УДК 517. 5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ $\overline{\psi}$–ИНТЕГРАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ (НЕБОЛЬШАЯ ГЛАДКОСТЬ). II

The rate of convergence of the Fourier series is investigated on the classes $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ in uniform and integral metrics. The results obtained are extended to the case where the classes $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ are classes of convolutions of functions from $\mathfrak{N}$ with kernels whose coefficients are slowly decreasing. In particular, asymptotic equalities are obtained for the upper bounds of deviations of the Fourier sums on sets $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ which are solutions of the Kolmogorov–Nikol'skii problem. In addition, an analog of the well-known Lebesgue inequality is found.

Продовжується вивчення швидкості збіжності рядів Фур'є на класах $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ в рівномірній та інтегральній метриках. Результати роботи поширюються на випадок, коли класи $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ є класами згорток функцій із $\mathfrak{N}$ з ядрами, коефіцієнти яких є повільно спадними. В цьому напрямі, зокрема, одержані асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень сум Фур'є на множинах $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$, які є розв'язками задачі Колмогорова–Нікольського, а також знайдено аналог відомої нерівності Лебега.

Настоящая статья является продолжением работы [1], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем, формул и т. д.

3. Доказательства теорем 1–3'. ***Доказательство теоремы*** **1**. Сначала заметим, что классы $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ инвариантны относительно сдвига аргумента: если $f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$, то при любом $h \in R^1$ функция $f_1(x) = f(x+h)$ также принадлежит $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$. Отсюда заключаем

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\right) = \sup\left\{|\rho_n(f;x)|:\ f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\right\} = \sup\left\{|\rho_n(f;0)|:\ f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\right\}.$$

Таким образом, величина $\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}\right)$ не зависит от значения x. Учитывая это, а также тот факт, что наряду с функцией $\varphi(t)$ из S_M^0 этому классу принадлежит и функция $\varphi(-t)$, согласно (96) находим

$$\mathscr{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\Psi}}\right) \le \sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \int\limits_{|t| \le a/n} \varphi(t) I_2(\psi_2; n; t)_1\, dt \right| +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \sup_{\varphi \in S_M^0} \left| \int\limits_{i_{3,1}} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt \right| + O(1)\,\overline{\psi}(n) \le$$

$$\le \int\limits_{|t| \le a/n} |I_2(\psi_2; n; t)|\, dt + \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + O(1)\,\overline{\psi}(n). \tag{99}$$

На множестве $I_n = \left\{t : t \in (-a/n,\ a/n) \cup i_{3,1}\right\}$ определим функцию $\varphi_n(t)$, положив

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} I_2(\psi_2; n; t)_1, & |t| \le a/n; \\ \operatorname{sign} \dfrac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)}, & t \in i_{3,1}, \end{cases} \tag{100}$$

и через $\varphi^*_n(t)$ обозначим функцию из S^0_M, совпадающую с $\varphi_n(t)$ на множестве l_n. Ясно, что такая функция $\varphi^*(t)$ всегда существует. В таком случае в силу (96) значение $\rho_n(I^\psi(\varphi^*;\cdot);x)$ будет в точности совпадать с правой частью соотношения (99). А это означает, что в (99) строгого неравенства быть не может, следовательно,

$$\mathscr{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \int\limits_{|t|\le a/n}\left|I_2(\psi_2;n;t)_1\right|dt +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3.1}}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}\right|dt + O(1)\,\overline{\psi}(n) \tag{101}$$

и для доказательства равенства (24) остается показать, что

$$\int\limits_{|t|\le a/n}\left|I_2(\psi_2;n;t)_1\right|dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\,\overline{\psi}(n) \tag{102}$$

и

$$\int\limits_{i_{3.1}}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}\right|dt = \frac{4}{\pi}\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n). \tag{103}$$

На промежутке $(0, a/n)$ выполняются равенства (81), поэтому

$$\int\limits_{|t|\le a/n}\left|I_2(\psi_2;n;t)_1\right|dt \le \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^a\int\limits_1^\infty\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt\right| \overset{\mathrm{df}}{=} I_n(\psi_2;a). \tag{104}$$

Покажем, что в интеграле $I_n(\psi_2;a)$ можно поменять порядок интегрирования.

Функция $\psi_2(v)$ монотонно убывает к нулю. Поэтому функция

$$\Phi_1(x) = \int\limits_x^\infty\psi_2(nv)\sin vt\,dv,\quad x>0,$$

при каждых фиксированных n и t непрерывна и на каждом промежутке между соседними нулями v_k и v_{k+1} функции $\sin vt$ имеет по одному простому нулю x_k. Непрерывность функции $\Phi_1(x)$ очевидна, а существование нулей x_k является простым следствием теоремы Лейбница о знакочередующихся рядах; единственность нуля x_k на промежутке (v_k, v_{k+1}) обеспечивается равенством $\operatorname{sign}\Phi'_1(x) = \operatorname{sign}\sin xt$.

Пусть A — любое число, $A\ge 1$. Обозначим через $x_{k'}$ ближайший справа от точки $x=A$ такой нуль, тогда будем иметь $A\le x_{k'} < A + 2\pi/t$.

Следовательно,

$$\left|\int\limits_A^\infty\psi_2(nv)\sin vt\,dv\right| \le \left|\int\limits_0^a\int\limits_A^{A+2\pi/t}\psi_2(nv)\,dv\right|. \tag{105}$$

Учитывая эти факты, находим

$$\left|\int\limits_0^a\int\limits_A^\infty\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt\right| \le \int\limits_0^a\left|\int\limits_A^{A+2\pi/t}\psi_2(nv)\,dv\right|dt = \left|\int\limits_0^a\int\limits_A^{A+2\pi/t}\psi_2(nv)\,dv\right| =$$

$$= t \int_A^{A+2\pi/t} \psi_2(nv)dv \,\Big|_0^a + 2\pi \int_0^a \frac{\psi_2(n(A+2\pi/t))}{t^2} dt <$$

$$< 2\pi\Big(\psi_2(An) + \int_{2n\pi/a}^{\infty} \frac{\psi_2(t+An)}{t} dt\Big).$$

Отсюда с учетом соотношения (11) заключаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое число $A(\varepsilon)$, что при $A \ge A(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \int_0^a \int_A^{\infty} \psi_2(nv) \sin vt \, dv \, dt \right| < \varepsilon,$$

которое, очевидно и обеспечивает возможность изменения порядка интегрирования в (104). Выполняя интегрирование, находим

$$I_n(\psi_2; a) = 2\pi \left| \int_1^{\infty} \frac{\psi_2(nv)}{v} dv - \int_1^{\infty} \frac{\psi_2(nv)}{v} \cos av \, dv \right|. \tag{106}$$

Далее, так как функция $|\psi_2(nv)|/v$ убывает, то поступая так же, как и при доказательстве оценки (105), получаем

$$\frac{2}{\pi}\left| \int_1^{\infty} \frac{\psi_2(nv)}{v} \cos av \, dv \right| \le \frac{2}{\pi}\left| \int_1^{1+2\pi/a} \frac{\psi_2(nv)}{v} dv \right| \le \frac{2}{\pi}\, \psi_2(n)\, \frac{2\pi}{a} = O(1)\, \psi_2(n). \tag{107}$$

Объединяя соотношения (106) и (107), получаем (102).

Докажем равенство (103). Учитывая формулы (84) и (85), имеем

$$\int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt = \sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt.$$

Но для каждого k

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\sin(nt - \gamma_n)| dt = 2 \int_{t_k}^{t_k + \pi/2n} |\sin(nt - \gamma_n)| dt = 2 \int_0^{\pi/2n} |\sin nt| dt = 2/n. \tag{108}$$

Поэтому

$$\int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt = 2\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|k\pi - \gamma_n|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{(k\pi - \gamma_n)} \right) =$$

$$= 2\left(\sum_{k=|k_2|+1}^{|k_3|} \frac{1}{k\pi + \gamma_n} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{k\pi - \gamma_n} \right). \tag{109}$$

Согласно построениям $|\gamma_n| \le 2\pi$ и

$$k_0\pi - \gamma_n > a, \quad |k_2|\pi + \gamma_n > a, \quad k_1 < n/2 + \gamma_n/\pi, \quad |k_3| < n/2 + \gamma_n/\pi. \tag{110}$$

Учитывая эти факты, получаем

$$2\left(\sum_{k=|k_2|+1}^{|k_3|}\frac{1}{k\pi+\gamma_n}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{k\pi-\gamma_n}\right) = 4\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{k\pi-\gamma_n}+O(1) =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1) = \frac{4}{\pi}\ln n+O(1). \tag{111}$$

Объединяя (109) и (111), приходим к соотношению (103). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Выше отмечалось, что величина $\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right)$ не зависит от значения x и так как вместе с функцией $\varphi(t)$ в класс H_ω^0 входит также и функция $\varphi_1(t)=\varphi(-t)$, то в силу равенства (97) находим

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right) = \sup_{f\in C^{\overline{\psi}}H_\omega^0}|\rho_n(f;0)| \le$$

$$\le \sup_{f\in H_\omega^0}\left|\int\limits_{|t|\le a/n}(\varphi(t)-\varphi(0))\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt\right| +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}e_k(\omega)-\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}e_k(\omega)\right)+O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n), \tag{112}$$

где

$$e_k(\omega) = \sup_{f\in H_\omega^0}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(nt-\gamma_n)\,dt\right|. \tag{113}$$

Функция $I_2(\psi_2;n;t)$ нечетная. Поэтому для каждой функции $\varphi\in H_\omega^0$

$$\left|\int\limits_{|t|\le a/n}(\varphi(t)-\varphi(0))\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt\right| = \left|\int\limits_0^{a/n}(\varphi(t)-\varphi(-t))\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{a/n}\omega(2t)\,|I_2(\psi_2;n;t)|\,dt = \left|\int\limits_0^{a/n}\omega(2t)\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt\right|. \tag{114}$$

Принимая во внимание (84), для $\varphi\in H_\omega^0$ имеем

$$\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(nt-\gamma_n)\,dt\right| = \left|\int\limits_{t_k}^{x_k}(\varphi(t)-\varphi(2x_k-t))\sin(nt-\gamma_n)\,dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_{t_k}^{x_k}\omega(2(x_k-t))\,|\sin(nt-\gamma_n)|\,dt = \int\limits_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\,dt. \tag{115}$$

Таким образом,

$$e_k(\omega) \le \int\limits_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\,dt. \tag{116}$$

Следовательно, согласно (112) – (116) находим

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega^0\right) \le \left|\int_0^{a/n}\omega(2t)\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt\right| +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\,dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\right)+O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n). \qquad (117)$$

Теперь построим функцию $f^*\in C^{\psi}H_\omega^0$, для которой значение $\rho_n(f^*;0)$ совпадает с правой частью (117). С этой целью положим

$$\varphi_k(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega(2(x_k-t)), & t\in(t_k,\ x_k);\\ -\dfrac{1}{2}\omega(2(t-x_k)), & t\in(x_k,\ t_{k+1}),\end{cases} \qquad k=\overline{k_0,k_1-1}, \qquad k=\overline{k_3,k_2-1},$$

$$\varphi_+(t) = (-1)^{k-k_0}\varphi_k(t)-\frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)-\omega\left(\frac{2a}{n}\right)\right), \quad t\in[t_k,\ t_{k+1}], \quad k=\overline{k_0,k_1-1},$$

$$\varphi_-(t) = (-1)^{k-k_2+1}\varphi_k(t)+\frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)-\omega\left(\frac{2a}{n}\right)\right), \quad t\in[t_k,\ t_{k+1}], \quad k=\overline{k_3,k_2-1},$$

и

$$.\ \hat{\varphi}(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega(2|t|), & |t|\le a/n;\\ \dfrac{1}{2}\omega(2a/n), & t\in[a/n,\ t_{k_0}];\\ \varphi_+(t), & t\in[t_{k_0},\ t_{k_1}];\\ -\dfrac{1}{2}\omega(2a/n), & t\in[t_{k_2},\ -a/n];\\ \varphi_-(t), & t\in[t_{k_3},\ t_{k_2}].\end{cases} \qquad (118)$$

Предположим сначала, что $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда функция $\hat{\varphi}(t)$, будучи непрерывной на промежутке $[t_{k_3},t_{k_1}]$, в силу выпуклости функции $\omega(t)$ будет удовлетворять соотношению (см., например, [2, с. 23])

$$|\hat{\varphi}(t)-\varphi(t')| \le \omega(|t-t'|), \quad t,t'\in[t_{k_3},t_{k_1}]. \qquad (119)$$

Кроме того,

$$\int_{t_{k_3}}^{t_{k_1}}\hat{\varphi}(t)\,dt = \int_{t_{k_2}}^{-a/n}\hat{\varphi}(t)\,dt+\int_{a/n}^{t_{k_0}}\hat{\varphi}(t)\,dt = \omega\left(\frac{2a}{n}\right)\left(t_0+t_{k_2}\right)$$

и так как согласно построению

$$a/n\le t_{k_0}\le 2\pi/n, \quad a/n-2\pi/n\le t_{k_2}\le -a/n,$$

то

$$\left|\int_{t_{k_3}}^{t_{k_1}}\hat{\varphi}(t)\,dt\right|\le\frac{2\pi}{n}\omega\left(\frac{2a}{n}\right). \qquad (120)$$

Ясно, что эта оценка позволяет доопределить функцию (118) на оставшемся множестве периода $[-\pi,\pi]$, так чтобы полученная в результате функция (ее, по-прежнему, обозначаем через $\hat{\varphi}(t)$) удовлетворяла условию (119) на промежутке $[-\pi, \pi]$, ее среднее значение на периоде было равно нулю и в точках $-\pi$ и π принимала одинаковые значения. В таком случае 2π-периодическое продолжение функции $\hat{\varphi}(t)$ обозначим через $\varphi^*(t)$ и положим $\varphi^*(\cdot) = I^{\overline{\psi}}(\varphi^*;\cdot)$. Это и есть искомая экстремальная функция, поскольку согласно ее определению $f^* \in C^{\overline{\psi}} H_\omega^0$ и, как показывают непосредственные подсчеты (см., например, [3, с. 82, 83]), значение величины (96) для нее совпадает с правой частью (117). Это в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклая функция, показывает, что соотношение (117) является равенством. А с учетом равенства (111) доказывает теорему 2 для выпуклых модулей непрерывности, если учесть, что при произвольном $a > 0$

$$r_n = \left| \int_a^1 \omega(2t/n) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vt\, dv\, dt \right| = O(1)\, \psi_2(n)\, \omega(1/n).$$

Действительно, учитывая (105), находим

$$r_n \le \left| \int_a^1 \omega(2t/n) \int_a^{1+2\pi/t} \psi_2(nv)\, dv \right| dt \le$$

$$\le |\psi_2(n)|\, \omega\!\left(\frac{2\max(a,1)}{n} \right) \frac{2\pi |a-1|}{\min(a,1)} =$$

$$= O(1)\, |\psi_2(n)|\, \omega(1/n).$$

Если же $\omega(t)$ — не обязательно выпуклый модуль непрерывности, то и в этом случае только что построенная функция $f^*(\cdot)$ будет, по-прежнему, доставлять значение величине (96), равное правой части (117). Однако функции в (118), а с ними и функция $\hat{\varphi}(\cdot)$ могут не удовлетворять условию (119) и , следовательно, функция $\varphi^*(\cdot)$ не обязательно принадлежит H_ω^0. Вместе с тем можно показать (см., например, [3, с. 70]), что функция $\varphi_*(t) = 2\varphi^*(t)/3$ принадлежит множеству H_ω^0. Отсюда заключаем, что и в случае произвольных модулей непрерывности соотношение (117) является равенством (с некоторым неопределенным значением θ_ω, причем $\theta_\omega \in [2/3, 1]$). Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $f(\cdot)$ — любая функция из $C^{\overline{\psi}} C^0$. Тогда в силу (98)

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \Bigg(\int_{|t| \le a/n} |I_2(\psi_2; n; t)_1|\, dt + \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt +$$

$$+ O(1)\, \overline{\psi}(n) \Bigg) \left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_C. \tag{121}$$

Отсюда, выбирая в качестве $f_{n-1}(\cdot)$ тригонометрический полином $t^*_{n-1}(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ в равномерной метрике, и учитывая равенства (102), (103), получаем оценку (36).

Чтобы доказать вторую часть теоремы 3, вследствие соотношений (98) и (121) достаточно показать, что для любых $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ и $n \in \mathcal{N}$ найдется функция $F(x)$, для которой $E_n(F^{\overline{\psi}}) = E_n(f^{\overline{\psi}})$, и, кроме того,

$$\int\limits_{|t|\le a/n}\Big[F^{\overline{\psi}}(t)-t^*_{n-1}(\cdot)\Big]I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt\;+\;\int\limits_{i_{3,1}}\Big[F^{\overline{\psi}}(t)-t^*_{n-1}(\cdot)\Big]\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt\;=$$

$$=\Big(\int\limits_{|t|\le a/n}|I_2(\psi_2;n;t)_1|\,dt\;+\;\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}\right|dt\;+$$

$$+\;O(1)\,\overline{\psi}(n)\Big)\,E_n\Big(F^{\overline{\psi}}\Big)\;=\;\mathscr{E}_n\Big(C^{\overline{\psi}}_\infty\Big)\,E_n\Big(F^{\overline{\psi}}\Big). \qquad (122)$$

С этой целью положим $E_n\Big(f^{\overline{\psi}}\Big)=e_n$,

$$\varphi_0(t)\;=\;\varphi_0(n,t)\;=\;\begin{cases} e_n\operatorname{sign}I_2(\psi_2;n;t)_1, & |t|\le a/n;\\ e_n\operatorname{sign}I_2(\psi_2;n;a/n)_1, & a/n\le t\le x_{k_0};\\ e_n\operatorname{sign}I_2(\psi_2;n;-a/n)_1, & x_{k_2}\le t\le -a/n;\\ e_n\operatorname{sign}\sin\dfrac{nt-\gamma_n}{l_n(t)}, & t\in i_{3,1}.\end{cases} \qquad (123)$$

Далее, через $\varphi_1(t)\;=\;\varphi_1(n;t;\delta)$ обозначим функцию, совпадающую с $\varphi_0(t)$ всюду на $[t_3, t_1]$, за исключением δ-окрестностей $(\delta<\pi/4n)$ точек 0 и x_k, $k\in\overline{k_0,k_1-1}$, $k\in\overline{k_3,k_2-1}$, где она линейна и ее график соединяет точки $(-\delta$, $\varphi_0(-\delta))$ и $(\delta,\varphi_0(\delta))$, а также точки $(x_k-\delta,\varphi_0(x_k-\delta))$ и $(x_k+\delta,\varphi_0(x_k-\delta))$. На оставшемся участке периода $[-\pi,\pi]$ доопределим $\varphi_1(t)$ так, чтобы она была непрерывной и на промежутке $[-\pi,\pi)$ существовало бы, по крайней мере, $2n$ точек $c_k-\pi<c_1<c_2<\ldots<c_{2n}<\pi$, в которых $\varphi_1(t)$ достигает по модулю максимального значения, равного e_n, причем $\varphi_1(k)=(-1)^k e_n$, чтобы $\varphi_1(-\pi)=\varphi_1(\pi)$ и выполнялось равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(t)\,dt=0.$$

Наконец, через $\varphi_\delta(t)=\varphi_\delta(n;t)$ обозначим 2π-периодическое продолжение построенной функции и через $F_\delta(x)$ — ее $\overline{\psi}$-интеграл. Функция $\varphi_\delta(t)$ при любом $\delta>0$ непрерывна, причем согласно критерию Чебышева $E_n(\varphi_\delta)=e_n$ и полином порядка не выше $n-1$, доставляющий ей наилучшее равномерное приближение, есть полином, тождественно равный нулю.

Подставляя функции $F_\delta(\cdot)$ в правую часть (122), имеем

$$\int\limits_{|t|\le a/n}F_\delta^{\overline{\psi}}\,I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt\;+\;\int\limits_{i_{3,1}}F_\delta^{\overline{\psi}}\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt\;=$$

$$=\;\mathscr{E}_n\Big(C^{\overline{\psi}}_\infty\Big)\,E_n\Big(F^{\overline{\psi}}\Big)\;+\;\int\limits_{|t|\le a/n}\big(\varphi_\delta(t)-\varphi_0(t)\big)I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt\;+$$

$$+\;\int\limits_{i_{3,1}}\big(\varphi_\delta(t)-\varphi_0(t)\big)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt.$$

Отсюда ввиду произвольности δ заключаем о справедливости утверждения, связанного с соотношением (122). Теорема 3 доказана.

4. Аналоги теорем $1-3'$ в интегральной метрике. В этом пункте получены асимптотические равенства для величин

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right)_1 = \sup_{f\in L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \|\rho_n(f;x)\|_1, \quad \|\varphi\|_1 \overset{\text{df}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|dt, \tag{124}$$

где, как и раньше, $\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x)$, $S_{n-1}(f;x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(\cdot)$, а $\mathfrak{N}$ есть либо единичный шар S_1 в пространстве L: $S_1 = \{\varphi : \|\varphi\|_1 \le 1\}$, либо класс H_{ω_1} функций из L, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi(\cdot+t) - \varphi(\cdot)\|_1 \le \omega(t), \tag{125}$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Эти результаты составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 4. *Если* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, *то при* $n \to \infty$ *выполняются асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}S_1\right)_1 = \frac{2}{\pi}\int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n), \tag{126}$$

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}H_{\omega_1}\right)_1 = \theta_{\omega_1}\left(\frac{1}{\pi}\left|\int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\int_1^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt\right) + O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n), \tag{127}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, $\theta_{\omega_1} \in [1/2, 1]$, *причем* $\theta_{\omega_1} = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности.*

Здесь будет также доказан следующий аналог теоремы 3.

Теорема 5. *Если* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, *то для каждой функции* $f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_n(f;x)\|_1 \le \left(\frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n)\right)E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_1, \tag{128}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, *и*

$$E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_1 = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}}\left\|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\right\|_1.$$

Утверждения теорем 4 и 5 в ряде важных случаев известны. Так, если ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то в силу (28), равенства (126) и (127) имеют вид

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}S_1\right)_1 = \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n), \tag{126$'$}$$

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}}S_1\right)_1 = \frac{2\theta_{\omega 1}}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n). \tag{127$'$}$$

При этом вследствие (17) выполняются равенства $L^{\overline{\psi}}S_1 = L^{\psi}_{\beta}S_1$ и $L^{\overline{\psi}}H_{\omega_1} = L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}$, в которых параметры $\psi(k)$ и β выбраны в соответствии с (18). Таким образом, равенства (126$'$) и (127$'$) означают, что при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$

$$\mathscr{E}_n\left(L_\beta^\psi S_1\right)_1 = \frac{4}{\pi^2}|\psi(n)|\ln n + O(1)|\psi(n)|, \tag{126''}$$

$$\mathscr{E}_n\left(L_\beta^\psi H_{\omega_1}\right)_1 = \frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi^2}|\psi(n)|\ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + + O(1)|\psi(n)|\omega(1/n). \tag{127''}$$

Эти равенства впервые были получены в [3, с. 146]. В случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$, равенство (126″) доказано С. М. Никольским [4], а равенство (127″) — А. Г. Демченко [5]. Равенства (126) и (127) в случае, когда $\psi_2(k) \equiv 0$, получены в [3, с. 157].

Что же касается равенства (128), то оно также известно для классов L_β^ψ при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, а также при $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\beta = 0$ [6, с. 904].

***Доказательства теорем* 4** и **5** аналогичны доказательствам теорем 1–3 и начальным пунктом при этом, по-прежнему, является утверждение леммы 1 в той части, которая относится к функциям из $L^{\overline{\psi}}$: если $f \in L^{\overline{\psi}}$ и $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то равенство (41) выполняется почти всюду. Следуя схеме доказательства леммы 2, используя при этом известные оценки норм свертки вида

$$\left\| \int \varphi(x-t)\,K(t)\,dt \right\|_1 \le \|\varphi\|_1 \int |K(t)|dt, \tag{129}$$

а также доказанный в [3, с. 77] аналог леммы 6 для функций из классов H_{ω_1}, получаем следующее утверждение.

Лемма 2′. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0, \psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* a — *произвольное положительное число. Тогда если* $f \in L^{\overline{\psi}} S_1$, *то для каждого* $n \in \mathscr{N}$ *почти всюду выполняется равенство* (43), *если* $f \in L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}$, *то для каждого* $n \in \mathscr{N}$ *почти всюду выполняется равенство* (44). *Если же* $f \in L^{\overline{\psi}}$, *то для каждого* $n \in \mathscr{N}$, *при любом* $t_{n-1} \in \mathscr{T}_{n-1}$ *почти всюду справедливо равенство* (45).

Упомянутый аналог леммы 6 формулируется следующим образом.

Лемма 6′ [3, с. 77]. *Пусть* $\varphi \in L(I)$. *Тогда если* $I = \{x : a \le x \le b\}$ *и* x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b$, — *некоторый набор точек, для которых*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt = 0, \quad k = \overline{1, m-1},$$

то при $f \in H_{\omega_1}$

$$\left\| \int_a^b f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\|_1 \le \left\| \int_a^{x_1} f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\|_1 + + \frac{\omega(\Delta)}{2} \int_{x_1}^{x_m} |\varphi(t)|dt + \left\| \int_{x_m}^b f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\|_1 .$$

Если $I = \{x : x \ge a\}$ *и* x_k, $k = 1, 2, \ldots$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots$, — *опять некоторый набор точек, для которых выполняется* (74) *при любом* $k \in \mathscr{N}$, *то для любой функции* $f \in H_{\omega_1}$

$$\left\| \int_a^\infty f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\|_1 \le \left\| \int_a^{x_1} f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\|_1 + \frac{\omega(\Delta)}{2} \int_{x_1}^\infty |\varphi(t)|\,dt.$$

При этом $\Delta = \sup(x_{k+1} - x_k)$.

Отметим, что в метрике L справедлив также аналог леммы 9.

Следствие 1′. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* a — *произвольное положительное число. Тогда если* $f \in L^{\overline{\psi}} S_1$, *то при* $n \in \mathcal{N}$ *почти всюду выполняется равенство* (96), *если* $f \in L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}$, *то при* $n \in \mathcal{N}$ *почти всюду выполняется равенство* (97). *Если же* $f \in L^{\overline{\psi}} L^0$, *то при* $n \in \mathcal{N}$ *и любом* $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ *почти всюду справедливо равенство* (98).

Перейдем непосредственно к доказательству равенства (125). Согласно следствию 1′ имеем

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} S_1^0\right)_1 = \sup_{\varphi \in S_1^0} \left\| \int_{|t| \le a/n} \varphi(x-t)\, I_2(\psi_2; n; t)_1\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \varphi(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)}\, dt \right\|_1 + O(1)\, \overline{\psi}(n). \tag{130}$$

Отсюда, используя оценку (129) и равенства (102) и (103), находим

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} S_1^0\right)_1 \le \int_{|t| \le a/n} |I_2(\psi_2; n; t)|\, dt +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + O(1)\, \overline{\psi}(n) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\, \overline{\psi}(n) \ln n + O(1)\, \overline{\psi}(n). \tag{131}$$

Покажем теперь, что

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} S_1^0\right)_1 \ge \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\, \overline{\psi}(n) \ln n + O(1)\, \overline{\psi}(n). \tag{132}$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением, доказанным С. М. Никольским [4] (см. также [3, с. 149, 150]).

Лемма 10. *Пусть* $K(t)$ — *функция, интегрируемая по Лебегу на промежутке* $[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$\sup_{\varphi \in S_1^0} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\, K(t)\, dt \right\|_1 \ge \frac{1}{2} \max_{|h| \le \pi} \| K^*(x) - K^*(x+h) \|_1, \tag{133}$$

где $K^*(\cdot)$ — 2π-*периодическое продолжение функции* $K(\cdot)$.

С целью применения этой леммы положим

$$K(t) = \begin{cases} I_2(\psi_2; n; t), & |t| \le a/n; \\ \dfrac{\overline{\psi}(n) \sin(nt - \gamma_n)}{\pi\, l_n(t)}, & t \in i_{3,1}; \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \setminus i_{3,1} \cup [-a/n, a/n] \end{cases} \tag{134}$$

и через $K^*(t)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $K(t)$.

Тогда, учитывая (133) и (130), будем иметь

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} S_1^0\right)_1 \;\geq\; \frac{1}{2}\| K^*(x) - K^*(x+\pi/n)\|_1 + O(1)\,\overline{\psi}(n).$$

Отсюда с учетом (102) и (103) непосредственно получаем оценку (132), так как в силу (134)

$$\frac{1}{2}\| K^*(x) - K^*(x+\pi/n)\|_1 \;=\; \| K(\cdot)\|_1 \;=$$

$$= \int\limits_{|t|\leq a/n} |I_2(\psi_2; n; t)|\,dt + \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}} \left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}\right| dt.$$

Объединяя оценки (131) и (132), получаем равенства (126).

Докажем теперь равенство (127). Будем исходить из равенства (97), которое, согласно следствию 1′, в рассматриваемом случае выполняется почти всюду. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_{|t|\leq a/n} I_2(\psi_2; n; t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}\,dt = 0. \tag{135}$$

Поэтому согласно (97)

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}^0\right)_1 \;\leq\; \sup_{\varphi\in H_{\omega_1}^0}\left\| \int\limits_{|t|\leq a/n} \varphi(x-t)\, I_2(\psi_2; n; t)\,dt\right\| +$$

$$+\;\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\, e_k(\omega)_1 + \sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\, e_k(\omega)_1\right) + O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n), \tag{136}$$

где

$$e_x(\omega)_1 \;=\; \sup_{\varphi\in H_{\omega 1}^0}\left\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(x-t)\sin(nt-\gamma_n)\,dt\right\|_1. \tag{137}$$

Принимая во внимание нечетность функции $I_2(\psi_2; n; t)$ и соотношения (84), для каждой функции $\varphi \in H_{\omega_1}^0$ находим

$$\left\|\int\limits_{|t|\leq a/n} \varphi(x-t)\, I_2(\psi_2; n; t)\,dt\right\|_1 \;\leq\; \left|\int\limits_0^{a/n} \omega(2t)\, I_2(\psi_2; n; t)\,dt\right|, \tag{138}$$

$$e_x(\omega)_1 \;\leq\; \int\limits_0^{\pi/2n} \omega(2t)\sin nt\,dt. \tag{139}$$

Поэтому согласно (136) – (139)

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}^0\right)_1 \;\leq\; \left|\int\limits_0^{a/n} \omega(2t)\, I_2(\psi_2; n; t)\,dt\right| +$$

$$+\;\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2n} \omega(2t)\sin nt\,dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\right) + O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n). \tag{140}$$

Покажем теперь, что в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, соотношение (140) обращается в равенство. Для этого вследствие (97) и (140) достаточно показать, что в классе $H^0_{\omega_1}$ найдется функция $f^*(t) = f^*_\omega(t)$, для которой

$$\left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(x-t)\, K(t)\, dt \right\|_1 =$$

$$= \left| \int\limits_0^{a/n} \omega(2t)\, I_2(\psi_2; n; t)\, dt \right| +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin nt\, dt \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} \right) +$$

$$+ O(1)\, \overline{\psi}(n)\, \omega(1/n). \tag{141}$$

Следуя [3, с. 138–141], положим

$$f_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\omega(2t), & |t| \in [0, \pi/2n); \\ -\dfrac{1}{4}\omega(2|t|), & t \in (-\pi/2n, 0]; \\ 0, & \pi/2n \le |t| \le \pi, \end{cases} \tag{142}$$

и через $f_2(t)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $f_1(t)$. Искомая функция $f^*(t)$ имеет вид $f^*(t) = f_2'(t) - \omega(\pi/n)/2$. В [3, с. 139] показано, что $f^* \in H^0_{\omega_1}$. Остается доказать, что для нее выполняется равенство (141). Положим

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(x-t)\, K(t)\, dt.$$

На промежутках $(-\pi, t_{k_3} - \pi/2n)$, $(x_{k_2}, -(a/n + \pi/2n))$, $(a/n + \pi/2n, t_{k_0} - - \pi/2n)$ и (x_{k_1}, π) функция $\Phi(x)$ тождественно равна нулю; на промежутках $(t_{k_3} - \pi/2n, x_{k_3})$, (x_{k_3}, x_{k_3+1}), ... , (x_{k_2}, x_{k_2+1}), а также на промежутках $(t_{k_0} - - \pi/2n, x_{k_0})$, (x_{k_0}, x_{k_0+1}), ... , (x_{k_1-1}, x_{k_1}) функция $\Phi(x)$ сохраняет знак, меняя его поочередно; на промежутках $(-(a/n + \pi/2n), 0)$ и $(0, a/n + \pi/2n)$ справедливо равенство $\operatorname{sign}\Phi(x) = \operatorname{sign} K(x)$. Учитывая эту информацию, аналогично тому, как этоделалось в [3, с. 140, 141], получаем соотношение (141).

Итак, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, соотношение (140) есть равенство. Если же $\omega(t)$ — произвольный (не обязательно выпуклый) модуль непрерывности, то построение функции $f^*(\cdot)$, требующее дифференцирования, вообще говоря, незаконно. Однако и в этом случае (см. [3, с. 141]) удается показать, что соотношение (140) будет равенством, если его правую часть умножить на некоторую величину θ_{ω_1} из интервала $[1/2, 1]$. Принимая это во внимание и учитывая равенство (111), приходим к соотношению (127″), что и завершает доказательство теоремы 4.

Доказательство теоремы **5.** Согласно следствию 1′ для каждой функции $f \in L^{\overline{\psi}} L^0$ при любом $n \in \mathcal{N}$, для любого полинома $t_{n-1}(\cdot)$ из $\mathcal{T}_{n-1}$ почти всюду выполняется равенство (98). Поэтому имеем

$$\|\rho_n(f; x)\|_1 \le \left(\int\limits_{|t| \le a/n} |I_2(\psi_2; n; t)|\, dt + \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} \right| dt + \right.$$

$$\left. + \, O(1)\, \overline{\psi}(n) \right) \left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_1.$$

Чтобы получить оценку (128), остается воспользоваться равенствами (102) и (103) и выбрать в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ в пространстве L.

1. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
2. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
5. *Демченко А. Г.* Приближение в среднем функций из классов $W^r H_{|\omega|_L}$ // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 2. – С. 267 – 276.
6. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Там же. – 1989. – **41**, № 5. – С. 449 – 510.

Получено 05.02.97