УДК 517.9

М. Я. Свіщук (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З ВИПАДКОВИМИ МОМЕНТАМИ ЗБУРЕННЯ

For linear evolutionary system given in the Banach space and characterized by pulse perturbations at random times, we establish conditions for the existence of unique solution of the Cauchy problem and investigate the stability of zero solution.

Для лінійної еволюційної системи, заданої в банаховому просторі, з імпульсним збуренням у випадкові моменти часу встановлюються умови існування єдиного розв'язку задачі Коші та досліджується стійкість нульового розв'язку.

1. Нехай $\mathbb{B}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$; $A(t)$ — сім'я лінійних операторів, $\forall\, t \in R_+$ $A(t)\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$; $\mathcal{D} := \bigcap_{t\in R_+} \mathcal{D}(A(t))$ — спільна незалежна від t область визначення операторів $A(t)$, щільна в $\mathbb{B}$.

Розглянемо еволюційне рівняння [1]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

з імпульсною дією [2] у випадкові моменти часу $\{\tau_i\}_{i=0}^{+\infty}$:

$$x(\tau_i) = (\mathcal{B}_i + I)\,x(\tau_i - 0), \tag{2}$$

$\{\mathcal{B}_i\}_{i=0}^{\infty}$ — лінійні оператори, $\mathcal{B}_i\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $\mathcal{B}_0$ — нульовий оператор, I — одиничний оператор в $\mathbb{B}$. Випадкові величини $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, набувають значень в R_+, є незалежними, однаково розподіленими і такими, що $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots$, $\sup\limits_i \tau_i = +\infty$.

Для (1), (2) сформулюємо задачу Коші з невипадковою початковою умовою

$$x(0) = x_0, \qquad x_0 \in \mathbb{B}. \tag{3}$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(3) *називається функція* $x(t)\colon R_+ \to \mathbb{B}$, *що є неперервною в сенсі норми* $\mathbb{B}$ *на кожному з інтервалів вигляду* $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *має розриви першого роду в точках* $t = \tau_i$, *задовольняючи в цих точках умову* (2), *на* (τ_i, τ_{i+1}) $x(t)$ — *неперервно диференційовна та задовольняє* (1), *а в точці* $\tau_0 = 0$ *виконується* (3).

Теорема 1. *Нехай для кожного* $t \in R_+$ $A(t)$ — *замкнутий лінійний оператор такий, що* $A(t - \tau_i) = A(t)$, $\mathcal{B}_i$ — *обмежені лінійні оператори,* $\nu(t) := \max\{n\colon \tau_n \le t\}$ — *лічильний процес, що задовольняє умову* $\forall\, t \in R_+$ $P\{\nu(t) < +\infty\} = 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Тоді задача Коші (1)–(3) *має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді*

$$x(t) = \Phi(t)x_0, \tag{4}$$

де $\Phi(t)$ — *еволюційний оператор, що задовольняє інтегральне рівняння*

$$\Phi(t)x_0 = x_0 + \int_0^t A(s)\Phi(s)\,x_0\,ds + \sum_{i=1}^{\nu(t)} \mathcal{B}_i \Phi(\tau_i - 0)\,x_0. \tag{5}$$

(Мається на увазі єдиність за розподілом, тобто якщо $x(t)$ та $x_1(t)$ — два розв'язки (1), (3), то $P\left(\sup_{t\geq 0}\|x(t)-x_1(t)\|>0\right)=0$.)

Доведення. Згідно з [3] (гл. IV), при $t\in[0,\tau_1)$ розв'язок задачі (1) – (3) має вигляд $x(t)=T(t)x_0$, де $T(t)$ — еволюційний оператор системи $dT(t)/dt = A(t)T(t)$, $T(0)=I$. Враховуючи неперервність $T(t)$, для $t=\tau_1$ одержуємо $x(\tau_1)=(\mathcal{B}_1+I)T(\tau_1)x_0$, а отже, для $t\in[\tau_1,\tau_2)$ маємо $x(t)=T(t-\tau_1)(\mathcal{B}_1+{}$ $+I)T(\tau_1)x_0$. Методом математичної індукції легко показати, що для $t\in[\tau_i,$ $\tau_{i+1})$: $x(t)=T(t-\tau_i)(\mathcal{B}_i+I)T(\tau_i-\tau_{i-1})(\mathcal{B}_{i-1}+I)\ldots T(\tau_1)x_0$.

Зважаючи на те, що кількість моментів імпульсної дії для точки t визначається випадковим процесом $\nu(t)$, який з імовірністю 1 набуває скінченних значень, одержимо розв'язок задачі Коші (1) – (3) у вигляді

$$x(t)=T(t-\tau_{\nu(t)})\prod_{k=0}^{\nu(t)-1}(\mathcal{B}_{\nu(t)-k}+I)T(\tau_{\nu(t)-k}-\tau_{\nu(t)-k-1})\,x_0\qquad\forall\,t\geq\tau_1.\quad(6)$$

Покладемо

$$\Phi(t)=\begin{cases} T(t), & t\in[0,\tau_1);\\ T(t-\tau_{\nu(t)})\prod\limits_{k=0}^{\nu(t)-1}(\mathcal{B}_{\nu(t)-k}+I)T(\tau_{\nu(t)-k}-\tau_{\nu(t)-k-1}), & t\geq\tau_1.\end{cases}\qquad(7)$$

Тоді для кожного $t\in R_+$ розв'язок задачі Коші (1) – (3) має вигляд (4), де $\Phi(t)$ визначається (7).

Покажемо, що для побудованого в (7) оператора $\Phi(t)$ вірне співвідношення (5). Справді, для $t\in[0,\tau_1)$ маємо $\nu(t)=0$, $\Phi(t)=T(t)$, а отже, $d\Phi/dt={}$ $=A(t)\Phi$, $\Phi(0)=I$, що в інтегральній формі співпадає з (5).

Для $t\in[\tau_1,\tau_2)$ в силу того, що

$$x(\tau_1)=(\mathcal{B}_1+I)\left(x_0+\int_0^{\tau_1-0}A(s)\Phi(s)\,x_0\,ds\right),$$

одержуємо

$$x(t)=T(t-\tau_1)x(\tau_1)=$$

$$=x_0+\int_0^t A(s)\Phi(s)\,x_0\,ds+\mathcal{B}_1\Phi(\tau_1-0)\,x_0,$$

що співпадає з (5), оскільки $\nu(t)=1$.

Для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ $\nu(t)=i$. Таким чином, знову одержуємо формулу, еквівалентну (5).

Зазначимо, що замкнутість операторів $A(t)$ та щільність області $\mathcal{D}$ в $\mathbb{B}$ гарантує існування похідної для розв'язку $x(t)$, визначеного формулою (4) на (τ_i,τ_{i+1}). Обмеженість операторів $\mathcal{B}_i$ та $\nu(t)$ гарантує коректність виразу (5). Єдиність розв'язку задачі Коші (1) – (3) на R_+ випливає з єдиності на кожному $[\tau_i,\tau_{i+1})$ та лінійності операторів $\mathcal{B}_i$.

Очевидно, що функція $x(t)$, будучи випадковою функцією, є $\mathcal{F}_t$-вимірною, де $\mathcal{F}_t:=\sigma\{\nu(s)+1:\,0\leq s\leq t\}$.

2. Розглянемо задачу Коші для системи [4]

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \neq \tau_i, \tag{1'}$$

з випадковою імпульсною дією

$$x(\tau_i) = (\mathcal{B}+I)\,x(\tau_i - 0) \tag{2'}$$

та початковою умовою (3).

Теорема 2. *Нехай*:

1) *лінійний оператор* A *породжує в* $\mathbb{B}$ *півгрупу таку, що* $\forall\, t \in R_+ \quad \exists\, M$, $\gamma = \text{const}$:

$$\| e^{At} \| \le M e^{-\gamma t}, \tag{8}$$

причому M *і* γ *— додатні*;

2) *лінійний оператор* $\mathcal{B}$ *задовольняє оцінку*

$$\| \mathcal{B} \| = b < e - 1\,; \tag{9}$$

3) *оператори* A *і* $\mathcal{B}$ *комутують*;

4) $\forall\, t \in R_+ \quad \exists\, \eta = \text{const}:\ 0 < \eta < \gamma$ *така, що*

$$E e^{\nu(t)} \le e^{+\eta t}, \tag{10}$$

де E *— математичне сподівання відносно* P.

Тоді нульовий розв'язок задачі (1), (2) *асимптотично стійкий у середньому в розумінні Ляпунова.*

Доведення. Доведення цієї теореми базується на введеній в [3] (гл. II, § 3) властивості $\mathcal{L}(\sigma, N)$ для рівняння $dx/dt = \Phi(x, t)$, $\Phi(0, t) = 0$, яка полягає в існуванні додатних сталих σ та N таких, що кожний розв'язок цього рівняння з обмеженими початковими значеннями x_0 задовольняє нерівність

$$\| x(t) \| \le N e^{-\sigma\cdot(t-\tau)} \| x(\tau) \| \qquad \forall\, t > \tau. \tag{11}$$

Покажемо, що в умовах теореми 2 нерівність (11) виконується для математичного сподівання за мірою P для розв'язку задачі (1) – (3) з довільним обмеженим початковим значенням x_0. Згідно з теоремою 1 цей розв'язок має вигляд (4), де оператор $\Phi(t)$ набуває вигляду

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{At}, & t \in [0, \tau_1); \\ e^{At}(\mathcal{B}+I)^{\nu(t)}, & t \ge \tau_1. \end{cases} \tag{12}$$

Застосовуючи нерівність (8), для $x(t)$ при $t \in [0, \tau_1)$ одержуємо оцінку (11) з $N = M$, $\sigma = \gamma$. Для $t \ge \tau_1$ маємо

$$E\| x(t) \| = E\| e^{At}(\mathcal{B}+I)^{\nu(t)} x_0 \| \le$$

$$\le E\| e^{A(t-\tau)}(\mathcal{B}+I)^{\nu(t)-\nu(\tau)} \| \, \| e^{A\tau}(\mathcal{B}+I)^{\nu(\tau)} x_0 \| \le$$

$$\le E\| e^{A(t-\tau)} \| \, \| (\mathcal{B}+I)^{\nu(t)-\nu(\tau)} \| \, \| x(\tau) \| \le$$

w

$$\le M e^{-\gamma(t-\tau)} e^{\eta(t-\tau)} E\| x(\tau) \| = M e^{-(\gamma-\eta)(t-\tau)} E\| x(\tau) \|,$$

що співпадає з (11), якщо покласти $N = M$, $\sigma = \gamma - \eta$.

Таким чином, $x(t)$ в середньому задовольняє співвідношення (11), що засвідчує рівномірну асимптотичну стійкість в середньому нульового розв'язку задачі (1), (2).

Зауваження 1. Якщо розподіл випадкової функції $\nu(t)$ на (τ, t) близький до розподілу Пуассона, тобто $\exists\,\alpha, \beta = \text{const} > 0$:

$$P\{\nu(\tau, t) = m\} \le \frac{\beta^m (t-\tau)^m}{m!} e^{-\alpha(t-\tau)}, \tag{13}$$

то нульовий розв'язок задачі (1), (2) є асимптотично стійким в середньому, якщо $\gamma + \alpha > \beta(b+1)$.

Дійсно, при умові (13) доводиться оцінка

$$E(b+1)^{\nu(t)-\nu(\tau)} := E(b+1)^{\nu(t,\tau)} =$$

$$:= \sum_{m=0}^{+\infty} E[(b+1)^{\nu(\tau,t)} \,|\, \nu(\tau,t) = m]\, P\{\nu(\tau,t) = m\} \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(b+1)^m \beta^m (t-\tau)^m}{m!} e^{-\alpha(t-\tau)} =$$

$$= e^{\beta(b+1)(t-\tau)} e^{-\alpha(t-\tau)} = e^{-(\alpha-\beta(b+1))(t-\tau)},$$

звідки одержуємо нерівність (11) для середнього від $\|x(t)\|$ з $N = M$, $\sigma = \gamma + \alpha - \beta(b+1)$.

Зауваження 2. Умова $A(t) = A(t-\tau_i)$, безперечно, звужує клас операторів $A(t)$, для яких справедливі умови теореми 1. Проте для операторів вигляду

$$A(t) = A f(t), \tag{14}$$

де A — лінійний замкнутий оператор, $f(t)$ — детермінована неперервна функція така, що $f(t-\tau_i) = f(t)$, теорема 1 справедлива. Як приклад візьмемо $A(t) = A\cos(t-\tau_i)$, $\tau_i = 2\pi\xi_i$, $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ — послідовність однаково розподілених випадкових величин, що набувають цілих значень. Умова (14) не вичерпує усіх операторів $A(t)$.

Зауваження 3. Теорема 1 залишається справедливою і тоді, коли замість умови $A(t-\tau_i) = A(t)$ виконується більш загальна умова, а саме: існування неперервно диференційовного еволюційного оператора операторного рівняння (1) [5]. Доведення теореми 1 залишається без змін.

1. *Самойленко А. М., Илолов М. А.* К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН СССР. – 1991. – **314**, № 4. – С. 822–825.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 282 с.
3. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.
4. *Swishchuk M.* Solution of the Cauchy problem for evolutionary equation in Banach space with random impulses // Proc. III Int. school (Katsively, Crimea, Ukraine, 1992) : Evolut. Stochast. System Phys. and Biology. – Netherlands: VSP, 1992. – P. 158–161.
5. *Функциональный* анализ / Под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Одержано 14.10.97