УДК 517.9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ СИСТЕМИ, ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВУ ФАВАРА*

We prove the existence of a linear homogeneous almost periodic system of differential equations which has nontrivial bounded solutions and is such that all the systems from some neighborhood of it have no nontrivial almost periodic solutions.

Доведено існування лінійної однорідної майже періодичної системи диференціальних рівнянь з нетривіальними обмеженими розв'язками такої, що всі системи з деякого її околу не мають нетривіальних майже періодичних розв'язків.

1. Вступ. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з майже періодичними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{C}^n$, $A(t)$ — майже періодична за Бором матрична функція розміру $n \times n$. Припустимо, що система задовольняє умову Фавара: кожний нетривіальний обмежений на осі розв'язок $x(t)$ системи (1) відокремлений від нуля $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| > 0$.

З існування нетривіального обмеженого розв'язку однорідної системи (1) не випливає існування нетривіального майже періодичного розв'язку [1]. У роботі Пальмера [2] наведені деякі достатні умови, при яких система (1), яка має нетривіальні обмежені розв'язки, має і нетривіальні майже періодичні розв'язки.

Вияснимо наступне питання: чи можна малим збуренням коефіцієнтів системи (1) отримати систему, яка має нетривіальні майже періодичні розв'язки ? В даній роботі показано, що відповідь на це питання в загальному випадку негативна і суттєво залежить від топології підрозшарування обмежених розв'язків відповідного системі (1) лінійного розширення.

2. Основні результати. Позначимо через $L(n, \mathbb{C})$ множину n-вимірних матриць з комплексними коефіцієнтами, через $U(n)$ множину n-вимірних унітарних матриць розміру n, I — одинична матриця.

Розглянемо множину $\mathcal{H} = \operatorname{cls}\{A(t+\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ — замикання у рівномірній на осі топології множини зсувів матриці $A(t)$. Це зв'язна компактна множина, на якій можна ввести структуру абелевої групи. Дійсна вісь вкладається в $\mathcal{H}$ як скрізь щільна підмножина.

Система (1) вкладається в лінійне розширення

$$\frac{dx}{dt} = a(\varphi \cdot t)x, \tag{2}$$

де $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \cdot t$ — динамічна система зсувів на $\mathcal{H}$, $(\varphi \cdot t)(s) = \varphi(t+s)$, $s \in \mathbb{R}$, $a\colon \mathcal{H} \to L(n, \mathbb{C})$ — неперервна матричнозначна функція на $\mathcal{H}$, $a(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{H}$. Зауважимо, що елементами компакту $\mathcal{H}$ є майже періодичні функції $\varphi = \varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Якщо $A(t) = \varphi_0 \in \mathcal{H}$, то $a(\varphi_0 \cdot t) = A(t)$ і система (2) при $\varphi = \varphi_0$ співпадає з системою (1).

*Виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві науки України.

Якщо система (2) задовольняє умову Фавара, то за теоремою Сакера – Селла [3] її обмежені розв'язки утворюють підрозшарування в $\mathcal{H} \times \mathbb{C}^n$.

Множина майже періодичних за Бором функцій утворює в рівномірній нормі комутативну $\mathbb{C}^*$-алгебру, яка ізоморфна і ізометрична алгебрі $C(\mathfrak{M})$ всіх неперервних комплексних функцій на компактному хаусдорфовому просторі її максимальних ідеалів $\mathfrak{M}$ [4]. $\mathfrak{M}$ називається боровським компактом. Це зв'язна компактна абелева група, яку можна ототожнити з групою характерів групи дійсних чисел, взятої в дискретній топології. Група $\mathbb{R}$ вкладається відображенням $\alpha(t)$ в $\mathfrak{M}$ як скрізь щільна однопараметрична підгрупа. Через $\alpha(t)$ позначатимемо і образ $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{M}$. Функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ майже періодична за Бором тоді і тільки тоді, коли вона є звуженням з $\mathfrak{M}$ на $\mathbb{R}$ деякої неперервної функції $F\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}^n$ [4].

Теорема 1. *У n-вимірному комплексному просторі існує лінійна майже періодична система* (1), *яка має обмежений відокремлений від нуля розв'язок і така, що всі лінійні майже періодичні системи з деякого її околу (в рівномірній на осі топології матричних функцій коефіцієнтів) не мають нетривіальних майже періодичних розв'язків.*

Доведення. Розглянемо прямий добуток $\mathfrak{M} \times \mathbb{C}^2$ і зобразимо його як суму двох нетривіальних ортогональних розшарувань над $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} \times \mathbb{C}^2 = \eta_1 \oplus \eta_2.$$

В роботі [5] показано, що такі розшарування існують. Вони не мають неперервних ненульових перерізів. Розшаруванням η_i, $i = 1, 2$, відповідають проектори $\hat{P}_1(b)$, $\hat{P}_2(b)$, $\hat{P}_1(b) + \hat{P}_2(b) = I$, $b \in \mathfrak{M}$. Для ортогональних розшарувань проектори ермітові. Проектори

$$P_1(t) = \hat{P}_1(\alpha(t)), \qquad P_2(t) = \hat{P}_2(\alpha(t))$$

— майже періодичні функції t.

Аналогічно [5, 6] за майже періодичними проекторами $P_1(t)$ і $P_2(t)$ будуємо лінійну майже періодичну систему диференціальних рівнянь з двома інваріантними підпросторами, які задаються цими проекторами. Система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (P_1'(t)P_1(t) + P_2'(t)P_2(t))\,x. \tag{3}$$

Для ермітових проекторів $P_1(t)$ і $P_2(t)$ фундаментальна матриця $\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$, системи (3) унітарна. Нехай $u_1(t)$ і $u_2(t)$ — стовпчики матриці $\Phi(t)$, тоді $P_1(t)u_1(t) = u_1(t)$ і $P_2(t)u_2(t) = u_2(t)$.

Як і в роботі [5], для деякого $\lambda > 0$ розглянемо майже періодичну систему

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x, \tag{4}$$

де

$$A_1(t) = (P_1'(t)P_1(t) + P_2'(t)P_2(t) + \lambda P_1(t)).$$

Розв'язки $x_1(t) = e^{\lambda t}u_1(t)$ і $x_2(t) = u_2(t)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (4). Системі (4) відповідає розширення

$$\frac{dx}{dt} = a_1(b \cdot t)x, \tag{5}$$

де

$$a_1(b) = \left(\hat{P}_1'(b)\hat{P}_1(b) + \hat{P}_2'(b)\hat{P}_2(b) + \lambda\hat{P}_1(b)\right),$$

$$\hat{P}_i'(b) = \frac{d}{dt}\hat{P}_i(b\cdot t)\bigg|_{t=0}, \quad b\in\mathfrak{M}.$$

Функції $u_1(t)$ і $u_2(t)$ обмежені, тому спектр Сакера – Селла системи (5) складається з двох точок $\{0, \lambda\}$. Їм відповідають спектральні розшарування η_1 і η_2. Вони нетривіальні за побудовою.

Розглянемо тепер мале збурення в рівномірній на осі топології системи рівнянь (4):

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x. \tag{6}$$

Системі (6) відповідає розширення

$$\frac{dx}{dt} = c(b\cdot t)x, \quad b\in\mathfrak{M}. \tag{7}$$

За теоремою Сакера – Селла [7] для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що система (6) з

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\| C(t) - A_1(t)\right\| < \delta$$

має такі властивості: спектр системи (7) складається з двох точок $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $|\lambda_1 - \lambda| < \varepsilon$, $|\lambda_2| < \varepsilon$, а система має спектральні розшарування $\hat{\eta}_1$ і $\hat{\eta}_2$ в $\mathfrak{M}\times\times\mathbb{C}^2$ такі, що кути між $\hat{\eta}_i$ і η_i, $i = 1, 2$, менші ε і існують ізоморфізми розшарувань $g_i\colon \hat{\eta}_i \to \eta_i$, $i = 1, 2$. Розшарування $\hat{\eta}_1$ і $\hat{\eta}_2$ нетривіальні.

Припустимо, що система (6) має майже періодичний розв'язок $x = x_0(t)$. Тоді при кожному $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $x_0(t)$ належить $\hat{\eta}_2$. Розглянемо замикання траєкторії $x_0(t)$ в $\mathfrak{M}\times\mathbb{C}^2$. Це є деяка неперервна ненульова функція $d\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$. Ненульова тому, що виконується умова Фавара. $d(b)\in\hat{\eta}_2$ при кожному $b\in\mathfrak{M}$, тобто $d(b)$ є ненульовим перерізом розшарування $\hat{\eta}_2$, а саме розшарування $\hat{\eta}_2$ тривіальне. Отримали суперечність. Всі системи з деякого околу системи (6) не мають майже періодичних розв'язків. Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо розшарування $\mathcal{B}$ обмежених розв'язків системи* (1) *тривіальне, то в кожному околі (в рівномірній на осі топології) системи* (1) *існує система з нетривіальними майже періодичними розв'язками.*

Доведення. Нехай розшарування обмежених розв'язків $\mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^n\times\mathcal{H}$ має неперервні лінійно незалежні перерізи $\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_r(\varphi)$. В комплексному векторному розшаруванні вектори $\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_r(\varphi)$ можна доповнити деякими векторами $\xi_{r+1}(\varphi), \ldots, \xi_n(\varphi)$ до базису в $\mathbb{C}^n\times\mathcal{H}$ [5]. Матрицю $U(\varphi)$, складену з векторів-стовпців $\xi_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$, за допомогою ортогоналізації Шмідта робимо унітарною при всіх значеннях $\varphi\in\mathcal{H}$. Використовуючи теореми апроксимації для векторних розшарувань, вектори $\xi_i(\varphi)$ можна вибрати такими, що $\xi_i(\varphi\cdot t)$ мають неперервні похідні по t.

В системі (2) зробимо заміну змінних $x = U(\varphi)y$. Оскільки розшарування $\mathcal{B}$ інваріантне, система відносно y має трикутний вигляд

$$\frac{dy}{dt} = B(\varphi \cdot t)y, \qquad B(\varphi \cdot t) = \begin{pmatrix} B_1(\varphi \cdot t) & B_{12}(\varphi \cdot t) \\ 0 & B_2(\varphi \cdot t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де матриця B_1 має розмірність $r \times r$, а матриця B_2 — розмірність $(n-r) \times \times (n-r)$. Враховуючи щільність квазіперіодичних функцій у множині майже періодичних функцій, будемо вважати компакт $\mathcal{H}$ $(m+1)$-вимірним тором $\mathbb{T}_{m+1} = \mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{Z}^{m+1}$. Потік на торі має вигляд $\varphi \cdot t = \omega t + \varphi$, де $\omega = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_{m+1})$ — вектор з раціонально незалежними координатами. Не обмежуючи загальності, вважаємо $\omega_1 = 1$. За побудовою всі розв'язки системи $dy/dt = = B_1(\varphi \cdot t)y$ обмежені, тому існує заміна змінних, яка зводить систему до системи з кососпряженою матрицею [2].

Отже, теорему достатньо довести для квазіперіодичної системи (1), якій відповідає трикутне лінійне розширення (8) з кососпряженою матрицею $B_1(\varphi)$: $B_1(\varphi) + B_1^*(\varphi) = 0$. Якщо $\varphi = \varphi_0 = (0, \ldots, 0)$, то $B(\varphi_0 \cdot t) = A(t)$.

Система (8) має фундаментальну матрицю вигляду

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t, \varphi) & \Phi_{12}(t, \varphi) \\ 0 & \Phi_2(t, \varphi) \end{pmatrix} \tag{9}$$

з унітарною при всіх t, φ матрицею $\Phi_1(t, \varphi)$. Зобразимо тор $\mathbb{T}_{m+1}$ як добуток кола $\mathbb{T}_1$ і m-вимірного тору $\mathbb{T}_m$. Тоді $\varphi = (\xi, \psi)$, $\xi \in \mathbb{T}_1$, $\psi \in \mathbb{T}_m$ і $\Phi(t, \varphi) = \Phi(t, \xi, \psi)$. Матриця $\Phi_1(t, 0, \psi)$ задає відображення $\mathbb{T}_m \to U(r)$, яке гомотопне тотожному в множині унітарних матриць $U(r)$.

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Аналогічно [8] доводимо, що існує натуральне число N та неперервно диференційовна функція $P(t, \psi)\colon [0, N] \times \mathbb{T}_m \to U(r)$ така, що $P(0, \psi) = I$, $P(N, \psi) = \Phi_1^*(N, 0, \psi)$ і

$$\sup \left\| \frac{\partial P(t, \psi)}{\partial t} P^*(t, \psi) \right\| \le \varepsilon, \tag{10}$$

$$\frac{\partial P(t, \psi)}{\partial t} = 0 \ \text{ при } \ t = 0, \ t = N. \tag{11}$$

Функція $\Psi_1(t, \psi) = \Phi_1(t, 0, \psi)N(t, \psi)$ визначена для $(t, \psi) \in [0, N] \times \mathbb{T}_m$ і задовольняє умову $\Psi_1(0, \psi) = \Psi_1(N, \psi) = I$, $\psi \in \mathbb{T}_m$.

Розглянемо матричну функцію

$$\Psi(t, \psi) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t, \psi) & \Psi_{12}(t, \psi) \\ 0 & \Psi_2(t, \psi) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $\Psi_1(t, \psi) = \Phi_1(t, 0, \psi)P(t, \psi)$, $\Psi_2(t, \psi) = \Phi_2(t, 0, \psi)$. Функція $\Psi(t, \psi)$ неперервно диференційовна по t і неперервна по ψ при $t \in [0, N]$, $\psi \in \mathbb{T}_m$. Підберемо функцію $\Psi_{12}(t, \psi)$ так, щоб функція

$$C(t, \psi \cdot t) = \frac{\partial \Psi(t, \psi)}{\partial t} \Psi^{-1}(t, \psi) = \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_1 \Psi_1^{-1} & \dot{\Psi}_1 \Psi_1^{-1} \Psi_{12} \Psi_2^{-1} + \dot{\Psi}_{12} \Psi_2^{-1} \\ 0 & \dot{\Psi}_2 \Psi_2^{-1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

при $t \in [0, N]$, $\psi \in \mathbb{T}_m$ мала вигляд

$$C(t, \psi \cdot t) = \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_1(t, \psi \cdot t) \Psi_1^{-1}(t, \psi \cdot t) & B_{12}(t, \psi \cdot t) \\ 0 & B_2(t, \psi \cdot t) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Тут скрізь крапкою над символом позначена частинна похідна за t, а $\psi \cdot t$ — це звуження на $\mathbb{T}_m$ потоку $\varphi \cdot t$ на торі $\mathbb{T}_{m+1}$.

З (13) і (14) для визначення $\Psi_{12}(t, \psi)$ одержуємо рівняння

$$\dot{\Psi}_{12}(t, \psi) + \dot{\Psi}_1(t, \psi)\Psi_1^{-1}(t, \psi)\Psi_{12}(t, \psi) = B_2(t, \psi \cdot t)\Psi_2(t, \psi). \tag{15}$$

Лінійне відносно $\Psi_{12}(t, \psi)$ рівняння (15) завжди має розв'язок з початковою умовою $\Psi_{12}(0, \psi) = \Psi_{12}(0, 0, \psi)$. З періодичності матриці $B(\varphi)$ та умови (11) випливає $C(0, \psi) = C(N, \psi)$. Продовжимо періодично функцію $C(t, \psi)$: $C(t, \psi) = C(t + N, \psi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{T}_m$. Тоді функція $C(t, \psi \cdot t)$ майже періодична по t. З нерівності (10) випливає оцінка $\sup\limits_{t \in \mathrm{R}} \| C(t, \psi \cdot t) - B(t, \psi \cdot t) \| \leq \varepsilon$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = C(t, \psi \cdot t)y. \tag{16}$$

Система (16) при $t \in [0, N]$ має фундаментальну систему розв'язків (12) з $\Psi_1(t, \psi) = \Phi_1(t, 0, \psi)P(t, \psi)$. При інших значеннях t функція $\Psi_1(t, \psi)$ визначається з умови коциклу $\Psi_1(t + N, \psi) = \Psi_1(t, \psi \cdot N)$ (зауважимо, що $\Psi_1(N, \psi) = I$). Аналогічно [8] показуємо, що $\Psi_1(t, \psi)$ майже періодична за t.

Отже, при $\psi = (0, \ldots, 0)$ лінійна майже періодична система (16) знаходиться в ε-околі системи (1) і має нетривіальні майже періодичні розв'язки. Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 1 залишається справедливою для лінійних майже періодичних систем у дійсному просторі $x \in \mathbb{R}^n$. У просторі $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$ існують лінійно незалежні перерізи, які не можна доповнити до базису [9, 10]. Тому в теоремі 2 у дійсному випадку необхідно додатково вимагати доповнюваність перерізів $\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_r(\varphi)$ до базису в $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$.

1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Palmer K. J.* On bounded solutions of almost periodic linear differential systems // J. Math. Ann. and Appl. – 1984. – **103,** № 1. – P. 16–25.
3. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. III // J. Different. Equat. – 1976. – **22,** № 4. – P. – 479–522.
4. *Loomis L. H.* An introduction to abstract harmonic analysis. – New York: Nostrand, 1953. – 190 p.
5. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В.* О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 54–61.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Sacker R. J., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat. – 1978. – **27,** № 3. – P. 320–358.
8. *Tkachenko V. I.* On linear almost periodic systems with bounded solutions // Bull. Austral. Math. Soc. – 1997. – **55.** – P. 177–184.
9. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения систем линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5–26.
10. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 242 с.

Одержано 13.10.97