УДК 531.36

Т. А. Мельник (Одес. ун-т)

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ УСРЕДНЕНИЯ В СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ

An iterative method for multiplying precision of an approximate solution of averaging problem in the standard form is considered.

Розглядається ітераційний метод для підвищення точності наближеного розв'язку задачі усереднення в стандартній формі.

Метод усреднения [1] широко применяется при построении приближенного решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром. Для повышения точности приближенного решения системы дифференциальных уравнений стандартного вида используются итерационные [2] и асимптотические [3] методы.

В данной работе итерационный метод распространяется на дифференциальные уравнения с измеримой правой частью.

1. Постановка нелинейной задачи. Рассмотрим при $t \in [0, L/\varepsilon]$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений стандартного вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, \varepsilon t, x), \qquad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in R^n$, $t \in [0, L/\varepsilon]$.

Пусть в области $Q\{t \geq 0,\ \tau \in [0, L],\ x \in D\}$ выполнены следующие условия:

1. Функция $X(t, \tau, x)$ и ее производная $X_x(t, \tau, x)$ по x измеримы по t при каждом фиксированном $x \in D$ и $\tau \in [0, L]$ и непрерывны по τ, причем существуют суммируемые функции $\Lambda(t)$ и $\Gamma(t)$ такие, что

$$\| X(t, \tau, x) \| \leq \Lambda(t), \qquad \| X_x(t, \tau, x) \| \leq \Lambda(t),$$

$$\| X_x(t, \tau, x') - X_x(t, \tau, x'') \| \leq \Gamma(t) \| x' - x'' \|.$$

Здесь

$$\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)dt \leq \lambda(t_2 - t_1), \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Gamma(t)dt \leq \gamma(t_2 - t_1), \qquad \lambda \geq 0,\ \gamma \geq 0,$$

для любых $t_2 \geq t_1 \geq 0$, $x', x'' \in D$, $\tau \in [0, L]$.

2. Равномерно по $x \in D$, $\tau \in [0, L]$ существует предел

$$\overline{X}(\tau, x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \tau, x) dt.$$

3. Решение $\overline{x}(\tau)$ усредненной системы

$$\frac{d\overline{x}}{d\overline{\tau}} = \overline{X}(\tau, \overline{x}), \qquad \overline{x}(0) = x^0,$$

при $\tau \in [0, L]$ принадлежит D вместе со своей ρ-окрестностью.

4. Существует константа $N > 0$ такая, что при $\tau \geq 0$

$$\left\| \int_0^t [X(s, \varepsilon s, \overline{x}(\varepsilon s)) - \overline{X}(\varepsilon s, \overline{x}(\varepsilon s))] ds \right\| \leq N.$$

2. Построение итерационного метода. Решение системы (1) ищем в виде $x(t, \varepsilon) = \bar{x}(\varepsilon t) + \delta(t, \varepsilon)$, несколько отличном от представления [2, 3]. В результате получим задачу Коши для нахождения $\delta(t, \varepsilon)$

$$\dot{\delta} = \varepsilon X_x(t, \varepsilon t, \bar{x})\delta + \varepsilon f(t, \delta, \varepsilon), \qquad \delta(0, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

в которой

$$f \equiv \left[X(t, \varepsilon t, \bar{x}) - \overline{X}(\varepsilon t, \bar{x})\right] + \left[X(t, \varepsilon t, \bar{x} + \delta) - \overline{X}(t, \varepsilon t, \bar{x}) - X_x(t, \varepsilon t, \bar{x})\delta\right].$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(t, \varepsilon) = \bar{x}(\varepsilon t) + \delta_n(t, \varepsilon),$$

где

$$\dot{\delta}_n = \varepsilon X_x(t, \varepsilon t, \bar{x})\delta_n + \varepsilon f(t, \delta_{n-1}, \varepsilon), \qquad \delta_n(0, \varepsilon) = 0, \tag{3}$$

$n = 1, 2, \ldots,$ $\delta_0(t, \varepsilon) \equiv 0$. Если $\Phi(\tau, \sigma, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы (2), т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = X_x(\tau/\varepsilon, \tau, \bar{x}(\tau))\Phi, \qquad \Phi(\sigma, \sigma, \varepsilon) = E, \qquad 0 \le \sigma \le \tau \le L,$$

то решение δ_n системы (3) определяется квадратурами

$$\delta_n(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t \Phi(\varepsilon t, \varepsilon s, \varepsilon) f(s, \delta_{n-1}(s, \varepsilon), \varepsilon)\, ds.$$

Используя принцип сжатых отображений и оценки метода усреднения [1, 4], можно показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $1-4$. *Тогда существуют положительные константы* C *и* ε_0 *такие, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in (0, L/\varepsilon]$ *выполняется неравенство*

$$\| x(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon) \| \le C(C\varepsilon)^{n+1}. \tag{4}$$

При исключении требования 4 достижима соответствующая точность $C(C\varepsilon)^{n+1}$, вообще говоря, при большем числе итераций и справедлива следующая теорема, несколько более общая , чем в [3].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $1-3$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $\mu > 0$ *можно найти такое* n, *что*

$$\| x(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon) \| \le \mu. \tag{5}$$

3. Замечание. Рассмотрим случай, когда известна фундаментальная матрица $\overline{\Phi}(\tau, \sigma)$, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \tau} = \overline{X}_x(\tau, \bar{x}(\tau))\overline{\Phi}, \qquad \overline{\Phi}(\sigma, \sigma) = E, \qquad 0 \le \sigma \le \tau \le L.$$

Как предложено в [2], выполним близкое к тождественному линейное преобразование [5]

$$\delta = (E + \varepsilon U)y, \qquad U(t, \varepsilon) \equiv \int_0^t \left[X_x(s, \varepsilon s, \bar{x}(\varepsilon s)) - \overline{X}_x(\varepsilon s, \bar{x}(\varepsilon s))\right] ds.$$

Тогда $x(t, \varepsilon) = \bar{x}(\varepsilon t) + (E + \varepsilon U)y$, где

$$\dot{y} = \varepsilon \overline{X}_x(\varepsilon t, \overline{x}(\varepsilon t))y + \varepsilon F(t, y, \varepsilon), \qquad y(0, \varepsilon) = 0,$$

$$F \equiv (E + \varepsilon U)^{-1}\{-\varepsilon U \overline{X}_x(\varepsilon t, \overline{x})y + [X(t, \varepsilon t, \overline{x}) - \overline{X}(\varepsilon t, \overline{x})] +$$
$$+ [X(t, \varepsilon t, \overline{x} + (E+\varepsilon U)y) - X(t, \varepsilon t, \overline{x}) - X_x(t, \varepsilon t, \overline{x})y]\}.$$

Соответствующее приближенное решение имеет вид

$$x_n(t, \varepsilon) = \overline{x}(\varepsilon t) + (E + \varepsilon U)y_n,$$

для которого

$$\dot{y}_n = \varepsilon \overline{X}_x(\varepsilon t, \overline{x}(\varepsilon t))y_n + \varepsilon F(t, y_{n-1}, \varepsilon), \qquad y_n(0, \varepsilon) = 0, \qquad y_0(t, \varepsilon) \equiv 0.$$

Ясно, что

$$y_n(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t \overline{\Phi}(\varepsilon t, \varepsilon s) F(s, y_{n-1}(s, \varepsilon), \varepsilon)\, ds.$$

4. Линейная задача в стандартной форме. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon A(t, \varepsilon t)x + \varepsilon f(t, \varepsilon t), \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in R^n$, $t \in [0, L/\varepsilon]$.

Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(s, \tau)\, ds = \overline{A}(\tau), \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \tau)\, ds = \bar{f}(\tau). \tag{7}$$

Тогда системе (6) ставится в соответствие усредненная система

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \overline{A}(\tau)x_0 + \bar{f}(\tau), \qquad \tau \in [0, L]. \tag{8}$$

В системе (6) введем близкое к тождественному преобразование [5] $x \equiv S(t, \varepsilon)u$, где матрица

$$S(t, \varepsilon) \equiv E + I(t, \varepsilon) \equiv E + \varepsilon \int_0^t [A(s, \varepsilon s) - \overline{A}(\varepsilon s)]\, ds$$

имеет обратную при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. В результате получим систему

$$S(t, \varepsilon)\dot{u} = \varepsilon S(t, \varepsilon)\overline{A}(\varepsilon t)u + \varepsilon \tilde{A}(t, \varepsilon t)u + \varepsilon f(t, \varepsilon t).$$

Здесь $\tilde{A}(t, \varepsilon t) \equiv A(t, \varepsilon t)I(t, \varepsilon) - I(t, \varepsilon)\overline{A}(\varepsilon t)$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\dot{u}_n = \varepsilon \overline{A}(t, \varepsilon t)u_n + \varepsilon S^{-1}(t, \varepsilon)\tilde{A}(t, \varepsilon t)u_{n-1} + \varepsilon S^{-1}(t, \varepsilon)f(t, \varepsilon t), \tag{9}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $u_n(0, \varepsilon) = x(0, \varepsilon)$. Обозначим через $\overline{\Phi}(\tau, \sigma)$ фундаментальную матрицу системы (8).

Таким образом, решение $u_n(t, \varepsilon)$ системы (9) представимо в виде

$$u_n(t, \varepsilon) = \overline{\Phi}(\varepsilon t, 0)x(0, \varepsilon) + \varepsilon \int_0^t \overline{\Phi}(\varepsilon t, \varepsilon s)S^{-1}(s, \varepsilon)\left[f(s, \varepsilon s) + \tilde{A}(s, \varepsilon s)u_{n-1}(s, \varepsilon)\right] ds.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в области* $Q\{t \geq 0, \quad \tau \in [0, L]\}$ *выполняются следующие условия:*

i) *функции* $A(t, \tau)$ *и* $f(t, \tau)$ *измеримы по* t, *непрерывны по* τ *и существует функция* $\Lambda(t)$ *такая, что* $\|A(t, \tau)\| \leq \Lambda(t)$, $\|f(t, \tau)\| \leq \Lambda(t)$, *где для любых* $t_2 \geq t_1 \geq 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)\, dt \leq \lambda(t_2 - t_1);$$

ii) *равномерно по* $\tau \in [0, L]$ *существуют пределы* (7);

iii) *существует константа* $N > 0$ *такая, что при* $t \geq 0$

$$\left\| \int_0^t [A(s, \varepsilon s) - \overline{A}(\varepsilon s)]\, ds \right\| \leq N, \qquad \left\| \int_0^t [f(s, \varepsilon s) - \bar{f}(\varepsilon s)]\, ds \right\| \leq N.$$

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *выполняется неравенство* (4).

Если исключить условие iii), то получим оценку (5). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* i), ii). *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $\mu > 0$ *можно найти такое* n, *что выполняется неравенство* (5).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Акуленко Л. Д.* Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45,** вып. 5. – С. 771–777.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
4. *Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – С. 90–95.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.

Получено 12.03.97