УДК 517.9

Фоиад Собхи Обаид (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОЛИНОМЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

In the work is shown up that the solution of Dirichlet problem for elliptic equation of the fourth order with constant coefficients with periodic of all variables except for one and by diagnosticly subsiding right parts strides on infinities to a certain polynomial of first degree in the nonperiodic variable. Coefficients of this polynomial are found.

Показано, що розв'язок задачі Діріхле для еліптичного рівняння четвертого порядку з постійними коефіцієнтами з періодичними за всіма змінними, крім однієї, експоненціально спадаючими правими частинами збігається на нескінченності до деякого полінома першого степеня за неперіодичною змінною. Знайдені коефіцієнти цього полінома.

Пусть

$$\Omega = \{ x \in \Re^n :\ 0 < x_i < 1 :\ i = 0, 1, \dots, n-1,\ x_n \in (-\infty, \infty) \},$$

$$\Omega(t_1, t_2) = \Omega \cap \{ t_1 < x_n < t_2 \}, \quad \Omega_0 = \Omega \cap \{ x_n > 0 \} \ \text{и}\ S_t = \Omega \cap \{ x_n = t \}.$$

Через $H^2(\Omega)$ обозначим, как обычно, пространство функций с нормой

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{a \le 2} \| D^\alpha u \|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

а через $\hat{H}^2(\Omega(t_1, t_2))$ — пополнение по норме пространства $H^2(\Omega(t_1, t_2))$ множества 1-периодических по $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и бесконечно дифференцируемых на множестве $\{ x \in \Re^n :\ t_1 < x_n < t_2 \}$ функций. Через $\hat{H}_{2-1/2}(S_0)$ обозначим пространство следов 1-периодических по $\hat{x}$ функций, имеющих ограниченную норму в $H^2(\Omega(0,1))$. Норма в $\hat{H}_{2-1/2}(S_0)$ определяется равенством

$$\| \{ \Psi_0(\hat{x}), \Psi_1(\hat{x}) \} \|_{\hat{H}_{2-1/2}(S_0)} =$$

$$= \inf_{\nu} \left\{ \| \nu \|_{H^2(\Omega)},\ \nu \in \hat{H}^2(\Omega(0,1)),\ \nu(x) = \Psi_0(\hat{x}),\ \frac{\partial \nu(x)}{\partial x_n} = \Psi_1(\hat{x}),\ x \in S_0 \right\}.$$

В области Ω_0 рассмотрим следующую задачу:

$$Au(x) \equiv \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta} D^\beta u(x) \right) = \sum_{|k| \le 2} D^k f_k(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{1}$$

$$u(x) = \Psi_0(\hat{x}), \qquad x \in S_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \Psi_1(\hat{x}), \qquad x \in S_0, \tag{3}$$

$$u(x) \text{— 1-периодична по } \hat{x},\ \int_{\Omega_0} E(u)\, dx < \infty, \tag{4}$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_i = 1, \dots, n,\ i = 1, 2, \qquad D^\alpha \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}},$$

$$|\alpha| = 2, \quad a_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},$$

$$E(\nu) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2} a_{\alpha\beta} D^{\alpha}\nu(x) D^{\beta}\nu(x)$$

и

$$\int_{\Omega_0} f_k(x)^2 \exp(\gamma x_n)\, dx < \chi, \quad \chi, \gamma > 0, \quad |k| = 0, 1, 2.$$

Все функции, входящие в правые части (1) – (3), являются 1-периодическими по $\hat{x}$, $\{\Psi_0(\hat{x}), \Psi_1(\hat{x})\} \subset \hat{H}_{2-1/2}(S_0)$. Кроме того, для оператора A выполнено условие эллиптичности

$$\lambda_0|\xi|^2 \le \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \le \lambda_1|\xi|^2, \quad \xi \in \Re^{n^2}. \tag{5}$$

Здесь λ_0 и λ_1 — положительные постоянные.

Рассмотрим задачу (1) в области $\Omega(s-h, s+h+1)$, где $0 \le h \le s$, $s, h \in N$, в случае $f_k(x) = 0$, $|k| \le 2$.

Теорема 1. *Для 1-периодического по $\hat{x}$ решения $u(x)$ задачи (1) существует постоянная $\omega > 0$ такая, что для любого h*

$$\int_{\Omega(s, s+1)} E(u)\, dx \le e^{-\omega h} \int_{\Omega(s-h, s+h+1)} E(u)\, dx.$$

Замечание. Если подставить $h = s$ в неравенство теоремы 1, то используя условие (4), получаем оценку

$$\int_{\Omega(s, s+1)} E(u)\, dx \le c e^{-\omega s}, \tag{6}$$

где постоянная c не зависит от s.

Рассмотрим задачу (1) – (3) в области Ω_0.

Теорема 2. *Для 1-периодического по $\hat{x}$ решения задачи (1) существуют полином $W^\infty(x_n) = C_0^\infty + C_1^\infty x_n$ и положительные постоянные $\tau, \rho > 0$ такие, что для любого $s > 0$*

$$\left\| u - W^\infty \right\|_{H^2(\Omega(s, s+1))} \le \tau e^{-\rho s}, \tag{7}$$

и коэффициенты этого полинома C_0^∞ и C_1^∞ определяются формулами

$$C_0^\infty = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{i+1} \int_{\Omega(0, \infty)} a^{-1}_{(n,n)(n,n)} \frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{x_n^3}{3!}\right) f_i(x)\, dx + \int_{S_0} \Psi_0(x)\, d\hat{x},$$

$$C_1^\infty = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{i} \int_{\Omega(0, \infty)} a^{-1}_{(n,n)(n,n)} \frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{x_n^2}{2!}\right) f_i(x)\, dx + \int_{S_0} \Psi_1(\hat{x})\, d\hat{x},$$

где $f_0 = f$, $f_1 = f_{(n)}$, $f_2 = f_{(n,n)}$.

Доказательство. Существование полинома $W^\infty(x_n)$ и оценка (7) непосредственно следуют из результатов работы [1].

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le x_n \le s, \\ -2(x_n - s)^2 + 1 & \text{при } s \le x_n \le s + \dfrac{1}{2}, \\ 2(x_n - s - 1)^2 & \text{при } s + \dfrac{1}{2} \le x_n \le s + 1, \\ 0 & \text{при } s + 1 \le x_n < \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi(x_n)$ — непрерывная функция и $\Phi(x_n)$, $\dfrac{d\Phi(x_n)}{dx_n}$ равны 0 при $x_n \ge s + 1$.

Рассмотрим функции

$$V^r(x_n) = \frac{d^r}{dx_n^r}\left(\frac{x_n^3}{3!}\right), \qquad r = 0, 1.$$

Все функции из множеств

$$\left\{V^r(x_n), \frac{dV^r(x_n)}{dx_n}\right\}, \qquad r = 0, 1,$$

равны нулю при $x_n = 0$. Кроме того, функции $V^r(x)$ являются решениями задачи (1) – (3) с нулевыми правыми частями и нулевыми граничными условиями.

Функции

$$\frac{d^j}{dx_n^j}\left[\Phi(x_n)V^r(x_n)\right] = 0 \quad \text{на} \quad S_0 \quad \text{и} \quad S_{s+1}, \quad r = 0, 1, \quad j = 0, 1,$$

поэтому, используя интегральное тождество для решения $u(x)$ задачи (1) – (4) с пробными функциями $\Phi(x_n)V^r(x_n)$, получаем

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta} \int_{\Omega(0,\, s+1)} D^\alpha\big(V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\big)D^\beta u(x)\,dx = \\ = \sum_{|k|\le 2} \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)D^k f_k(x)\,dx.$$

Пусть

$$\tilde{J}^r(s) = \sum_{|k|\le 2} \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)D^k f_k(x)\,dx,$$
$$J^r(s) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta} \int_{\Omega(0,\, s+1)} D^\alpha\big(V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\big)D^\beta u(x)\,dx. \tag{8}$$

Рассмотрим

$$\tilde{J}^r(s) = \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)f_0(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\frac{\partial f_{(i)}(x)}{\partial x_i}dx + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\frac{\partial^2 f_{(i,j)}(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx = \int_{\Omega(0,\, s+1)} V^r(x_n)\,\Phi(x_n)f_{(0)}(x)\,dx - \\ - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0,\, s+1)} f_{(n)}(x)\frac{\partial\big(V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\big)}{\partial x_i}dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega(0,\,s+1)} f_{(n,n)}(x)\frac{\partial^2\left(V^r(x_n)\,\Phi(x_n)\right)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{s\to\infty}\tilde{J}^r(s)=\tilde{J}^r$, где

$$\tilde{J}^r = \int\limits_{\Omega(0,\,\infty)} V^r(x_n)f_{(0)}(x)\,dx - \int\limits_{\Omega(0,\,\infty)} f_{(n)}(x)\frac{dV^r(x_n)}{dx_n}dx + $$

$$+\int\limits_{\Omega(0,\,\infty)} f_{(n,\,n)}(x)\frac{\partial^2 V^r(x_n)}{\partial x_n^2}dx. \tag{9}$$

Рассмотрим $J^r(s)$. Нетрудно видеть, что

$$J^r(s) = \sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(0,\,s+1)}\Phi(x_n)\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}D^\beta u(x)\,dx +$$

$$+\sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)} 2\,\frac{dV^r(x_n)}{dx_n}\,\frac{d\Phi(x_n)}{dx_n}D^\beta u(x)\,dx +$$

$$+\sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)} V^r(x_n)\,\frac{d^2\Phi(x_n)}{dx_n^2}D^\beta u(x)\,dx.$$

Пусть

$$J^r(s) = J_1^r(s)+J_2^r(s)+J_3^r(s), \tag{10}$$

где

$$J_1^r(s) = \sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(0,\,s+1)}\Phi(x_n)\,\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}D^\beta u(x)\,dx,$$

$$J_2^r(s) = \sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)} 2\,\frac{dV^r(x_n)}{dx_n}\,\frac{d\Phi(x_n)}{dx_n}D^\beta u(x)\,dx,$$

$$J_3^r(s) = \sum_{|\beta|=2} a_{(n,\,n)\beta}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)} V^r(x_n)\,\frac{d^2\Phi(x_n)}{dx_n^2}D^\beta u(x)\,dx.$$

Используя неравенства (5), (6), оценим интегралы $J_2^r(s)$, $J_3^r(s)$. При $r=0$ имеем

$$J_2^0(s) \le M_1\left(\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)}\left|x_n^2\Phi'(x_n)\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\sum_{|\beta|=2}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)}\left|D^\beta u(x)\right|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2M_2(s+1)^2e^{-\omega s}, \tag{11}$$

$$J_3^0(s) \le M_3\left(\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)}\left|\Phi''(x_n)\frac{x_n^3}{3!}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\sum_{|\beta|=2}\int\limits_{\Omega(s,\,s+1)}\left|D^\beta u(x)\right|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{4}{3!}M_4(s+1)^3e^{-\omega s}, \tag{12}$$

при $r = 1$

$$J_2^1(s) \le 2M_5\left(\int\limits_{\Omega(s,s+1)} |x_n\Phi'(x_n)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\sum_{|\beta|=2}\int\limits_{\Omega(s,s+1)}\left|D^\beta u(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le 4M_6(s+1)e^{-\omega s}, \tag{13}$$

$$J_3^1(s) \le \frac{1}{2}M_7\left(\int\limits_{\Omega(s,s+1)} \left|x_n^2\Phi''(x_n)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\sum_{|\beta|=2}\int\limits_{\Omega(s,s+1)}\left|D^\beta u(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le 4M_8(s+1)e^{-\omega s}, \tag{14}$$

где $M_i = \mathrm{const}$ и не зависят от s, $i = 1, \dots, 8$.

Поэтому из неравенств (11) – (14) при $r = 0, 1$ получаем

$$\lim_{s\to\infty} J_2^r(s) = \lim_{s\to\infty} J_3^r(s) = 0.$$

Теперь запишем интеграл $J_1^r(s)$ в виде

$$J_1^r(s) = -a_{(n,n)(n,n)}\int\limits_{\Omega(s,s+1)} u(x)\Phi''(x_n)\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}dx -$$

$$-2\sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)}\int\limits_{\Omega(s,s+1)}\frac{\partial u(x)}{\partial x_{\beta_1}}\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}\Phi'(x_n)dx + I^r(s), \tag{15}$$

где

$$I^r(s) = \sum_{|\beta|=2} a_{(n,n)\beta}\int\limits_{\Omega(0,s+1)}\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}\left[D^\beta(u(x)\,\Phi(x_n))\right]dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$I^r(s) = \sum_{\beta_2=1}^{n}\sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,\beta_2)}\int\limits_{\partial\Omega(0,s+1)}\nu_{\beta_2}\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}}(u(x)\,\Phi(x_n))\frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2}dS -$$

$$-\sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)}\int\limits_{\Omega(0,s+1)}\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}}(u(x)\,\Phi(x_n))\frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3}dx,$$

где $S = \partial\Omega(0, s+1)$ и $\upsilon_1, \dots \upsilon_n$ — направляющие косинусы внешней нормали к S. В рассматриваемом случае $\upsilon_1 = \dots = \upsilon_{n-1} = 0$, $\upsilon_n = \pm 1$ на S_{s+1} и S_s соответственно.

Интегрируя по частям второй интеграл в последнем равенстве, получаем

$$\sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)}\int\limits_{\Omega(0,s+1)}\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}}(u(x)\,\Phi(x_n))\frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3}dx =$$

$$= \sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)}\int\limits_{\Omega(0,s+1)}\nu_{\beta_1}\frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3}u(x)\,\Phi(x_n)ds -$$

$$-a_{(n,n)(n,n)}\int\limits_{\Omega(0,s+1)} u(x)\,\Phi(x_n)\frac{d^4V^r(x_n)}{dx_n^4}dx =$$

$$= \sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)} \int\limits_{\partial\Omega(0,s+1)} \nu_{\beta_1} \frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3} u(x)\,\Phi(x_n)\,dS.$$

Таким образом,

$$I^r(s) = -a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{S_0} \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} d\hat{x} + a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{S_0} u(x) \frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3} d\hat{x}. \quad (16)$$

Следовательно, $\lim\limits_{s\to\infty} I^r(s) = I^r$. Поэтому из (16) получаем

$$I^r = a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{S_0} \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} d\hat{x} - a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{S_0} u(x) \frac{d^3V^r(x_n)}{dx_n^3} d\hat{x}. \quad (17)$$

Из (8), (10) и (15) следует

$$\tilde{J}^r(s) = -a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} u(x)\Phi''(x_n) \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} dx -$$

$$-2 \sum_{\beta_1=1}^{n} a_{(n,n)(\beta_1,n)} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\beta_1}} \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} \Phi'(x_n)\,dx + I^r(s) + J_2^r(s) + J_3^r(s). \quad (18)$$

Воспользовавшись существованием полинома $W^\infty(x_n) = C_0^\infty + C_1^\infty x_n$, запишем (18) в следующем виде:

$$\tilde{J}^r(s) = -2a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} \frac{d^2}{dx_n^2}\big(V^r(x_n)\big)\Phi'(x_n) \frac{dW^\infty}{dx_n} dx -$$

$$- a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} \Phi''(x_n) \frac{d^2}{dx_n^2}\big(V^r(x_n)\big) W^\infty dx +$$

$$+ I^r(s) + J_2^r(s) + J_3^r(s) + I_1^r(s) + I_2^r(s), \quad (19)$$

где

$$I_1^r(s) = -a_{(n,n)(n,n)} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} \big[u - W^\infty\big]\Phi''(x_n) \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} dx,$$

$$I_2^r(s) = -2 \sum_{|\beta|=2} a_{(n,n)\beta} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} \frac{\partial\big[u - W^\infty\big]}{\partial x_{\beta_1}} \Phi'(x_n) \frac{d^2V^r(x_n)}{dx_n^2} dx.$$

Оценим интегралы $I_1^r(s)$ и $I_2^r(s)$. Рассмотрим интеграл $I_1^r(s)$. При $r = 0, 1$ имеем

$$I_1^0(s) \le a_{(n,n)(n,n)} \left[\int\limits_{\Omega(s,s+1)} |\Phi''(x_n)x_n|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int\limits_{\Omega(s,s+1)} \big[u - W^\infty\big]^2 dx\right]^{1/2} \le$$

$$\le K_1(s+1)e^{-\rho s}, \quad (20)$$

$$I_1^1(s) \le a_{(n,n)(n,n)} \left[\int\limits_{\Omega(s,s+1)} |\Phi''(x_n)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int\limits_{\Omega(s,s+1)} \big[u - W^\infty\big]^2 dx\right]^{1/2} \le K_2 e^{-\rho s}. \quad (21)$$

Рассмотрим интеграл $I_2^r(s)$. При $r = 0, 1$ получаем

$$I_2^0(s) \le 2K_3 \left[\sum_{\beta_1=1}^{n} \int_{\Omega(s,\,s+1)} \left| \frac{\partial [u - W^\infty]}{\partial x_{\beta_1}} \right|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega(s,\,s+1)} |\Phi'(x_n) x_n|^2 dx \right]^{1/2} \le$$

$$\le K_4 (s+1) e^{-\rho s}, \tag{22}$$

$$I_2^1(s) \le 2K_5 \left[\sum_{\beta_1=1}^{n} \int_{\Omega(s,\,s+1)} \left| \frac{\partial [u - W^\infty]}{\partial x_{\beta_1}} \right|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega(s,\,s+1)} |\Phi'(x_n)|^2 dx \right]^{1/2} \le$$

$$\le K_6 e^{-\rho s}, \tag{23}$$

где $K_i = \text{const}$ не зависят от s и $\rho > 0$, $i = 1, \ldots, 6$.

Теперь (19) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{J}^r(s) = -C_1^\infty a_{(n,\,n)(n,\,n)} \int_s^{s+1} [2\Phi'(x_n) + x_n \Phi''(x_n)] \frac{d^2}{dx_n^2} V^r(x_n)\, dx -$$

$$-C_0^\infty a_{(n,\,n)(n,\,n)} \int_s^{s+1} \Phi''(x_n) \frac{d^2}{dx_n^2} V^r(x)\, dx + I^r(s) + J_2^r(s) + J_3^r(s) + I_1^r(s) + I_2^r(s). \tag{24}$$

Из равенства (24) при $r = 0$ имеем

$$\tilde{J}^0(s) = -C_1^\infty a_{(n,\,n)(n,\,n)} \int_s^{k+1} x_n [2\Phi'(x_n) + x_n \Phi''(x_n)]\, dx -$$

$$-C_0^\infty a_{(n,\,n)(n,\,n)} \int_s^{s+1} x_n [\Phi''(x_n)]\, dx + I^0(s) + J_2^0(s) + J_3^0(s) + I_1^0(s) + I_2^0(s) =$$

$$= -a_{(n,\,n)(n,\,n)} C_0^\infty + I^0(s) + J_2^0(s) + J_3^0(s) + I_1^0(s) + I_2^0(s),$$

откуда следует

$$C_0^\infty = \lim_{s \to \infty} a_{(n,\,n)(n,\,n)}^{-1} \left(-\tilde{J}^0(s) + I^0(s) + J_2^0(s) + J_3^0(s) + I_1^0(s) + I_2^0(s) \right).$$

Следовательно, из (9), (11), (12), (20) и (22) получаем

$$C_0^\infty = a_{(n,\,n)(n,\,n)}^{-1} \left(-\tilde{J}^0 + I^0 \right). \tag{25}$$

Подставляя функцию $V^0(x_n) = \dfrac{x_n^3}{3!}$ в равенства (9) и (17), находим

$$\tilde{J}^0 = \int_{\Omega(0,\,\infty)} \frac{x_n^3}{3!} f(x)\, dx - \int_{\Omega(0,\,\infty)} \frac{x_n^2}{2!} f_{(n)}(x)\, dx + \int_{\Omega(0,\,\infty)} x_n f_{(n,\,n)}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \int_{\Omega(0,\,\infty)} \frac{d^i}{dx_n^i} \left(\frac{x_n^3}{3!} \right) f_i(x)\, dx, \tag{26}$$

$$I^0 = \int_{S_0} a_{(n,\,n)(n,\,n)} u(x)\, d\hat{x} - \int_{S_0} a_{(n,\,n)(n,\,n)} \frac{du(x)}{dx_n} x_n\, d\hat{x} = \int_{S_0} a_{(n,\,n)(n,\,n)} \Psi_0(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{27}$$

Итак, из (25) – (27) получаем

$$C_0^\infty = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{i+1} \int\limits_{\Omega(0,\infty)} a^{-1}_{(n,n)(n,n)} \frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{x_n^3}{3!}\right) f_i(x)\,dx + \int\limits_{S_0} \Psi_0(x)\,d\hat{x}.$$

Из (24) при $r = 1$ имеем

$$\tilde{J}^1(s) = -C_1^\infty \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{(n,n)(n,n)}[2\Phi'(x_n) + x_n\Phi''(x_n)]\,dx -$$

$$-C_0^\infty \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{(n,n)(n,n)} x_n \Phi''(x_n)\,dx + I^1(s) + J_2^1(s) + J_3^1(s) + I_1^1(s) + I_2^1(s) =$$

$$= a_{(n,n)(n,n)} C_1^\infty + I^1(s) + J_2^1(s) + J_3^1(s) + I_1^1(s) + I_2^1(s).$$

Таким образом,

$$C_1^\infty = \lim_{s\to\infty} a^{-1}_{(n,n)(n,n)}\Big(\tilde{J}^1(s) - \big(I^1(s) + J_2^1(s) + J_3^1(s) + I_1^1(s) + I_2^1(s)\big)\Big).$$

Следовательно, из (10), (13), (14), (17), (21) и (24) получаем

$$C_1^\infty = a^{-1}_{(n,n)(n,n)}\Big(\tilde{J}^1 - I^1\Big).$$

Подставляя функцию $V^1(x_n) = \dfrac{x_n^2}{2!}$ в равенства (9) и (17), имеем

$$I^1 = -\int\limits_{S_0} a_{(n,n)(n,n)} \frac{du(x)}{dx_n}\,d\hat{x} = -\int\limits_{S_0} a_{(n,n)(n,n)} \Psi_1(\hat{x})\,d\hat{x},$$

$$\tilde{J}^1 = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \int\limits_{\Omega(0,\infty)} \frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{x_n^2}{2!}\right) f_i(x)\,dx.$$

Итак,

$$C_1^\infty = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \int\limits_{\Omega(0,\infty)} a^{-1}_{(n,n)(n,n)} \frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{x_n^2}{2!}\right) f_i(x)\,dx + \int\limits_{S_0} \Psi_1(\hat{x})\,d\hat{x},$$

где $f_0 = f_{(0)}$, $f_1 = f_{(n)}$, $f_2 = f_{(n,n)}$.

Теорема доказана.

Аналогичный результат может быть получен для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. Для системы теории упругости аналогичный результат получен в [2].

1. *Сукретный В. И.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области. – Киев, 1988. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.15).

2. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Наука, 1990. – С. 3–77.

Получено 04.11.97