УДК 57.938

А. Л. Гречко (Нац. техн. ун-т „КПІ", Київ)

ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ СЛАБКОЇ РЕГУЛЯРНОСТІ ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ТОРІ

We give a necessary condition of weak regularity of a linear extension of dynamical system on a torus. The system under consideration has the form of Fourier series with respect to the part of variables.

Наведено необхідну умову слабкої регулярності лінійного розширення динамічної системи на торі у вигляді рядів Фур'є за частиною змінних.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \qquad dx/dt = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

Нагадаємо [1, с. 120; 2], що система (1) називається слабко регулярною, якщо вона має хоча б одну функцію Гріна – Самойленка задачі про інваріантний тор

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi) - I_n), & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

яка задовольняє умову

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma \text{ — const} > 0, \quad \tau \in R. \tag{3}$$

Якщо система (1) має єдину функцію Гріна – Самойленка (2) з оцінкою (3), то її назвемо регулярною.

Подальший розвиток питань слабкої регулярності системи (1) приводить до ідеї розкладання функцій $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ у функціональні ряди за частиною змінних φ, тобто до розгляду системи

$$d\varphi/dt = a(\varphi)\sin\varphi, \quad d\psi/dt = b(\varphi)\cos\psi, \quad dx/dt = (A(\varphi)\sin\psi)x, \tag{4}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\psi \in \mathcal{T}_1$, $x \in R^n$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $b(\varphi) \in C_{\mathrm{lip}}(\mathcal{T}_1)$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (4) *є слабко регулярною, тоді слабко регулярною буде система*

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= a(\varphi), \\ dx/dt &= \left(A(\varphi) - \frac{1}{2} b(\varphi) I_n\right)x. \end{aligned} \tag{5}$$

Доведення. Із слабкої регулярності системи (4) випливає існування симетричної матриці $S(\varphi, \psi) \in C^1(\mathcal{T}_m \times \mathcal{T}_1)$ такої, що похідна квадратичної форми $V(\varphi, \psi) = \langle S(\varphi, \psi)z, z\rangle$ є додатно визначеною вздовж розв'язків системи, спряженої до системи (4):

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= a(\varphi)\sin\psi, \\ d\psi/dt &= b(\varphi)\cos\psi, \\ dz/dt &= -\left(A^*(\varphi)\sin\psi\right)z, \end{aligned} \tag{6}$$

тобто

$$\left\langle\left(\frac{\partial S(\varphi,\psi)}{\partial\varphi}a(\varphi)\sin\psi+\frac{\partial S(\varphi,\psi)}{\partial\psi}b(\varphi)\cos\psi-S(\varphi,\psi)A^*(\varphi)\sin\psi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-A(\varphi)S(\varphi,\psi)\sin\psi\right)z,z\right\rangle\geq\gamma\|z\|^2\quad\forall z\in\mathcal{T}_m,\quad\gamma=\text{const}>0.\tag{7}$$

Розкладемо $S(\varphi,\psi)$ в ряд Фур'є за змінною ψ:

$$S(\varphi,\psi)=\frac{S_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(S_k(\varphi)\cos k\psi+S_k(\varphi)\sin k\psi)$$

та підставимо в (7):

$$\left\langle\left(M[S_0]+\sum_{k\geq1}M[S_k]\sin k\psi+\sum_{k\geq1}M[S_k]\cos k\psi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k\geq1}(\varphi,\psi)b(\varphi)\cos\psi\right)z,z\right\rangle\geq\gamma\|z\|^2,\tag{8}$$

де

$$M[S]=\frac{\partial S(\varphi,\psi)}{\partial\varphi}a(\varphi)-S(\varphi,\psi)A^*(\varphi)-A(\varphi)S(\varphi,\psi).$$

Інтегруючи нерівність (8) по ψ від 0 до 2π, одержуємо

$$\left\langle\left(\frac{\partial S_k(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)+S_k(\varphi)b(\varphi)-S_k(\varphi)A^*(\varphi)-A(\varphi)S_k(\varphi)\right)z,z\right\rangle\geq\gamma_1\|z\|^2.$$

Звідси маємо

$$\left\langle\left(\frac{\partial S_k(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)+S_k(\varphi)\left(A^*(\varphi)-\frac{b(\varphi)I_n}{2}\right)-\left(A(\varphi)-\frac{b(\varphi)I_n}{2}\right)S_k(\varphi)\right)z,z\right\rangle\geq\gamma_1\|z\|^2.\tag{9}$$

Таким чином, похідна квадратичної форми $V_k(\varphi,\psi)$, взятої вздовж розв'язків системи, спряженої до системи (5), є додатно визначеною: цього досить, щоб система (5) була слабко регулярною. Теорему доведено.

Зауважимо, що із слабкої регулярності системи (5) не випливає слабка регулярність системи (4). Наприклад, $\dot\varphi=0$, $\dot x=(\mu-1/2\lambda)x$ є регулярною при $\lambda=1$, $\mu=0$, але система $\dot\varphi=0$, $\dot\psi=\lambda\sin\psi$, $\dot x=(\mu\cos\psi)x$ при цих λ,μ не є слабко регулярною.

Також із слабкої регулярності системи (1) не випливає слабка регулярність системи (4). Дійсно, $\dot\varphi=\sin\varphi$, $\dot x=(\cos\varphi)x$ є слабко регулярною, але система

$$\dot\varphi=\sin\varphi\cos\psi,\qquad\dot\psi=\cos\varphi\sin\psi,\qquad\dot x=(\cos\varphi\sin\psi)x$$

не є слабко регулярною.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О регулярности дифференциальных уравнений, линеаризованных по части переменных // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 5. – С. 773–777.

Одержано 01.07.97