УДК 517. 9

С. О. Наконечна (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЦЕНТРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ ТОЧКИ СПОКОЮ В ОДНОМУ КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

We establish conditions under which a central manifold can be replaced by its approximation in the reduction principle for ordinary differential equations in a critical case of one zero root.

Вказано умови, за яких у принципі зведення для звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку одного нульового кореня замість центрального многовиду можна застосувати його апроксимацію.

Розглянемо систему $m+n$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = By + g(x, y), \tag{1}$$

де x, y — відповідно m і n вектори, A — стала $m \times m$-матриця, для якої $\operatorname{Re}\sigma(A) = 0$ (випадок $A = 0$ не виключається), B — стала $n \times n$-матриця, для якої $\operatorname{Re}\sigma(B) < 0$; f і g — нелінійні вектор-функції з класу $C^r (r \geq \geq 2)$, причому $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = 0$, $Dg(0, 0) = 0$.

Під центральним многовидом точки спокою системи (1) будемо розуміти деякий притягуючий інваріантний многовид у фазовому просторі $R^m \times R^n$, який можна локально зобразити у вигляді

$$M^c(0) = \{(x, y) \in R^m \times R^n \mid y = \varphi(x), \|x\| < \delta\}, \tag{2}$$

причому $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, δ — достатньо мала стала.

Основні теореми теорії центрального многовиду викладені в [1]. Це теорема 1 про існування центрального многовиду (2) системи $m+n$ диференціальних рівнянь (1), на якому поведінка траєкторій описується системою m диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \varphi(x)); \tag{3}$$

теорема 2 про „принцип зведення” [2, 3], а також теорема 3 про апроксимацію центрального многовиду.

Мета даної роботи полягає у тому, щоб для системи (1) у конкретному критичному випадку викласти ідею використання у принципі зведення замість центрального многовиду його апроксимації і проілюструвати цю ідею на прикладі конкретної системи диференціальних рівнянь.

Отже, при розгляді цього питання будемо виходити з того , що виконуються такі умови:

1) для вихідної системи існує центральний многовид (2);
2) для системи (1) має місце „принцип зведення”;
3) для $\varphi(x)$ побудовано відповідну апроксимацію

$$M^c_{\text{ap}}(0) = \{(x, y) \in R^m \times R^n \mid y = \psi(x), \|x\| < \delta\},$$

де $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, δ — достатньо мала стала, причому виконується співвідношення

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| = O(\|x\|^q), \quad x \to 0, \quad q > 1. \tag{4}$$

Розглянемо критичний випадок одного нульового кореня. У цьому випадку вихідна система набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = By + g(x,y), \tag{5}$$

де B, f, g такі ж, як і в системі (1) з урахуванням, що x — скаляр. Припускаємо, що відносно системи (5) виконуються умови 1–3.

Нехай ми знайшли функцію $\psi(x)$, що апроксимує $\varphi(x)$ з точністю до величини порядку малості q відносно x. Тоді згідно з (4) маємо

$$\varphi(x) = \psi(x) + o(|x|^q).$$

Розглянемо випадок, коли рівняння, що описує поведінку траєкторій системи (5) на $M^c(0)$, можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = ax^q + o(|x|^q) \tag{6}$$

з деяким коефіцієнтом $a \neq 0$. Згідно з теоремою Ляпунова [2], нульовий розв'язок рівняння (6) асимптотично стійкий, коли q — непарне і $a<0$, та нестійкий, коли q — парне або $a>0$.

В результаті можемо сформулювати таку теорему.

Теорема. *Нехай для системи* (1) *має місце критичний випадок одного нульового кореня і розглядувана система задовольняє умови* 1–3.

Тоді якщо рівняння на центральному многовиді $M^c(0)$ можна записати у вигляді (6), *то нульовий розв'язок вихідної системи асимптотично стійкий, якщо q — непарне і $a<0$, та нестійкий, якщо q — парне або $a>0$.*

Проілюструємо теорему на прикладі.

Приклад. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x^2y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -y - x^3 + y^3, \quad (x,y)\in R^2. \tag{7}$$

Оскільки матриця відповідної лінеаризованої системи у точці $x=0,\ y=0$ має власні значення $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$, то маємо критичний випадок одного нульового кореня. Отже, для дослідження стійкості нульового розв'язку $x=0,\ y=0$ системи (7) можемо застосувати метод центрального многовиду.

Легко перевірити, що система (7) задовольняє умови 1–3.

Отже, існує центральний многовид системи (7)

$$M^c(0) = \{(x,y)\in R^2 \mid y = \varphi(x),\ |x|<\delta\},$$

$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0,\ \delta$ — достатньо мала стала.

На основі „принципу зведення" задача про стійкість нульового розв'язку системи (7) зводиться до задачі про стійкість нульового розв'язку рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - x^2\varphi, \quad x\in R, \quad |x|<\delta. \tag{8}$$

Розглянемо відповідне квазілінійне рівняння в частинних похідних першого порядку [1, 4]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}[-x^3 - x^2\varphi] = -\varphi - x^3 + \varphi^3, \tag{9}$$

з якого, враховуючи умови $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0$, можемо визначити вектор-функцію $\varphi(x)$, що задає центральний многовид вихідної системи.

На практиці це рівняння використовується для знаходження апроксимації центрального многовиду. З цією метою візьмемо неперервно диференційовну в околі нуля функцію $\psi(x)$ з властивостями $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ і розглянемо вираз

$$(N\psi)(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x}[-x^3 - x^2\psi] + \psi + x^3 - \psi^3, \tag{10}$$

зауваживши при цьому, що $(N\varphi)(x) = 0$.

Якщо в якості $\psi(x)$ візьмемо кубічний поліном, то, приймаючи до уваги властивості $\psi(x)$, бачимо, що в (10) члени $\frac{\partial\psi}{\partial x}x^3$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}x^2\psi$, ψ^3 мають порядок малості відносно x не менший за п'ятий.

Тому можемо записати

$$(N\psi)(x) = \psi + x^3 + O(|x|^5).$$

Поклавши у цьому виразі $\psi = -x^3$, отримаємо

$$(N\psi)(x) = O(|x|^5), \quad x \to 0.$$

Отже, маємо

$$\varphi(x) = -x^3 + O(|x|^5). \tag{11}$$

Підставивши (11) в рівняння (8), одержимо рівняння типу (6)

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - x^2(-x^3 + O(|x|^5)) = -x^3 + O(|x|^5). \tag{12}$$

Використовуючи сформульовану теорему, приходимо до висновку, що нульовий розв'язок системи (7) асимптотично стійкий.

1. *Carr I.* Applications of centre manifold theory // Lect. Notes. Ser. Appl. Math. Sci. – 1981. – **35.** – 141 p.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
3. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН УССР. Сер. мат. – 1964. – **26**. – С. 1297 – 1324.
4. *Лыкова О. Б., Барис Я. С.* Приближенные интегральные многообразия. – Киев: Наук. думка, 1993. – 214 с.

Одержано 21.10.97