УДК 517.919

В. О. Єрьоменко (Терноп. акад. нар. госп-ва)

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖУВАНОЮ НЕСИМЕТРИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНИХ

We establish sufficient conditions for the existence of periodic solution to a system of two linear ordinary first-order differential equations having degenerating asymmetric matrix with derivatives for the case of arbitrary periodic nonhomogeneity.

Встановлено достатні умови існування періодичного розв'язку системи двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з вироджуваною несиметричною матрицею при похідних для довільної періодичної неоднорідності.

1. Задача про періодичні розв'язки найбільш повно вивчена для систем диференціальних рівнянь з додатно визначеною симетричною лінійною частиною (див., наприклад, [1, 2]). Разом з тим матриці при похідних вироджуваних систем, що зустрічаються на практиці, переважно несиметричні. Для систем рівнянь вигляду

$$Lx \equiv A(t)x^{(1)} + B(t)x = f(t), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $x^{(1)} = dx/dt$; A, B і f — відповідно періодичні квадратні матриці і вектор n-го порядку, в роботах [3, 4] в припущенні сталості рангу матриці A запропоновано алгоритм послідовного пониження порядку вихідної системи. Проте цей підхід в деяких випадках не дає ефективного (такого, що легко перевіряється за коефіцієнтами вихідної системи) критерію існування періодичних розв'язків. Залишається також відкритим питання побудови періодичних розв'язків, якщо вони існують. Результати досліджень умов існування квазіперіодичних розв'язків системи для довільного вектора неоднорідності f наведені у роботах [5, 6] у припущенні, що ранг матриці $A(t)$, змінюючись при зміні t, не перевищує одиниці і тотожно дорівнює $n-1$.

В роботі [7] отримано достатні умови існування інваріантних многовидів у лінійних системах з виродженою матрицею при похідних для випадків, коли ця матриця: 1) постійна; 2) діагональна; 3) має ранг, що не перевищує одиниці.

В даній роботі для $n = 2$ і несиметричної матриці $A(t)$, $1 \le \operatorname{rank} A(t) \le 2$, вивчаються достатні умови існування єдиного періодичного розв'язку системи (1) для довільного періодичного вектора неоднорідності, а також обгрунтовується ітераційний метод Гальоркіна його наближеної побудови. Основна ідея полягає в побудові лівого симетризатора матричної функції $A(t)$ та встановленні для оператора L апріорних оцінок, характерних для лінійних додатно визначених симетричних систем диференціальних рівнянь.

2. Введемо необхідні позначення та сформулюємо допоміжні результати. Згідно з [1] позначимо через $C^r(T_1)$ простір векторних або матричних функцій $\Phi(t)$, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π і таких, що мають неперервні похідні до порядку r включно, через $H^r(T_1)$ простір функцій, інтегровних з квадратом на $T_1 = [0; 2\pi]$ разом з усіма узагальненими похідними до порядку r включно; $(\cdot,\cdot)_r$ — скалярний добуток в $H^r(T_1)$,

$$\|\cdot\|_r^2 = (K^r\cdot,\cdot)_0, \quad K = 1 - \frac{d^2}{dt^2}, \ (\cdot,\cdot)_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\cdot\|^2\,dt,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток в R^n, $|\Phi(t)|_r = \max_{t \in T_1, 0 \le \rho \le r} \|\Phi^{(\rho)}(t)\|$, $\|\cdot\|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма. Зірочкою будемо позначати операцію транспонування матриці.

Лема 1 [8]. *Нехай оператор*

$$L_1 = a(t)\frac{d}{dt} + b(t) \tag{2}$$

задовольняє такі умови:

1) *n-мірні квадратні матриці* $a(t)$, $b(t) \in C^r(T_1)$ *і* $a^*(t) \equiv a(t)$ $\forall\, t \in T_1$;
2) *для кожного цілого* $s = 0, 1, \ldots, r$ *виконується нерівність*

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle \left(b(t) + \left(s - \frac{1}{2} \right) a^{(1)}(t) \right) \xi, \xi \right\rangle \ge \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Тоді для довільного $u(t) \in H^1(T_1)$

$$(L_1 u, u)_0 \ge \gamma \|u\|_0^2$$

і для кожного $s = \overline{1, r}$ *та довільного* $u \in H^{s+1}(T_1)$ *виконується нерівність* $(L_1 u, u)_s \ge \gamma_1 \|u\|_s^2 - \delta_1 \|u\|_0^2$, *де додатні сталі* γ, γ_1 *та* δ_1 *не залежать від* u.

Позначимо через S_n оператор, який ставить у відповідність інтегровній з квадратом функції $g(t)$ відрізок ряду Фур'є довжиною n:

$$S_n g(t) = \sum_{|k| \le n} g_k e^{ikt}, \quad g_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt.$$

У лемі 1 суттєва симетричність матриці $a(t)$, в той час як у вихідному рівнянні (1) матриця $A(t)$ несиметрична. У припущенні

$$A(t) = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2} \in C^r(T_1), \quad \operatorname{rank} A(t) \ge 1 \quad \forall\, t \in T_1 \tag{3}$$

побудуємо лівий симетризатор $V(t) = \{v_{ij}\}_{i,j=1,2} \in C^r(T_1)$ матриці $A(t)$, тобто знайдемо таку невироджену матрицю $V(t)$, що

$$(V(t)A(t))^* \equiv V(t)A(t) \quad \forall\, t \in T_1. \tag{4}$$

З урахуванням (3) без обмеження загальності можна вважати виконаною рівність

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in T_1. \tag{5}$$

Очевидно, що елементи матриці V повинні задовольняти співвідношення

$$\langle (a_{12}, a_{22}, -a_{11}, -a_{21}), v \rangle = 0, \tag{6}$$

$$|\det V(t)| = |v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}| \ge \beta = \text{const} > 0, \tag{7}$$

де

$$v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}). \tag{8}$$

Відмітимо, що питання про періодичні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь з періодичними коефіцієнтами розглядалися в [9, 10]. При цьому період розв'язків виявився подвоєним в порівнянні з періодом коефіцієнтів системи. Глибокі дослідження квазіперіодичних систем лінійних алгебраїчних рівнянь виконав А. М. Самойленко [11].

У випадку рівняння (6) легко знаходиться його загальний розв'язок:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_1(t) v_1(t), \tag{9}$$

де

$$\begin{gathered} v_1 = (a_{21}, a_{11}, a_{22}, a_{12}), \qquad v_2 = (a_{22}, -a_{12}, -a_{21}, a_{11}), \\ v_3 = (-a_{11}, a_{21}, -a_{12}, a_{22}), \end{gathered} \tag{10}$$

$\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, — довільні дійсні скалярні функції, при цьому з урахуванням (5) вектори v_i, $i = 1, 2, 3$, ортонормовані для кожного $t \in T_1$:

$$\left\langle v_i(t), v_j(t) \right\rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Враховуючи співвідношення (8) – (10), одержуємо

$$V(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} - \lambda_3 a_{11} & \lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{21} \\ \lambda_1 a_{22} - \lambda_2 a_{21} - \lambda_3 a_{12} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{11} + \lambda_3 a_{22} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \det V(t) = {} & -(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \det A(t) + 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})\lambda_1\lambda_2 + \\ & + \left(a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{11}^2 - a_{12}^2\right)\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, отримано наступне твердження.

Лема 2. *Квадратна 2-вимірна матриця $A(t) \in C^r(T_1)$, ранг якої для всіх $t \in T_1$ не менший одиниці, має невироджений лівий симетризатор $V(t) \in \in C^r(T_1)$ тоді і тільки тоді, коли існують скалярні функції $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t) \in C^r(T_1)$ такі, що квадратична форма* (12) *цих функцій відмінна від нуля для всіх $t \in T_1$.*

Непорожність множини таких функцій випливає, зокрема, з наступного вибору:

$$\lambda_1 = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}, \qquad \lambda_3 = a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{11}^2 - a_{12}^2, \qquad \lambda_2 = (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)^{1/2},$$

при якому

$$\begin{aligned} \det V(t) &= \left[2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2 + \left(a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{11}^2 - a_{12}^2\right)^2 \right]\lambda_2 \equiv \\ &\equiv \left[2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 + \left(a_{11}^2 - a_{22}^2\right)^2 + \left(a_{12}^2 - a_{22}^2\right)^2 \right]\lambda_2. \end{aligned}$$

Отже, якщо

$$(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 + \left(a_{11}^2 - a_{22}^2\right)^2 + \left(a_{12}^2 - a_{22}^2\right)^2 > 0 \qquad t \in T_1, \tag{13}$$

то матриця $A(t)$ має невироджений лівий симетризатор $V(t) \in C^r(T_1)$. Аналіз показує, що нерівність (13) порушується тільки при таких значеннях t, коли одночасно виконуються рівності $a_{11}(t) = -a_{22}(t)$, $a_{12}(t) = a_{21}(t)$ або $a_{11}(t) = = a_{22}(t)$, $a_{12}(t) = -a_{21}(t)$.

Зауважимо, що вибір функцій $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, в матриці $V(t)$ (11) необхідно здійснювати, з одного боку, так, щоб визначник (12) був відмінним від нуля для всіх $t \in T_1$, а з другого — щоб добитися, якщо це можливо, додатної визначеності матриці $1/2\left(b(t) + b^*(t)\right)$, де $b = VB$, тобто задовольнити тим самим умову 2 леми 1. Наприклад, якщо

$$a_{12}(t) - a_{21}(t) \equiv d(t) \neq 0 \qquad \forall\, t \in T_1, \tag{14}$$

то, поклавши в (11)

$$\lambda_1 = (a_{11} - a_{22})(\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{21}) + (a_{11} + a_{22})(\beta_2 a_{12} - \beta_1 a_{21}),$$
$$\lambda_2 = -(a_{11} + a_{22})(\beta_1 a_{22} - \beta_2 a_{11}) - d(\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{21}),$$
$$\lambda_3 = -(a_{22} - a_{11})(a_{22}\beta_1 - a_{11}\beta_2) - d(\beta_2 a_{12} - \beta_1 a_{21}),$$

отримаємо

$$V = \begin{pmatrix} -a_{22}\beta_1 + a_{11}\beta_2 & d\beta_1 \\ d\beta_2 & -a_{22}\beta_1 + a_{11}\beta_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де β_1 та β_2 — довільні функції з $C^r(T_1)$ такі, що $\beta_1(t)\beta_2(t) < 0 \quad \forall\, t \in T_1$, якщо $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, і $\beta_1(t)\beta_2(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in T_1$, якщо $a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0 \quad \forall\, t \in T_1$. Більш загальний в порівнянні з (14) випадок передбачає виконання нерівності $(a_{12} - \beta_1 a_{21})^2 + (a_{22} - \beta_2 a_{11})^2 > 0 \quad \forall\, t \in T_1$, де β_1 та β_2 — довільні відмінні від нуля числа різних знаків. Тоді в результаті відповідного вибору $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, одержимо

$$V(t) = \begin{pmatrix} \beta_2 a_{11} - a_{22} & a_{12} - \beta_1 a_{21} \\ \beta_2(a_{12} - \beta_1 a_{21}) & \beta_1(\beta_2 a_{11} - a_{22}) \end{pmatrix}.$$

Нарешті, якщо один із елементів матриці $A(t)$ відмінний від нуля для всіх $t \in$ $\in T_1$, то побудова $V(t)$ суттєво спрощується.

3. Сформулюємо основне твердження.

Теорема. *Нехай відносно системи двох рівнянь* (1) *виконуються такі умови:*

1) $A, B, f \in C^r(T_1)$, $r \geq 1 + k$, $k \geq 1$;

2) $\operatorname{rank} A(t) \geq 1 \quad \forall\, t \in T_1$;

3) *існують скалярні функції* $\lambda_i(t) \in C^r(T_1)$, $i = 1, 2, 3$, *такі, що квадратична форма* (12) *відносно цих функцій відмінна від нуля для всіх* $t \in T_1$ *і для довільного цілого* $s = 0, 1, \ldots, r$ *виконується нерівність*

$$\min_{\|\xi\| = 1} \left\langle \left(V(t)B(t) + \left(s - \frac{1}{2} \right) (V(t)A(t))^{(1)} \right) \xi, \xi \right\rangle \geq \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0. \tag{16}$$

Тоді система (1) *має для будь-якої неоднорідності* $f(t)$ *єдиний розв'язок* $x = x_0(t) \in C^k(T_1)$. *Наближення до* $x_0(t)$ *знаходяться із системи рівнянь*

$$S_n L u_n(t) = S_n f(t), \tag{17}$$

де

$$u_n(t) = \sum_{|k| \leq n} u_k e^{ikt}. \tag{18}$$

Система (17) *має розв'язок* $u_n(t)$ *для довільної функції* $f \in H^r(T_1)$ *і для всіх* $n \geq 0$, *який при* $n \to \infty$ *збігається в просторі* $C^k(T_1) \cap H^{r-1}(T_1)$ *до функції* $x_0(t)$, *причому швидкість збіжності визначається нерівністю*

$$|x_0(t) - u_n(t)|_s \leq cn^{-(k-s-1)} \| f(t) \|_r \tag{19}$$

для будь-якого $s = \overline{0, k}$ *і деякої додатної сталої* c, *яка не залежить від* n *та* f.

Доведення. Розглянемо диференціальний оператор L_1, визначений (2), де $n = 2$ і

$$a = VA, \quad b = VB, \tag{20}$$

тобто

$$L_1 = V(t)L. \tag{21}$$

З побудови матриці $V(t)$, умов теореми та співвідношень (20) випливає справедливість леми 1, згідно з якою з урахуванням (21) для довільного $u(t) \in \in H^1(T_1)$

$$(VLu, u)_0 \geq \gamma \| u \|_0^2 \tag{22}$$

і для кожного $s = \overline{1, r}$ і будь-якого $u \in H^{s+1}(T_1)$ виконується нерівність

$$(VLu, u)_s \geq \gamma_1 \| u \|_s^2 - \delta_1 \| u \|_0^2 \tag{23}$$

з додатними сталими γ, γ_1, δ_1, що не залежать від u.

Застосовуючи нерівність Шварца до лівих частин (22) та (23), одержуємо оцінки

$$\| Lu \|_0 \geq \gamma_0 \| u \|_0 \qquad \forall\, u \in H^1(T_1), \tag{24}$$

$$\nu \| Lu \|_s \| u \|_s \geq \gamma_1 \| u \|_s^2 - \delta_1 \| u \|_0^2 \qquad \forall\, u \in H^{s+1}(T_1), \quad s = \overline{1, r}, \tag{25}$$

де

$$\gamma_0 = \gamma \left(\max_{t \in T_1,\, \| x \| = 1} \left\langle V^*(t) V(t) x, x \right\rangle \right)^{1/2}, \qquad \nu = \nu\left(|V(t)|_r \right) > 0.$$

Згідно з методом Гальоркіна n-е наближення до періодичного розв'язку системи (1) будемо шукати у вигляді (18), визначаючи коефіцієнти u_k з системи рівнянь (17). Покажемо, що рівняння $S_n L u_n(t) = 0$ задовольняє лише функція $u_n(t) \equiv 0$. Для цього розглянемо допоміжне рівняння

$$Lz = S_n f(t), \tag{26}$$

де n — фіксоване ціле додатне число. Це рівняння породжує систему рівнянь для наближень Гальоркіна

$$S_n L z_n = S_n f(t), \tag{27}$$

яка, очевидно, рівносильна системі рівнянь (17). Використовуючи нерівність $\| z(t) \|_0 \geq \| S_n z(t) \|_0$ та оцінку (24), з урахуванням (26) отримуємо $\| S_n f(t) \|_0 = = \| Lz \|_0 \geq \gamma_0 \| z \|_0 \geq \gamma_0 \| z_n(t) \|_0$, звідки випливає, що система (27), а отже, і система (17), при $S_n f(t) = 0$ має тільки тривіальний розв'язок. Таким чином, система (17) розв'язана для будь-якого цілого $n \geq 0$ і довільної функції $f \in H^0(T_1)$.

Збіжність наближень Гальоркіна до розв'язку системи (1), його єдиність і нерівність (19), яка визначає швидкість збіжності, доводяться за схемою доведення леми 1 та теореми 1 [1, с. 198 – 203] з використанням апріорних оцінок (24), (25) для оператора L на відміну від оцінок, встановлених у лемі 1.

4. Як приклад розглянемо систему (1):

$$(\sin t)\,x_1^{(1)} + (\cos^2 t)\,x_2^{(1)} + \alpha x_2 = f_1(t),$$
$$(-\sin^2 t)\,x_1^{(1)} + (1-\cos t)\,x_2^{(1)} - \alpha x_1 = f_2(t), \tag{28}$$

де α — додатний параметр. Визначимо, виходячи із умов теореми, таке значення α, щоб система (28) мала при будь-якому векторі неоднорідності гладкий періодичний розв'язок.

Відмітимо, що система (28) не підлягає вивченню відомими методами [1 – 7].

У відповідності з (14) та (15) $d = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ і

$$V(t) = \begin{pmatrix} (\cos t - 1)\beta_1 + (\sin t)\beta_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & (\cos t - 1)\beta_1 + (\sin t)\beta_1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

де β_1 та β_2 — довільні відмінні від нуля числа різних знаків. Для виконання нерівності (16) необхідно, щоб матриця $1/2(VB + B^*V^*)$ була додатно визначеною. Очевидно, що цього можна досягнути вибором: $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$, при цьому величини $|\beta_1|$ і β_2 несуттєві. Тому, поклавши $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ в (29), одержуємо

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin t - \cos t & -1 \\ 1 & 1 + \sin t - \cos t \end{pmatrix},$$

$$VA = \begin{pmatrix} (1 + 2\sin t - \cos t)\sin t & \sin t\cos^2 t + (\cos t - 1)\sin^2 t \\ \sin t\cos^2 t + (\cos t - 1)\sin^2 t & 1 + (1 - \cos t)(\sin t - 2\cos t) \end{pmatrix},$$

$$VB = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 + \sin t - \cos t \\ -1 - \sin t + \cos t & 1 \end{pmatrix},$$

$$(VA)^{(1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin 2t - \cos 2t & \cos^3 t - \sin^3 t - (\sin t - \cos t + 1)\sin 2t \\ \cos^3 t - \sin^3 t - (\sin t - \cos t + 1)\sin 2t & -\cos 2t - 2\sin 2t + \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Знайдемо максимальне власне число матриці $(VA)^{(1)}$:

$$\lambda_{\max}\left((VA)^{(1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \sqrt{(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})^2 + 4\tilde{a}_{12}^2}\right),$$

де $\tilde{a}_{ij}$ — відповідні елементи матриці $(VA)^{(1)}$. Оцінимо зверху $\left|\lambda_{\max}\left((VA)^{(1)}\right)\right|$:

$$|\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}| = 2|\cos t + \sin t - \cos 2t| \le 2\left(\sqrt{2} + 1\right),$$

$$|\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22}| = 2|2\sin 2t - \sin t| < 6,$$

$$|\tilde{a}_{12}| \le \left|\cos^3 t - \sin^3 t\right| + |\sin 2t|(|\sin t - \cos t| + 1) \le 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\left|\lambda_{\max}\left((VA)^{(1)}\right)\right| < 5 + \sqrt{2}.$$

З урахуванням (16) отримаємо

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle ((VB\xi, \xi) \rangle = \alpha,$$

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle \left(VB + (r-1/2)(VA)^{(1)}\right)\xi, \xi \right\rangle > \alpha - (r-1/2)\left(5+\sqrt{2}\right).$$

Таким чином, згідно з теоремою система (28) має періодичний розв'язок $x_0(t, \alpha) \in C^k(T_1)$, $k \geq 1$, якщо параметр α задовольняє умову

$$\alpha \geq \gamma + (1+k)\left(5+\sqrt{2}\right),$$

де γ — деяке додатне число.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Мозер Ю.* Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные управления // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179–238.
3. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 168–174.
4. *Еременко В. А.* Исследование колебательных систем с квазипериодическими коэффициентами: Автореф. дис. . . . канд. физ-мат. наук. – Киев, 1981. – 14 с.
5. *Кулик В. Л., Еременко В. А.* О квазипериодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 746–753.
6. *Еременко В. А.* Инвариантные торы линейных расширений динамических систем на торе с вырожденной матрицей при производных // Там же. – 1984. – **36**, № 6. – С. 865–768.
7. *Симоконь В. Х., Трофимчук Е. П.* О регулярности линейных систем с вырожденной матрицей при производной // Там же. – 1993. – **45**, № 2. – С. 279–286.
8. *Еременко В. А.* О периодических решениях линейных вырожденных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Там же. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1137–1142.
9. *Sibuya Jk. V.* Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. – 1965. – **161**, Hf. 1. – P. 67–77.
10. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
11. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5–26.

Одержано 27.10.97