УДК 517.946

Б. П. Ткач (Нац. аграрн. ун-т, Киев)

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИТОРОИДАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

The conditional stability of quasitoroidal manifolds for a system of partial differential equations is investigated.

Досліджується умовна стійкість квазітороїдних многовидів системи рівнянь з частинними похідними.

Глубокие исследования инвариантных многообразий систем обыкновенных дифференциальных уравнений проводились многими математиками (см., например, [1 – 5]).

Для систем уравнений с частными производными гиперболического типа квазитороидальные многообразия изучались в работе [5]. Для систем уравнений параболического типа инвариантные многообразия рассматривались в работах [6, 7].

В настоящей статье для систем уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = A(x,\varphi)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \varepsilon B(x,\varphi,u)\,u(t,x),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{1}$$

где $u \in E_n$, $\varphi \in E_m$, исследуется условная устойчивость квазитороидального многообразия $u = 0$.

Предполагаем, что матрицы $A(x,\varphi)$, $B(x,\varphi,u)$ и вектор-функция $a(\varphi)$ периодичны по φ с периодом 2π и непрерывны соответственно в областях D, D_1 и D_2:

$$D = \{(x,\varphi) \mid 0 \le x \le a,\ \|\varphi\| \le d_1\},$$

$$D_1 = \{(x,\varphi,u) \mid 0 \le x \le a,\ \|\varphi\| \le d_1,\ \|u\| \le d_2\},$$

$$D_2 = \{\varphi \mid \|\varphi\| \le d_1\}.$$

Пусть далее матрица $A(x,\varphi)$ имеет блочно-диагональный вид $A = \operatorname{diag}\{A^+(x,\varphi), A^-(x,\varphi)\}$, где $A^+(x,\varphi)$ и $A^-(x,\varphi)$ — r- и $(n-r)$-мерные квадратные матрицы, для которых

$$\max_{0 \le x \le a,\ \|\eta\|=1} \langle A^+(x,\varphi)\eta, \eta\rangle \le -\alpha,$$
$$\min_{0 \le x \le a,\ \|\eta\|=1} \langle A^-(x,\varphi)\eta, \eta)\rangle \ge \alpha \qquad (\alpha > 0). \tag{2}$$

Кроме того, предполагаем, что существуют непрерывные частные производные вектор-функции $a(\varphi)$, выполняются неравенство

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi}\right\|, \|A(x,\varphi)\|, \|B(x,\varphi,u)\|\right\} \le K \tag{3}$$

и условия Липшица

$$\left\| \frac{\partial a(\overline{\varphi})}{\partial \varphi} - \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leq L\, \|\overline{\varphi} - \varphi\|,$$

$$\|A(x, \overline{\varphi}) - A(x, \varphi)\| \leq L\, \|\overline{\varphi} - \varphi\|, \tag{4}$$

$$\|B(x, \overline{\varphi}, \overline{u}) - B(x, \varphi, u)\| \leq L\, \{\|\overline{\varphi} - \varphi\| + \|\overline{u} - u\|\},$$

где L – положительная постоянная.

Пусть $\psi = \psi_t(\psi_0)$ является решением системы уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi),$$

определяющей поток квазитраекторий на квазитороидальном многообразии.

С помощью замены переменных $\varphi = \psi_t + \varepsilon\theta$, $u = \varepsilon h$ систему уравнений (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t\, \partial x} = P^0(x, \psi_t, \theta, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon P^1(x, \psi_t, \theta, h, \varepsilon) h,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q^0(\psi_t, \theta, \varepsilon)\theta. \tag{5}$$

Здесь

$$P^0(x, \psi_t, \theta, \varepsilon) = A(x, \psi_t + \varepsilon\theta),$$

$$P^1(x, \psi_t, \theta, h, \varepsilon) = B(x, \psi_t + \varepsilon\theta, \varepsilon h), \tag{6}$$

$$Q^0(\psi_t, \theta, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial a(\psi_t + \varepsilon\theta\xi)}{\partial(\psi_t + \varepsilon\theta\xi)}\, d\xi.$$

Ввиду (6) легко видеть, что матрицы $P^0(x, \psi_t, \theta, \varepsilon)$ и $Q^0(\psi_t, \theta, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям Липшица по аргументу θ, а матрица $P^1(x, \psi_t, \theta, h, \varepsilon)$ — по аргументам θ и h. Будем предполагать также, что выполняется неравенство

$$\beta(\theta, \theta) \leq \langle Q^0(\psi, 0, 0)\theta, \theta \rangle \leq -\beta(\theta, \theta), \tag{7}$$

причем постоянная $\beta \leq 0$.

Обозначая первые r координат h через y, а остальные $n - r$ координат через z и учитывая блочно-диагональную структуру матрицы $A(x, \varphi)$, систему (5) перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial x} = P^+(x, \psi_t, \theta, \varepsilon) \frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon [F^1(x, \psi_t, \theta, y, z, \varepsilon) y + F^2(x, \psi_t, \theta, y, z, \varepsilon) z],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial x} = P^-(x, \psi_t, \theta, \varepsilon) \frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ \varepsilon [R^1(x, \psi_t, \theta, y, z, \varepsilon) y + R^2(x, \psi_t, \theta, y, z, \varepsilon) z], \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q^0(\psi_t, \theta, \varepsilon)\theta.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть система уравнений* (1) *удовлетворяет условиям:*

1) *матрицы* $A(x, \varphi)$, $B(x, \varphi, u)$ *и вектор-функция* $a(\varphi)$ *непрерывны в областях* D, D_1, D_2, *периодичны по* φ *с периодом* 2π, *матрица* $A(x, \varphi)$ *имеет диагональный вид и выполнены неравенства* (2);

2) *вектор-функция* $a(\varphi)$ *имеет непрерывные частные производные, выполнены неравенства* (3) *и условия Липшица* (4), *а матрица* Q^0, *определяемая соотношением* (6), *удовлетворяет неравенству* (7).

Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ *в* $\nu(\varepsilon)$*-окрестности* $(\nu(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to \to 0)$ *квазитороидального многообразия* $u = 0$ *имеются такие множества* M^+ (M^-) *начальных значений* $\{u(0, x), \theta_0\} = \{y(0, x), z(0, x), \theta_0\}$

$$M^+: \quad \left\{ y(0, x) = \int_0^x c(x)\,dx,\ \ z(0, x) = z^+(c(x)),\ \ \theta = \theta_0 \right\},$$

$$M^-: \quad \left\{ y(0, x) = y^-(c(x)),\ \ z(0, x) = \int_0^x c(x)\,dx,\ \ \theta = \theta_0 \right\},$$

где $c(x)$ *— заданная ограниченная непрерывная функция при* $x \in [0, a]$, *что квазитраектории, для которых* $\{u(0, x), \theta_0\} \in M^+$ (M^-), *удовлетворяющие граничному условию* $u(t, 0) = 0$, *экспоненциально притягиваются к квазитраекториям на квазитороидальном многообразии при* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$.

Доказательство. Построим экспоненциально убывающие решения системы уравнений (8) методом последовательных аппроксимаций.

Из системы уравнений (8) для нахождения последовательных приближений получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t\,\partial x} &= P_{n-1}^{+} \frac{\partial y_n}{\partial x} + \varepsilon\left(F_{n-1}^{1} y_{n-1} + F_{n-1}^{2} z_{n-1}\right), \\ \frac{\partial^2 z_n}{\partial t\,\partial x} &= P_{n-1}^{-} \frac{\partial z_n}{\partial x} + \varepsilon\left(R_{n-1}^{1} y_{n-1} + R_{n-1}^{2} z_{n-1}\right), \\ \frac{d\theta_n}{dt} &= Q_{n-1}^{0} \theta_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь, полагая $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, используем в качестве первого приближения следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \Omega_0^{t,x}(P_0^{+})\,c(x),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0, \qquad \theta_1 = \Omega_0^{t}(Q_0^{0})\,\theta_0,$$

где $\Omega_0^{t,x}(P_0^{+})$ — матрицант системы уравнений [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) = P_0^{+} \frac{\partial y_1}{\partial x},$$

а $\Omega_0^{t}(Q_0^{0})$ — матрицант системы уравнений

$$\frac{d\theta_1}{dt} = Q_0^{0}\,\theta_1.$$

Поэтому с учетом неравенства (7) находим

$$\min_{\|\theta\|=1} \left\langle Q_{n-1}^0 \theta, \theta \right\rangle \geq \beta - \delta_1 .$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|\Omega_s^t (Q_{n-1}^0)\theta\| \leq \|\theta\| e^{(\beta+\delta_1)(t-s)}, \tag{14}$$

где $0 \leq s \leq t$, θ — произвольное.

Оценим решения, определяемые представлениями (11) для $n = k$. С помощью неравенств (13) имеем

$$\|y_k(t,x)\| \leq a e^{-\alpha t} \|c(x)\|_0 +$$

$$+ \varepsilon a \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} 2Ka e^{-s(\alpha-\delta)} \|c(x)\|_0 ds \leq$$

$$\leq a e^{-(\alpha-\delta)t} \left[\frac{2Ka\varepsilon}{\delta} + e^{-\delta t} \left(1 - \frac{2\varepsilon Ka}{\delta} \right) \right] \|c(x)\|_0 .$$

Поэтому получаем

$$\|y_k(t,x)\| \leq a e^{-(\alpha-\delta)t} \|c(x)\|_0, \tag{15}$$

если выбрать ε, удовлетворяющим неравенству

$$\varepsilon < \frac{\delta}{2Ka} . \tag{16}$$

Далее имеем

$$\|z_k(t,x)\| \leq a\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{-\alpha(t-s)} 2Ka e^{-(\alpha-\delta)s} \|c(x)\|_0 ds \leq$$

$$\leq a \frac{2K\varepsilon a}{2\alpha - \delta} e^{-(\alpha-\delta)t} \|c(x)\|_0 . \tag{17}$$

Из неравенства (17) следует оценка

$$\|z_k(t,x)\| \leq a e^{-(\alpha-\delta)t} \|c(x)\|_0, \tag{18}$$

где δ удовлетворяет неравенству $\delta < \alpha$, а ε — неравенству (16).

Из неравенства (14) видно, что

$$\|\theta_k(t)\| \leq e^{(\beta+\delta_1)t} \|\theta_0\|. \tag{19}$$

Следовательно, из неравенств (15), (18) и (19) вытекает, что соотношения (11) определяют экспоненциально убывающие решения системы (9) при $t \to \to +\infty$.

Из интегрального представления решений (11) при $t = 0$ получаем приближения для начальных функций

$$y_n(0,x) = \int_0^x c(x) dx ,$$

$$z_n(0,x) = -\varepsilon \int\limits_0^x \int\limits_0^{+\infty} \Omega_s^{0,x}(P_{n-1}^-)(R_{n-1}^1 y_{n-1} + R_{n-1}^2 z_{n-1})\, ds\, dx, \tag{20}$$

$$\theta_n\big|_{t=0} = \theta_0.$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательных аппроксимаций оцениваем разности

$$y_n - y_{n-1}, \quad z_n - z_{n-1}, \quad \theta_n - \theta_{n-1}.$$

Обозначим

$$q_n(y) = \frac{\partial y_n}{\partial x} - \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}, \quad q_n(z) = \frac{\partial z_n}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$
$$q_n(\theta) = \theta_n - \theta_{n-1}, \quad Q_n(*) = e^{(\alpha-\delta)t} q_n(*). \tag{21}$$

С помощью системы (9) для $Q_{n+1}(y)$ получаем интегральное представление

$$Q_{n+1}(y) = \int\limits_0^t \Omega_s^{t,x}(P_n^+ + (\alpha-\delta)I_r)(P_n^+ - P_{n-1}^+)\, e^{(\alpha-\delta)s} \frac{\partial y_n}{\partial x}\, ds \; +$$
$$+ \; \varepsilon \int\limits_0^t \Omega_s^{t,x}(P_n^+ + (\alpha-\delta)I_r)\, e^{(\alpha-\delta)s}\left[(F_n^1 - F_{n-1}^1)\, y_{n-1} + (F_n^2 - F_{n-1}^2)\, z_{n-1}\right] ds \; +$$
$$+ \; \varepsilon \int\limits_0^t \Omega_s^{t,x}(P_n^+ + (\alpha-\delta)I_r)\, e^{(\alpha-\delta)s}\left[(F_n^1(y_n - y_{n-1}) + F_n^2(z_n - z_{n-1})\right] ds. \tag{22}$$

Из (22), учитывая неравенства (12) при любом n, находим оценку

$$\|Q_{n+1}(y)\| \le$$
$$\le \frac{L\|c(x)\|_0}{\delta}\|q_n(\theta)\|_0 + \frac{2\varepsilon L\|c(x)\|_0}{\delta}\left[a\|q_n(y)\|_0 + a\|q_n(z)\|_0 + \|q_n(\theta)\|_0\right] +$$
$$+ \frac{\varepsilon K a}{\delta}\left[\|Q_n(y)\|_0 + \|Q_n(z)\|_0\right]. \tag{23}$$

Для оценки $Q_{n+1}(z)$ рассмотрим разность $\Omega_s^{t,x}(P_n^-)\eta_2 - \Omega_s^{t,x}(P_{n-1}^-)\eta_2$. Легко видеть, что выполняется неравенство

$$\|\Omega_s^{t,x}(P_n^-)\eta_2 - \Omega_s^{t,x}(P_{n-1}^-)\eta_2\| \le L(s-t)e^{\alpha(t-s)}\left[\|q_n(\theta)\|\cdot\|\eta_2\|\right]. \tag{24}$$

Далее запишем интегральное представление разности $\dfrac{\partial z_{n+1}}{\partial x} - \dfrac{\partial z_n}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial z_n}{\partial x} = -\varepsilon \int\limits_t^{+\infty} \left[\Omega_s^{t,x}(P_n^-) - \Omega_s^{t,x}(P_{n-1}^-)\right]\left[R_n^1 y_n + R_n^2 z_n\right] ds \; -$$
$$- \; \varepsilon \int\limits_t^{+\infty} \Omega_s^{t,x}(P_{n-1}^-)\left[(R_n^1 - R_{n-1}^1)\, y_n + (R_n^2 - R_{n-1}^2)\, z_n\right] ds \; -$$

$$- \varepsilon \int_t^{+\infty} \Omega_s^{t,x}(P_{n-1}^-)[R_{n-1}^1(y_n - y_{n-1}) + R_{n-1}^2(z_n - z_{n-1})]\, ds. \tag{25}$$

Тогда, учитывая условие Липшица, неравенства (12) и выбирая $\delta < \alpha$, из интегрального представления (25) находим

$$\| Q_{n+1}(z) \| \le \frac{2\varepsilon L \|c(x)\|_0}{\delta} [\|q_n(\theta)\|_0 + a\|q_n(y)\|_0 + a\|q_n(z)\|_0] +$$

$$+ \frac{\varepsilon K a}{\delta}[\|Q_n(y)\|_0 + \|Q_n(z)\|_0] + \frac{2\varepsilon L K \|c(x)\|_0}{\delta^2}\|q_n(\theta)\|_0. \tag{26}$$

Для оценки $Q_{n+1}(\theta)$ используем интегральное представление для разности $\Omega_s^t(Q_n^0)\eta_2 - \Omega_s^t(Q_{n-1}^0)\eta_2$:

$$[\Omega_s^t(Q_n^0) - \Omega_s^t(Q_{n-1}^0)]\eta_2 = \int_s^t \Omega_\tau^t(Q_n^0)[Q_n^0 - Q_{n-1}^0]\,\Omega_s^\tau(\Omega_{n-1}^0)\eta_2\, d\tau. \tag{27}$$

Тогда имеем

$$\|[\Omega_s^t(Q_n^0) - \Omega_s^t(Q_{n-1}^0)]\eta_2\| \le \delta_1 \|q_n(\theta)\|_0 (t-s)e^{(t-s)(\beta+\delta_1)}\|\eta_2\|. \tag{28}$$

Затем получаем оценку

$$\| Q_{n+1}(\theta) \|_0 \le L_0 \delta_1 \| Q_{n+1}(\theta) \|_0, \tag{29}$$

причем L_0 определено соотношением

$$L_0 = \sup_{t \ge s} (t-s)e^{(\beta+\delta_1)(t-s)}. \tag{30}$$

Используя полученные оценки (23), (26) и (29), находим

$$a\| Q_{n+1}(y) \|_0 + a\| Q_{n+1}(z) \|_0 + \| Q_{n+1}(\theta) \|_0 \le$$

$$\le a\|Q_n(y)\|_0 \left[\frac{4\varepsilon a L \|c(x)\|_0}{\delta} + \frac{2\varepsilon K a}{\delta} \right] +$$

$$+ a\|Q_n(z)\|_0 \left[\frac{4\varepsilon a L \|c(x)\|_0}{\delta} + \frac{2\varepsilon K a}{\delta} \right] +$$

$$+ \|Q_n(\theta)\|_0 \left[\frac{aL\|c(x)\|_0}{\delta} + \frac{4\varepsilon a L\|c(x)\|_0}{\delta} + \varepsilon L L_0 + \frac{2\varepsilon K a L \|c(x)\|_0}{\delta^2} \right]. \tag{31}$$

Положим

$$M(\varepsilon) = \max\left\{ \frac{4\varepsilon a L\|c(x)\|_0}{\delta} + \frac{2\varepsilon K a}{\delta}, \right.$$

$$\left. \frac{aL\|c(x)\|_0}{\delta} + \frac{4\varepsilon a L\|c(x)\|_0}{\delta} + \varepsilon L L_0 + \frac{2\varepsilon K a L\|c(x)\|_0}{\delta^2} \right\}. \tag{32}$$

Тогда получаем

$$a\| Q_{n+1}(y) \|_0 + a\| Q_{n+1}(z) \|_0 + \| Q_{n+1}(\theta) \|_0 \le$$

$$\le M(\varepsilon)[a\| Q_n(y) \|_0 + a\| Q_n(z) \|_0 + \| Q_n(\theta) \|_0]. \tag{33}$$

Поскольку $M(\varepsilon)$ линейно зависит от ε и $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то при достаточно малом ε можно добиться выполнения неравенства $M(\varepsilon) < 1$, что обеспечивает равномерную сходимость последовательных аппроксимаций

$$\{ y_n(t, x), z_n(t, x), \theta_n(t) \}.$$

Предельные функции будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{gathered} \| y_+(t, x) \|, \ \| z_+(t, x) \|_0 \leq a e^{-(\alpha-\delta)t} \| c(x) \|_0, \\ \| \theta_+(t) \|_0 \leq e^{(\beta+\delta_1)t} \| \theta_0 \|, \quad \beta + \delta_1 < 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Легко видеть, что начальные функции будут определены формулами

$$\begin{gathered} y_+(0, x) = \int_0^x c(x)\, dx, \\ z_+(0, x) = -\varepsilon \int_0^x \int_0^{+\infty} \Omega_s^{0,x}(P_+^-)(R_+^1 y_+ + R_+^2 z_+)\, ds\, dx, \\ \theta_+(0) = \theta_0. \end{gathered} \tag{35}$$

Множество M^+ начальных функций определено представлением (35). Множество M^- начальных функций находится при исследовании экспоненциально убывающих при $t \to -\infty$ решений системы (1).

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 214 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1974. – 512 с.
3. *Самойленко А. М.* Об условной устойчивости инвариантных торов динамических систем // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 5. – С. 820–834.
4. *Дворак А. В.* Об условной устойчивости инвариантных торов динамических систем // Там же. – 1976. – **12**, № 8. – С. 1410–1416.
5. *Митропольский Ю. А., Ткач Б. П.* Квазитороидальные многообразия систем уравнений с частными производными с запаздыванием. – Киев, 1992. – 39 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 92.5).
6. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 4. – С. 486–499.
7. *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Диффузионная неустойчивость торов // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, № 4. – С. 1307 – 1309.

Получено 21.03.94