Позначивши $K = K_1 K_2 D_1$, остаточно одержуємо

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le K e^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \gamma + p\ln\alpha)(t-T)} \| x_0 \|.$$

Звідси при виконанні умови теореми випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty} \| x_t(\varphi, x_0) \| = 0, \qquad \varphi \in \Im_m,$$

бо ε_1, ε_2 можемо вибрати як завгодно малими. Це й означає, що тривіальний інваріантний тор $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ системи (1)— асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

Поряд з системою (1) розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x + I(\varphi, x), \tag{15}$$

де $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\Im_m)$; $P(\varphi), B(\varphi) \in C(\Im_m)$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — малий параметр; $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$, $\tau_i > t_0$, τ_0 — початковий момент; $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x) \in C(\Im_m)$ та задовольняють нерівності

$$\| f(\varphi, x) \| \le a \| x \|, \qquad \| I(\varphi, x) \| \le a \| x \|, \tag{16}$$

при всіх $\varphi \in \Im_m$, $\| x \| \le h$, $h > 0$, $a > 0$.

Теорема 3. *Нехай в системі* (15) *моменти імпульсних збурень* $\{\tau_i\}$ *такі, що рівномірно по* $t \ge t_0$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{\tilde T\to\infty} \frac{i(t, t+\tilde T)}{\tilde T} = p,$$

де $i(t, t+\tilde T)$ *— кількість точок послідовності* $\{\tau_i\}$, *що належать проміжку* $[t, t+\tilde T]$. *Позначимо*

$$\gamma = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi\in\Omega}} \operatorname{Re}(\lambda_j(P(\varphi))), \qquad \alpha^2 = \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi\in\Omega}} \lambda_j((E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi))).$$

Тоді якщо справджується нерівність

$$\gamma + p\ln\alpha < 0,$$

а функції $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ *задовольняють умови* (16) *з достатньо малим значенням* a, *то можна вказати таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ *системи* (15) *— асимптотично стійкий.*

Доведення. Розв'язки системи (15) еквівалентні розв'язкам системи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi), x), \qquad t \ne \tau_j, \quad \varphi \in \Im_m,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = B(\varphi_{\tau_j}(\varphi))x + I(\varphi_{\tau_j}(\varphi), x). \tag{17}$$

Поряд з системою (17) розглянемо систему (2). Власні числа матриць $P(\varphi)$, $B(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, які входять в системи (2) і (17), задовольняють умови (7) і (7а), які, в свою чергу, еквівалентні умовам (8) і (8а). Нехай $T > 0$ — момент часу, починаючи з якого умови (8) і (8а) справедливі для будь-якого $\varphi \in \mathfrak{I}_m$. Тоді, як випливає з доведення попередньої теореми, при виконанні умов теореми 3 для матриканта $X_{t_0}^t(\varphi)$ системи (2) при $t \geq T$ справедлива оцінка

$$\| X_{t_0}^t(\varphi) \| \leq K e^{-\mu(t-T)}, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m,$$

де $0 < \mu < |\gamma + p \ln \alpha|$, $t \geq T$, $K > 0$ — не залежне від φ і t.

Позначимо через $x_t(\varphi, x_0)$, $x_{t_0}(\varepsilon, x_0) = x_0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, розв'язок системи (17). За допомогою матриканта $X_{t_0}^t(\varphi)$ системи (2) будь-який розв'язок системи (17) можна зобразити у вигляді

$$x_t(\varphi, x_0) = X_{t_0}^t(\varphi) x_0 + \int_{t_0}^{t} X_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0)) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_j < t} X_{\tau_j}^t(\varphi) I(\varphi_{\tau_j}(\varphi), x_{\tau_j}(\varphi, x_0)). \tag{18}$$

Позначимо

$$K_1 = \max_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \| X_{t_0}^T(\varphi) \|,$$

$$K_2 = \max_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \left\| \int_{t_0}^{T} X_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(\varphi, x_0)) d\tau \right\|,$$

$$K_3 = \max_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \left\| \sum_{t_0 < \tau_j < t} X_{\tau_j}^t(\varphi) I(\varphi_{\tau_j}(\varphi), x_{\tau_j}(\varphi, x_0)) \right\|,$$

$$C = K(K_1 \| x_0 \| + K_2 + K_3).$$

Оцінюючи рівність (18) за нормою і враховуючи позначення, одержуємо

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \leq C e^{-\mu(t-T)} + \int_T^t K a e^{-\mu(t-\tau)} \| x_\tau(\varphi, x_0) \| d\tau +$$

$$+ \sum_{T < \tau_j < t} K a e^{-\mu(t-\tau_j)} \| x_{\tau_j}(\varphi, x_0) \|.$$

Перепишемо останню нерівність таким чином:

$$e^{\mu(t-T)} \| x_t(\varphi, x_0) \| \leq C + \int_T^t K a e^{\mu(\tau-T)} \| x_\tau(\varphi, x_0) \| d\tau +$$

$$+ \sum_{T < \tau_j < t} K a e^{\mu(\tau_j - T)} \| x_{\tau_j}(\varphi, x_0) \|.$$

Використовуючи аналог леми Гронуолла – Беллмана для імпульсних систем [1], отримуємо нерівність

$$e^{\mu(t-T)} \| x_t(\varphi, x_0) \| \leq C(1 + Ka)^{i(T,t)} e^{Ka(t-T)}.$$

Оскільки для моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ існує скінченна границя, то остаточно маємо

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \leq C_1 e^{-(\mu - p\ln(1+Ka) - Ka + \varepsilon_1))(t-T)} \|x_0\|$$

при будь-якому $\varepsilon_1 > 0$, де $C_1 = C/h$, $C_1 = C_1(\varepsilon_1)$, $t \geq T$.

Тому якщо константа $a > 0$, що входить в нерівності (16), настільки мала, що

$$\mu - Ka - p\ln(1 + Ka) > 0,$$

то

$$\lim_{t \to +\infty} \|x_t(\varphi, x_0)\| = 0, \quad \varphi \in \Im_m,$$

а це й означає асимптотичну стійкість тривіального інваріантного тора $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ системи (15).

Теорему доведено.

Розглянемо тепер нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = f(\varphi, x),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = I(\varphi, x), \tag{19}$$

де $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\Im_m)$; $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ — задані в області:

$$Z = \{\varphi \in \Im_m, \ x \in \bar{J}_h\}, \quad \bar{J}_h = \{x \in R^n, \ \|x\| \leq h, \ h > 0\},$$

та 2π-періодичні по φ_υ, $\upsilon = 1, \ldots, m$, а також $f(\varphi, 0) \equiv 0$, $I(\varphi, 0) \equiv 0$ $\forall \varphi \in \Im_m$.

Відносно послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ вважаємо, що $\tau_i > \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\lim_{i \to \infty} \tau_i = \infty$.

Будемо досліджувати питання стійкості тривіального інваріантного тора $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ системи (19).

Нехай в області Z існує визначена і неперервно диференційовна скалярна функція $V(\varphi, x)$ така, що $V(\varphi, 0) = 0$ $\forall \varphi \in \Im_m$. Тоді

функцію $V(\varphi, x)$ називають додатно сталою в області Z, якщо $V(\varphi, x) \geq 0$ $\forall (\varphi, x) \in Z$;

функцію $V(\varphi, x)$ називають додатно означеною в області Z, якщо в I_h існує неперервна скалярна функція $W(x)$, $W(0) = 0$, така, що

$$V(\varphi, x) \geq W(x) > 0 \quad \forall \varphi \in \Im_m, \quad x \neq 0.$$

Як і раніше, $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, — розв'язок першого рівняння системи (19), ω-граничну множину півтраєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $t \in [0, +\infty)$, позначимо через Ω_φ, тобто $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi \subset \Im_m$. Будемо розглядати область

$$Z_\Omega = \{\varphi \in \Omega, \ x \in \bar{J}_h\}.$$

Зрозуміло, що $Z_\Omega \subset Z$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо в області Z існує додатно означена функція $V(\varphi, x)$, яка всюди в області Z_Ω задовольняє нерівності*

$$\begin{gathered}\langle \operatorname{grad}_\varphi V(\varphi, x), a(\varphi)\rangle + \langle \operatorname{grad}_x V(\varphi, x), f(\varphi, x)\rangle \le 0, \\ V(\varphi, x + I(\varphi, x)) \le V(\varphi, x),\end{gathered} \tag{20}$$

то тривіальний інваріантний тор $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$ системи (19) — *стійкий.*

Якщо ж замість другої з нерівностей (20) *виконується нерівність*

$$V(\varphi, x + I(\varphi, x)) - V(\varphi, x) \le -\psi(V(\varphi, x)) \tag{21}$$

для всіх $i = 1, 2, \ldots$; $\psi(s)$ — неперервна при $s \ge 0$ функція, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, то тривіальний інваріантний тор системи (19) — *асимптотично стійкий.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і нехай $l = \inf\limits_{\substack{\varepsilon \le \|x\| \le h \\ \varphi \in \mathfrak{T}_m}} V(\varphi, x)$. Візьмемо довільний розв'язок $\varphi_t(\varphi)$, $x_t(\varphi, x_0)$ системи (19), для якого $x_0 \in J_\delta$, де J_δ — куля радіуса δ з центром в точці $x = 0$. Позначимо $v(t) = V(\varphi_t, x_t)$.

Зафіксуємо довільне $\varphi^* \in \mathfrak{T}_m$ та розглянемо компактну півтраєкторію $\varphi_t(\varphi^*)$, $t \in [0, +\infty)$. Множина її ω-граничних точок Ω_{φ^*} — не порожня, замкнена, інваріантна, компактна та зв'язна множина, для якої

$$\lim_{t \to \infty} \rho(\varphi_t(\varphi^*), \Omega_{\varphi^*}) = 0.$$

Якщо $\varphi^* \in \Omega_{\varphi^*}$, то зрозуміло, що функція $V(\varphi_t, x_t)$ задовольнятиме умови (20), (21) при всіх $t \ge t_0$.

Нехай $\varphi^0 \in \Omega_{\varphi^*}$, тоді існує послідовність $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ така, що $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = +\infty$ і $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(t_n, \varphi^*) = \varphi^0$. Розглянемо послідовність функцій $\varphi(t + t_n, \varphi^*)$, кожна з яких визначена при $t \in [-t_n, +\infty)$. З неперервності розв'язку $\varphi(t, \varphi)$ по φ випливає

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t + t_n, \varphi^*) = \lim_{n \to \infty} \varphi(t, \varphi(t_n, \varphi^*)) = \varphi_t(\varphi^0) \subseteq \Omega_{\varphi^*}.$$

З цієї рівності випливає справедливість твердження

$$\lim_{n \to \infty} V(\varphi(t + t_n, \varphi^*), x_t(\varphi^*, x_0)) = V(\varphi_t(\varphi^0), x_t(\varphi^*, x_0)).$$

Отже, при $t \to +\infty$ функція $V(\varphi_t, x_t)$ задовольняє умови (20), (21). З попередніх викладок випливає, що буде існувати скінченний момент часу $T \ge t_0$ такий, що при всіх $t \ge T$ умови (20), (21) справджуватимуться для будь-якого $\varphi \in \mathfrak{T}_m$.

Припустимо, що в деякий момент часу t^*

$$\| x_{t^*}(\varphi, x_0) \| = \varepsilon.$$

Вважаємо, що число $\delta > 0$ було вибрано настільки малим, що в жоден момент часу t^* із скінченного інтервалу часу $[t_0, T]$ дане припущення не виконується і, крім цього,

$$\sup_{t \in [t_0, T]} V(\varphi_t, x_t) = m < l.$$

Це можливо внаслідок неперервної залежності розв'язків імпульсних систем від початкових даних. Отже, якщо при $t^* > T$ дане припущення має місце, то

$$v(t^*) = V(\varphi_{t^*}(\varphi), x_{t^*}(\varphi, x_0)) \geq l.$$

Нерівності (20) гарантують незростання функції $V(\varphi_t, x_t)$ при $t \geq T$ вздовж будь-якого розв'язку системи (19), який лежить в області Z, так що

$$v(t^*) \leq v(t) = V(\varphi_T(\varphi), x_T(\varphi, x_0)) \leq m < l.$$

Отримана суперечність доводить, що наше припущення невірне і в жоден момент часу t^* розв'язок не буде рівний ε. Отже, тривіальний інваріантний тор — стійкий.

Нехай замість другої з нерівностей (20) виконується (21). Доведемо асимптотичну стійкість тривіального інваріантного тора системи (19), для чого достатньо показати, що $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$. Внаслідок першої з нерівностей (20) і нерівності (21) функція $v(t)$, починаючи з $t \geq T$, не зростає, а оскільки вона додатно означена, то обмежена знизу, тобто існує $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \alpha$. Припустимо, що $\alpha > 0$. Нехай $c = \min\limits_{\alpha \leq s \leq v(T)} \psi(s)$. Відомо, що $x_t(\varphi, x_0)$ піддається імпульсним збуренням в точках $x_{\tau_j}(\varphi, x_0)$, тому з (21) маємо

$$v(\tau_j + 0) - v(\tau_j) \leq -\psi(v(\tau_j)), \quad j \geq k, \quad \tau_{k-1} < T < \tau_k. \tag{22}$$

Оскільки $\alpha \leq v(\tau_j) \leq v(T)$, то $-\psi(v(\tau_j)) \leq -c$. Внаслідок першої з нерівностей (20) функція $v(t)$ не зростає на кожному проміжку неперервності при $t \geq T$, тому

$$v(\tau_j + 0) \geq v(\tau_{j+1}).$$

Звідси при будь-якому натуральному $p \geq k$ отримуємо

$$v(\tau_p + 0) \leq v(\tau_p + 0) + \sum_{i=k}^{p-1} (v(\tau_i + 0) - v(\tau_{i+1})) =$$

$$= v(T) + \sum_{i=k+1}^{p} (v(\tau_i + 0) - v(\tau_i)) \leq v(T) - (p - k - 1)c.$$

При великих p функція стає від'ємною, що суперечить додатній означеності, а тому наше припущення невірне, а отже, тривіальний інваріантний тор — асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Якщо для системи* (19) *в області* Z *існує додатно означена нескінченно велика функція* $V(\varphi, x)$ *така, що в області* Z_Ω *вона задовольняє нерівності*

$$\begin{gathered} \langle \operatorname{grad}_\varphi V(\varphi, x), a(\varphi) \rangle + \langle \operatorname{grad}_x V(\varphi, x), f(\varphi, x) \rangle \leq 0, \\ V(\varphi, x + I(\varphi, x)) - V(\varphi, x) \leq -\psi(V(\varphi, x)), \end{gathered} \tag{23}$$

де $\psi(s)$ *— неперервна функція, визначена для всіх* $s \geq 0$, *причому* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$, *то тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ *системи* (19) *буде асимптотично стійким в цілому.*

Доведення. Нехай $\varphi_t(\varphi)$, $x_t(\varphi, x_0)$ — довільний розв'язок системи (19). Покажемо, що $\| x_t(\varphi, x_0) \| \to 0$, $t \to \infty$, $\forall \varphi \in \Im_m$. Для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

Оскільки $V(\varphi, x)$ — нескінченно велика додатно означена функція, то для будь-якого додатного числа A існує додатне число R таке, що $V(\varphi, x) > A$, як тільки $\|x\| > R$.

Як було показано при доведенні теореми 4 , умови (23) починають виконуватись при $t \to \infty$ для будь-якого $\varphi \in \Im_m$. Це означає, що починаючи з деякого $T \geq t_0$ функція $v(t)$ — незростаюча, тобто $v(t) \leq v(T)$ при $t \geq T$. Нехай $\sup\limits_{t \in [t_0, T]} v(t) = m$, тобто $v(t) \leq m$ при $t \geq t_0$. Отже, ми можемо вказати таке додатне число $R > 0$, що $V(\varphi, x) > m$, як тільки $\|x\| > R$. Таким чином, $x_t \in \bar{J}_R$ при $t \geq t_0$.

Припустимо, що $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \alpha \neq 0$. Нехай $c = \min\limits_{\alpha \leq s \leq v(T)} \psi(s) > 0$. Тоді з нерівностей (23) одержуємо

$$v(\tau_j + 0) - v(\tau_j) \leq -\psi(v(\tau_j)), \quad j \geq k, \quad \tau_{k-1} < T < \tau_k.$$

Оскільки $\alpha \leq v(\tau_j) \leq v(T)$, то $-\psi(v(\tau_j)) \leq -c$. З нерівності $v(\tau_j + 0) \geq v(\tau_{j+1})$ при будь-якому натуральному $p \geq k$ отримуємо

$$v(\tau_p + 0) \leq v(\tau_p + 0) + \sum_{i=k}^{p-1} \left(v(\tau_i + 0) - v(\tau_{i+1}) \right) =$$

$$= v(T) + \sum_{i=k+1}^{p} \left(v(\tau_i + 0) - v(\tau_i) \right) \leq v(T) - (p - k - 1)c.$$

При великих p функція стає від`ємною, що суперечить додатній означеності, а тому наше припущення невірне, а отже, тривіальний інваріантний тор — асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 612 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 172 с.

Одержано 13.05.97