УДК 517.9: 519.46

$\boxed{\text{В. І. Фущич}}$, **В. І. Лагно** (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ ГРУП ГАЛІЛЕЯ В ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ-ЧАСІ

We study the Galilei groups represented as groups of the Lie transformations in the space of two independent and one dependent variables. We classify the representations of groups $AG_1(1,1)$, $AG_2(1,1)$, $AG_3(1,1)$, $A\tilde{G}_1(1,1)$, $A\tilde{G}_2(1,1)$, and $A\tilde{G}_3(1,1)$ in the class of Lie vector fields.

Досліджуються зображення груп Галілея як груп перетворень Лі у просторі двох незалежних та однієї залежної змінних. Проведена класифікація зображень груп $AG_1(1,1)$, $AG_2(1,1)$, $AG_3(1,1)$, $A\tilde{G}_1(1,1)$, $A\tilde{G}_2(1,1)$ та $A\tilde{G}_3(1,1)$ у класі векторних полів Лі.

У сучасному теоретико-груповому аналізі диференціальних рівнянь з частинними похідними актуальною є задача опису найбільш загального вигляду рівнянь, що допускають дану групу перетворень Лі [1, 2]. Серед таких груп центральне місце посідають групи Пуанкаре та Галілея, які є групами симетрії ряду фундаментальних рівнянь відповідно релятивістської та нерелятивістської фізики [3 – 5]. Зокрема, широкі класи рівнянь еволюційного типу, які допускають групу Галілея, було отримано в роботах [6 – 8]. Але питання про побудову всіх таких рівнянь залишається відкритим.

У зв'язку з цим виникає проблема опису можливих зображень цих груп у класі векторних полів Лі. Відзначимо, що деякі класи зображень груп Пуанкаре та Галілея для випадку однієї залежної функції було отримано в роботах [9 – 12], розширених груп Галілея в двовимірному просторі-часі для двох залежних функцій — у роботі [13].

У даній статті ми розв'язуємо проблему опису всіх можливих зображень груп Галілея в двовимірному просторі-часі для випадку однієї залежної функції.

Відзначимо, що існування розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, на яке ми спираємося під час доведення тверджень, випливає з загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними [14], в рамках припущень щодо гладкості функцій, які входять у такі рівняння.

1. Говорячи про групу Галілея в двовимірному просторі-часі, ми маємо на увазі локальну групу перетворень у просторі $V = R^2 \otimes U$, де $R^2 = \langle t, x\rangle$ — простір двох незалежних дійсних змінних, а $U = \langle u\rangle$ — простір дійсних скалярних функцій $u = u(t, x)$. Як відомо [1 – 3], векторні поля Лі, що генерують деяку групу Лі G, складають базис алгебри Лі AG цієї групи. Тому задача вивчення зображень даної групи G у класі векторних полів Лі еквівалентна вивченню зображень алгебри Лі AG у класі диференціальних операторів першого порядку, які в нашому випадку мають вигляд

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \tag{1}$$

де τ, ξ, η — деякі дійсні гладкі функції у просторі V, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u}$.

Нехай $AG = \langle X_1, X_2, \ldots, X_N\rangle$ — алгебра Лі, базисні генератори якої задовольняють комутаційні співвідношення

$$[X_k, X_m] = C_{km}^n X_n, \tag{2}$$

де C^n_{km} — дійсні сталі величини, що називаються структурними константами і визначають саму алгебру AG, $k, m, n = 1, 2, \dots, N$.

Означення. *Оператори* X_i, $i = 1, 2, \dots, N$, *вигляду* (1) *реалізують у просторі* V *зображення векторними полями Лі алгебри Лі* AG, *якщо вони*

1) *лінійно незалежні*;

2) *задовольняють комутаційні співвідношення* (2).

Отже, проблема опису всіх зображень даної алгебри Лі AG зводиться до розв'язання співвідношень (2) у класі векторних полів Лі, що в загальному випадку викликає істотні труднощі. З іншого боку, комутаційні співвідношення (2) не змінюються при довільній взаємно однозначній заміні змінних

$$t_1 = h(t, x, u), \qquad x_1 = g(t, x, u), \qquad u_1 = f(t, x, u), \tag{3}$$

де h, g, f — гладкі у просторі V функції. Звідси випливає, що на множині зображень векторних полів Лі алгебри AG можна ввести таке співвідношення: два зображення $\langle X_1, X_2, \dots, X_N\rangle$, $\langle X'_1, X'_2, \dots, X'_N\rangle$, які одночасно визначені у просторі V, будуть еквівалентними, якщо вони трансформуються одне в інше в результаті виконання у просторі V деякого перетворення (3). Таким чином, перетворення (3) утворюють у просторі V групу (назвемо її групою дифеоморфізмів), яке задає природне співвідношення еквівалентності на множині всіх можливих у просторі V зображень алгебри AG. Ця група розбиває таку множину на класи $A_1, A_2, \dots, A_s$ еквівалентних зображень. Тому для опису всіх можливих зображень досить побудувати по одному представнику від кожного класу еквівалентності A_j, $j = 1, 2, \dots, s$. Саме використання групи дифеоморфізмів робить задачу опису зображень векторними полями Лі групи Лі конструктивною.

У подальшому розгляді зображень ми використовуємо наступну класифікацію алгебр Галілея (див., наприклад, [15]).

Класичною алгеброю Галілея називається алгебра $AG_1(1, 1) = \langle T, P, G\rangle$, базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення

$$[T, P] = 0, \qquad [T, G] = -P, \tag{4}$$

$$[P, G] = 0. \tag{5}$$

Спеціальною алгеброю Галілея називається алгебра $AG_2(1, 1) = AG_1(1, 1) \supset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (4), (5) та співвідношення

$$[D, P] = -P, \qquad [D, G] = G, \qquad [D, T] = -2T. \tag{6}$$

Повною алгеброю Галілея називається алгебра

$$AG_3(1, 1) = \langle T, P, G, D, S\rangle,$$

базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (4) – (6) та співвідношення

$$[S, G] = 0, \qquad [S, P] = G, \qquad [T, S] = D, \qquad [D, S] = 2S. \tag{7}$$

Нехай M — оператор, що задовольняє такі комутаційні співвідношення:

$$[M, T] = [M, P] = [M, G] = [M, D] = [M, S] = 0, \tag{8}$$

$$[G, P] = M. \tag{9}$$

Алгебри

$$A\tilde{G}_1(1,1) = \langle T, P, M, G\rangle,$$

$$A\tilde{G}_2(1,1) = \langle T, P, M, G, D\rangle,$$

$$A\tilde{G}_3(1,1) = \langle T, P, M, G, D, S\rangle,$$

базисні оператори яких задовольняють комутаційні співвідношення (4), (6) – (9), називаються *розширеною класичною* алгеброю Галілея, *розширеною спеціальною* алгеброю Галілея та *розширеною повною* алгеброю Галілея (алгеброю Шрьодінгера) відповідно.

2. Спочатку розглянемо класифікацію зображень класичної, спеціальної та повної алгебр Галілея. Оскільки спеціальна алгебра Галілея отримується з класичної за допомогою доповнення останньої оператором D, а повна алгебра Галілея — доповненням спеціальної оператором S, то розгляд розпочинаємо з алгебри $AG_1(1,1) = \langle T, P\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle G\rangle$, яка містить комутативний ідеал $I = \langle T, P\rangle$.

Лема 1. *Нехай* T, P *— лінійно незалежні оператори вигляду* (1). *Існують перетворення* (3), *які зводять ці оператори до однієї з форм*:

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \tag{10}$$

$$T = \partial_t, \quad T = -x\partial_t. \tag{11}$$

Доведення. Згідно з теоремою про подібність векторних полів (див., наприклад, розділ 1, § 3 [1]), ми завжди можемо покласти $T = \partial_t$. Оскільки оператори T, P утворюють комутативний ідеал, то оператор P має такий найбільш загальний вигляд:

$$P = \tau(x,u)\partial_t + \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u.$$

Введемо в розгляд матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & \xi & \eta \end{pmatrix},$$

яка складена з коефіцієнтів при похідних в операторах T, P. Очевидно, що можливі лише два випадки: $\operatorname{rank} A = 2$ або $\operatorname{rank} A = 1$.

Нехай $\operatorname{rank} A = 2$. Тоді завжди можемо вважати, що в A $\xi \neq 0$. Справді, якщо це не так, тобто $\xi = 0$, $\eta \neq 0$, застосувавши заміну змінних за правилом

$$t_1 = t, \quad x_1 = u, \quad u_1 = x \tag{12}$$

та повернувшись до початкових позначень, одержимо шуканий результат. Заміна змінних

$$t_1 = t + h(x,u), \quad x_1 = g(x,u), \quad u_1 = f(x,u) \tag{13}$$

залишає вигляд оператора T інваріантним: $T \to \partial_{t_1}$. Вважаючи в (13) функції $h(x,u)$, $g(x,u)$, $f(x,u)$ розв'язками системи

$$\xi h_x + \eta h_u + \tau = 0, \quad \xi g_x + \eta g_u = -1, \quad \xi f_x + \eta f_u = 0,$$

оператор P зводимо до вигляду $P = -\partial_{x_1}$, тобто з точністю до позначень одержуємо (10).

Нехай тепер $\operatorname{rank} A = 1$. Тоді $\xi = \eta = 0$, $\tau \neq 0$ і, крім того, τ не є сталою величиною. Тому з точністю до заміни (12) можемо вважати, що $\tau_x \neq 0$. Поклавши

$$t_1 = t, \quad x_1 = -\tau(x, u), \quad u_1 = u,$$

одержуємо (11). Нееквівалентність зображень (10) та (11) очевидна. Лему доведено.

Теорема 1. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі класичної алгебри Галілея $AG_1(1, 1)$ вичерпуються зображеннями*

$$AG_1^1(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = t\partial_x;$$

$$AG_1^2(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = u\partial_t + t\partial_x;$$

$$AG_1^3(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = t\partial_x + u\partial_u;$$

$$AG_1^4(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad G = xt\partial_t + x^2\partial_x.$$

Доведення. Здійснимо розширення ідеалу I оператором G. Для побудови представників класів еквівалентних зображень будемо використовувати ті з перетворень (3), які залишають форму операторів T, P незмінною.

Нехай оператори T, P мають вигляд (10), а оператор G — вигляд (1). Перевіряючи виконання комутаційних співвідношень (4), (5), переконуємося, що

$$G = \tau(u)\partial_t + (t + \xi(u))\partial_x + \eta(u)\partial_u. \tag{14}$$

Найбільш загальна заміна змінних, відносно якої вигляд операторів T, P є інваріантним, має вигляд

$$t_1 = t + h(u), \quad x_1 = x + g(u), \quad u_1 = f(u). \tag{15}$$

Якщо в (14) $\eta = 0$, то, покладаючи в (15) $h = \xi$, зводимо оператор G до вигляду $G = \tilde{\tau}(u_1)\partial_{t_1} + t_1\partial_{x_1}$. Якщо $\tilde{\tau}(u_1) = 0$, то має місце зображення $AG_1^1(1,1)$. Якщо $\tilde{\tau}(u_1) \neq 0$, $\tilde{\tau}_{u_1} \neq 0$, то, поклавши в (15) $f = \tilde{\tau}$, одержимо зображення $AG_1^2(1,1)$. Нарешті, якщо $\tilde{\tau} = k = \text{const}$, то $G = k\partial_{t_1} + t_1\partial_{x_1}$, тобто G є лінійною комбінацією операторів T та $t_1\partial_{x_1}$, що відповідає зображенню $AG_1^1(1,1)$.

Якщо в (14) $\eta \neq 0$, то вважаючи в (15) функції h, g, f розв'язками системи

$$\eta h_u + \tau = 0, \quad \xi + \eta g_u = h, \quad hf_u = 1,$$

одержуємо зображення $AG_1^3(1,1)$. Неважко переконатися, що серед замін (15) не існує такої, що переводить зображення $AG_1^1(1,1)$, $AG_1^2(1,1)$, $AG_1^3(1,1)$ одне в інше.

Нехай тепер оператори T, P мають вигляд (11). З виконання комутаційних співвідношень (4), (5) отримуємо

$$G = [tx + \tau(x, u)]\partial_x + x^2\partial_x + \eta(x, u)\partial_u.$$

Найбільш загальне перетворення, яке залишає незмінною форму операторів T, P, має вигляд

$$t_1 = t + h(x, u), \quad x_1 = x, \quad u_1 = f(x, u). \tag{16}$$

Вважаючи в (16) функції h та f розв'язками системи

$$\tau + x^2 h_x + \eta\, h_u = xh, \qquad x^2 f_x + \eta\, f_u = 0,$$

одержуємо зображення $AG_1^4(1,1)$. Очевидно, що це зображення не є еквівалентним жодному з отриманих вище. Теорему доведено.

Наслідок 1.1. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі спеціальної алгебри Галілея* $AG_2(1,1)$ *вичерпуються зображеннями*

$$AG_2^1(1,1):\quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = t\partial_x,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u, \ \ \text{де} \ \ \varepsilon = 0, 1; \tag{17}$$

$$AG_2^2(1,1):\quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = t\partial_x + u\partial_u,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + u(\lambda - \ln|u|)\partial_u, \quad \lambda \in R; \tag{18}$$

$$AG_2^3(1,1):\quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_x, \quad G = xt\partial_x + x^2\partial_x,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u, \quad \text{де} \quad \varepsilon = 0, 1; \tag{19}$$

$$AG_2^4(1,1):\quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = u\partial_t + t\partial_x,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + 3u\partial_u.$$

Наслідок 1.2. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі повної алгебри Галілея* $AG_3(1,1)$ *вичерпуються зображеннями*

$AG_3^1(1,1):$ $T,\ P,\ G,\ D$ *вигляду* (17), *де* $\varepsilon = 0$, $S = t^2\partial_t + tx\partial_x$;

$AG_3^2(1,1):$ $T,\ P,\ G,\ D$ *вигляду* (17), *де* $\varepsilon = 1$, $S = t^2\partial_t + (tx + \varepsilon_1 u^3)\partial_x + u(t + \lambda u^2)\partial_u$, *де* $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\lambda \in R$ *або* $\varepsilon_1 = 0$, $\lambda = 0, \pm 1$;

$AG_3^3(1,1):$ $T,\ P,\ G,\ D$ *вигляду* (18), $S = t^2\partial_t + tx\partial_x + [ux + (\lambda - \ln|u|t)]\partial_u$, $\lambda \in R$;

$AG_3^4(1,1):$ $T,\ P,\ G,\ D$ *вигляду* (19), *де* $\varepsilon = 0$, $S = t^2\partial_t + xt\partial_x$.

Для доведення наслідку 1.1 потрібно кожне з отриманих в теоремі 1 зображень класичної алгебри Галілея розширити оператором D вигляду (1) до зображення спеціальної алгебри Галілея, вимагаючи виконання співвідношень (6). Аналогічно, для доведення наслідку 1.2 доповнюємо отримані зображення спеціальної алгебри Галілея оператором S вигляду (1), вимагаючи виконання співвідношень (7). Відзначимо, що зображення $AG_2^3(1,1)$, де $\varepsilon = 1$, та $AG_2^4(1,1)$ не допускають розширення до зображень повної алгебри Галілея.

3. Розглядаємо класифікацію зображень розширених алгебр Галілея, використовуючи той же алгоритм, що і для опису зображень алгебр Галілея. Оскільки алгебра $A\tilde{G}_1(1,1) = \langle T, P, M\rangle \supset\!\!\!\!+ \langle G\rangle$ містить комутативний ідеал $\tilde{I} = \langle T, P, M\rangle$, розгляд розпочинаємо із класифікації зображень $\tilde{I}$.

Лема 2. *Нехай* T, P, M — *лінійно незалежні оператори вигляду* (1). *Існують перетворення* (3), *які зводять ці оператори до однієї з форм*:

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = u\partial_u, \tag{20}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = \alpha(u)\partial_t + \beta(u)\partial_x, \tag{21}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = \gamma(x)\partial_t, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial x} \neq \text{const}, \tag{22}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = 2u\partial_t, \tag{23}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = 2\partial_u. \tag{24}$$

Тут $\alpha(u)$, $\beta(u)$ *— довільні дійсні функції, що одночасно не є сталими.*

Доведення. Згідно з лемою оператори T і P зводяться до вигляду (10) або (11). Нехай має місце (10). Тоді внаслідок комутативності ідеалу $\tilde{I}$ оператор M має вигляд

$$M = \tau(u)\partial_t + \xi(u)\partial_x + \eta(u)\partial_u,$$

який допускає зведення до вигляду (20) перетвореннями (15) лише у випадку $\eta \neq 0$. Якщо $\eta = 0$, то оператор M зводиться до оператора $u_1\partial_{t_1} + \beta(u_1)\partial_{x_1}$ при $\frac{d\tau}{du} \neq 0$, та до оператора $u_1\partial_{x_1}$ при $\frac{d\tau}{du} = 0$. Обидва випадки відповідають (21).

Нехай тепер має місце (11). Тоді

$$M = \tau(x, u)\partial_t + \eta(x, u)\partial_u,$$

і матриця $\tilde{A}$, складена з коефіцієнтів при похідних в операторах T, P, M, набуває вигляду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що можливі два випадки: $\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$ або $\operatorname{rank} \tilde{A} = 1$.

Якщо $\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$, то $\eta \neq 0$. Вважаючи в заміні (16) функції h та f розв'язками системи

$$\eta h_u + \tau = 0, \quad \eta f_u = 2,$$

зводимо оператор M до оператора $M = 2\partial_{u_1}$. Отже, має місце зображення (24).

Якщо $\operatorname{rank} \tilde{A} = 1$, то $\eta = 0$, $\tau \neq 0$. При $\tau_u = 0$ маємо випадок (22). Якщо $\tau_u \neq 0$, то поклавши в (16) $h = 0$, $f = \tau/2$, зводимо оператори T, P, M до вигляду (23). Нееквівалентність усіх випадків випливає з попередніх міркувань. Лему доведено.

Теорема 2. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі розширеної класичної алгебри Галілея* $A\tilde{G}_1(1,1)$ *вичерпуються зображеннями*

$$A\tilde{G}_1^1(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = u\partial_u, \quad G = t\partial_x + xu\partial_u;$$

$$A\tilde{G}_1^2(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = \varphi\partial_t + u\partial_x,$$

$$G = x\varphi\partial_t + (t + xu)\partial_x + (u^2 + \varphi)\partial_u,$$

де $\varphi = 0$, *або* $\varphi = \varphi(u)$ *задовольняє співвідношення* $2\varphi(C\varphi - 1) = u^2$, $C = \text{const} \in R$;

$$A\tilde{G}_1^3(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = \gamma(x)\partial_t,$$
$$G = xt\partial_t + (x^2 - \gamma(x))\partial_x,$$

де функція $\gamma = \gamma(x)$ $\left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \neq 0\right)$ *задовольняє співвідношення* $C\gamma^2 + 2\gamma = x^2$, $C = \mathrm{const} \in R$;

$$A\tilde{G}_1^4(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = 2u\partial_t,$$
$$G = tx\partial_t + (x^2 - 2u)\partial_x + ux\partial_u.$$

Доведення. Для доведенння теореми потрібно кожне із зображень (20)–(24) розширити оператором G вигляду (1) до зображень розширеної класичної алгебри Галілея $A\tilde{G}_1(1,1)$. Усі випадки розглядаються аналогічно, тому детально зупинимося лише на деяких із них.

Нехай оператори T, P, M мають вигляд (22). Перевіривши виконання комутаційних співвідношень (4), (8), (9), переконуємося, що

$$G = (xt + \tau(x,u))\partial_t + (x^2 - \gamma(x))\partial_x + \eta(x,u)\partial_u,$$

де функція $\gamma(x)$ задовольняє рівняння

$$x\gamma - (x^2 - \gamma)\frac{d\gamma}{dx} = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$C\gamma^2 + 2\gamma - x^2 = 0, \quad C = \mathrm{const} \in R.$$

Заміна змінних

$$t_1 = t + h(x,u), \quad x_1 = x, \quad u_1 = f(x,u),$$

де функції h та f є розв'язками системи

$$(x^2 - \gamma)h_x + \eta h_u + \tau = xh, \quad (x^2 - \gamma)f_x + \eta f_u = 0,$$

приводить нас до зображення $A\tilde{G}_1^3(1,1)$.

Нехай оператори T, P, M мають вигляд (24). Виконання комутаційних співвідношень (4), (8), (9) для оператора G приводить до рівності $2 = 0$. Отримана суперечність показує, що зображення (24) ідеалу $\tilde{I}$ не допускає розширення до зображення алгебри $A\tilde{G}_1(1,1)$.

Нееквівалентність отриманих зображень алгебри $A\tilde{G}_1(1,1)$ випливає з нееквівалентності зображень (20)–(24) ідеалу $\tilde{I}$. Теорему доведено.

Наслідок 2.1. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі розширеної спеціальної алгебри Галілея* $A\tilde{G}_2(1,1)$ *вичерпуються зображеннями*

$$A\tilde{G}_2^1(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = u\partial_u, \quad G = t\partial_x + xu\partial_u,$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \lambda u\partial_u, \quad \lambda \in R; \tag{25}$$

$$A\tilde{G}_2^2(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = \varphi\partial_t + u\partial_x,$$

$$G = x\varphi\partial_t + (t + xu)\partial_x + (u^2 + \varphi)\partial_u,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, \quad \text{де} \quad \varphi = 0 \quad \text{або} \quad \varphi = -\frac{1}{2}u^2; \tag{26}$$

$$A\tilde{G}_2^3(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t, \quad M = \frac{1}{2}x^2\partial_t, \quad G = xt\partial_t + \frac{1}{2}x^2\partial_x,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u, \quad \text{де} \quad \varepsilon = 0, 1;$$

$$A\tilde{G}_2^4(1,1): \quad T = \partial_t, \quad P = -x\partial_x, \quad M = 2u\partial_t,$$

$$G = tx\partial_t + (x^2 - 2u)\partial_x + ux\partial_u,$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Наслідок 2.2. *Нееквівалентні зображення векторними полями Лі розширеної повної алгебри Галілея* $A\tilde{G}_3(1,1)$ *вичерпуються зображеннями*

$$A\tilde{G}_3^1(1,1): \quad T, \ P, \ M, \ G, \ D \ \text{вигляду (25)},$$

$$S = t^2\partial_t + tx\partial_x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda t\right)u\partial_u, \quad \lambda \in R;$$

$$A\tilde{G}_3^2(1,1): \quad T, \ P, \ M, \ G, \ D \ \text{вигляду (26), де} \ \varphi = -\frac{1}{2}u^2,$$

$$S = \left(t^2 - \frac{1}{4}x^2u^2\right)\partial_t + \left(xt + \frac{1}{2}x^2u\right)\partial_x + \left(t + \frac{1}{2}xu\right)u\partial_u.$$

Для доведення наслідків 2.1, 2.2, як і у випадку наслідків 1.1, 1.2, потрібно спочатку розширити отримані в теоремі 2 зображення розширеної класичної алгебри Галілея до зображень розширеної спеціальної алгебри Галілея, а отримані зображення останньої — до зображень розширеної повної алгебри Галілея. Зауважимо, що зображення $A\tilde{G}_2^3(1,1)$, $A\tilde{G}_2^4(1,1)$ розширеної спеціальної алгебри Галілея не допускають розширення до зображень розширеної повної алгебри Галілея.

4. Результатом проведеної класифікації є розбиття всієї множини зображень векторними полями Лі груп Галілея на нееквівалентні класи. Очевидно, що для довільного зображення групи Галілея існує заміна (3), яка зводить його до відповідного представника єдиного класу еквівалентності. Наведемо ряд ілюстраційних прикладів.

1. Рівняння Кортевега – де Фріза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

інваріантне відносно чотирипараметричної групи, яка містить як підгрупу класичну групу Галілея з базисними генераторами

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u.$$

Використавши заміну змінних за правилом $t_1 = t$, $x_1 = x$, $u_1 = \pm e^u$, переконуємося, що дані генератори задають зображення класичної алгебри Галілея, яке міститься в класі $AG_1^3(1,1)$.

2. Рівняння Бюргерса

$$u_t - 2uu_x - u_{xx} = 0$$

інваріантне відносно повної групи Галілея з базисними генераторами

$$T = \partial_t, \quad X = -\partial_x, \quad G = t\partial_x - \partial_u,$$

$$D = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x - (x + tu)\partial_u,$$

які заміною змінних $t_1 = t$, $x_1 = x$, $u_1 = \pm e^{-u}$ зводяться до зображення повної алгебри Галілея $AG_3^3(1,1)$ при $\lambda = 0$, наведеного в наслідку 1.2.

3. Рівняння Бюргерса (модифіковане)

$$u_t = u_{xx} + u_x^2$$

інваріантне відносно нескінченновимірної групи, яка містить як підгрупу розширену повну групу Галілея з базисними генераторами

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = -\frac{1}{2}\partial_u, \quad G = t\partial_x - \frac{1}{2}x\partial_u,$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}\partial_u, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)\partial_u. \tag{27}$$

Заміна змінних $t_1 = t$, $x_1 = x$, $u_1 = e^{-2u}$ показує, що тут має місце клас зображень з представником $A\tilde{G}_3^1(1,1)$, де $\lambda = 1$.

Зауважимо, що до цього ж класу належить розширена повна група Галілея з базисними генераторами

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = -\frac{1}{2}u\partial_u, \quad G = t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u,$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u. \tag{28}$$

Заміна $t_1 = t$, $x_1 = x$, $u_1 = e^u$ зводить оператори (27) до відповідних операторів (28), а модифіковане рівняння Бюргерса — до добре відомого рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$, для якого розширена повна алгебра Галілея (28) є алгеброю інваріантності.

Відзначимо, що відомі зображення груп Галілея виникають тоді, коли ранг матриці, яка складена з коефіцієнтів при похідних в операторах T, P, дорівнює двом (у випадку класичної, спеціальної чи повної груп Галілея), або ранг матриці, яка складена з коефіцієнтів при похідних в операторах T, P, M, дорівнює трьом (у випадку розширених груп Галілея). Саме такі зображення розширених груп Галілея для двох залежних функцій вивчалися в роботі [13]. Випадки, коли ранги вказаних матриць рівні 1 або 2, наскільки нам відомо, ще не розглядались.

Зупинимося на випадках зображень $AG_2^2(1,1)$ та $AG_3^3(1,1)$ при $\lambda \neq 0$, $A\tilde{G}_1^2(1,1)$, $A\tilde{G}_2^2(1,1)$ та $A\tilde{G}_3^2(1,1)$ при $\varphi = -\frac{1}{2}u^2$. Базисні оператори в цих зображеннях містять u нелінійно. Такі зображення, як і в роботах [9–11], називаємо *нелінійними*. Зауважимо, що при $\lambda = 0$ залежна змінна u входить у вибрані представники класів $AG_2^2(1,1)$, $AG_3^3(1,1)$ нелінійно, але, як показано вище (приклад рівняння Бюргерса), існують перетворення (3), які лінеаризують ці зображення. Відзначимо, що проведена класифікація може бути використана для лінеаризації галілей-інваріантних рівнянь, що проілюстровано вище на прикладі модифікованого рівняння Бюргерса.

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
3. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. publ., 1993. – 436 p.
4. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
5. *Фущич В. И., Жданов Р. З.* Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.
6. *Фущич В. И., Черинга Р. М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I, II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10, 12. – С. 1349–1357; 1687–1694.
7. *Фущич В. І., Черніга Р. М.* Системи нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень // Доп. НАН України. – 1993. – № 8. – С. 44–51.
8. *Fushchych W. I., Cherniha R. M.* Galilean-invariant nonlinear systems of second-order equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 5569–5579.
9. *Yegorchenko I. A.* Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Inst. Math., 1992. – P. 62–65.
10. *Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V.* On linear and non-linear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector field // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 3. – P. 295–308.
11. *Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V.* Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // Ibid. – № 2. – P. 210–221.
12. *Rideau G., Winternitz P.* Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. – 1990. – **31**, № 5. – P. 1095–1105.
13. *Rideau G., Winternitz P.* Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // Ibid. – 1993. – **34**, № 2. – P. 558–570.
14. *Гурса Е.* Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. – Київ: Рад. шк., 1941. – 415 с.
15. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.

Одержано 30.09.96