УДК 517. 9

А. А. Эльназаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ *m*-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

By using the method of the asymptotic expansion of m-parameter family of solutions, we obtain the asymptotic expansion of a quasilinear system of differential equations.

За допомогою методу асимптотичного розкладу m-параметричної сім'ї розв'язків одержано розклад розв'язків однієї квазілінійної системи диференціальних рівнянь.

1. В работе [1] изложен новый метод асимптотического разложения m-параметрического семейства решений системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, t — время, ε — малый положительный параметр, X — n-мерная векторная функция переменных x, ε, допускающая разложение в ряд по степеням параметра ε

$$X(x, \varepsilon) = X_0(x) + \varepsilon X_1(x) + \ldots + \varepsilon^p X_p(x) + \ldots,$$

коэффициенты которого $X_p(x)$ удовлетворяют определенным условиям гладкости в области их определения.

Предполагается, что порождающая система уравнений — система (1) — при $\varepsilon = 0$ имеет инвариантное многообразие, задаваемое уравнением

$$x = F(z), \qquad z \in E^m. \tag{2}$$

Пусть множество $\mathfrak{M}$ является кольцом бесконечно дифференцируемых в E^n функций с операцией дифференцирования в нем:

$$\forall\, f \in \mathfrak{M} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \in \mathfrak{M}, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Предположим выполнение следующих условий:

1) в $\mathfrak{M}$ содержится совокупность $\mathfrak{M}'$ всех функций вида $X(F(Px))$, где $X(x) \in \mathfrak{M}$, $F(z)$ — функция (2), $P = (E, O)$ — $n \times m$-мерная матрица, E — m-мерная единичная матрица;

2) „усредняющий" оператор $S : \mathfrak{M} \to S\mathfrak{M}$ и линейный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial y} X_0(y) - \frac{\partial X_0(y)}{\partial y}$$

переводят $\mathfrak{M}'$ в себя: $S\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}'$, $L\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}'$;

3) на множестве $\mathfrak{M}'_0$, состоящем из функций $\mathfrak{M}'$, имеющих нулевое среднее значение, оператор L однозначно обратим;

4) для произвольной функции $X = X(Px)$ из $\mathfrak{M}'$ ее усредненная функция $Y(Px) = SX(Px)$, а также функция $Y(Px) = X_0(F(Px))$ удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} PY(z) = Y(z), \quad z \in E^m. \tag{3}$$

При сделанных предположениях разложение m-параметрического семейства решений системы уравнений (1) ищется в виде

$$x = F(z) + \varepsilon v_1(z) + \ldots + \varepsilon^p v_p(z) + \ldots \tag{4}$$

при предположении, что $z = z_t(z, \varepsilon)$ — решение системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z_0(z) + \varepsilon Z_1(z) + \ldots + \varepsilon^p Z_p(z) + \ldots , \tag{5}$$

где $Z_0 = PX_0(F(z))$.

В настоящей работе с помощью m-параметрического метода исследуется квазилинейная система уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + \varepsilon X(x, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda + \varepsilon F(x, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$ — n-мерный, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots , \varphi_m)$ — m-мерный векторы, A — постоянная матрица размера $n \times n$, имеющая блочно-диагональный вид

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2),$$

где вещественные части всех собственных значений матриц A_1 и A_2 соответственно положительны и отрицательны, $X = (X_1, X_2, \ldots , X_n)$ и $F = (F_1, F_2, \ldots$ $\ldots , F_n)$ — периодические по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, периода 2π функции, допускающие разложения

$$X(x, \varphi, \varepsilon) = X_1(x, \varphi) + \varepsilon X_2(x, \varphi) + \ldots + \varepsilon^p X_p(x, \varphi) + \ldots ,$$

$$F(x, \varphi, \varepsilon) = F_1(x, \varphi) + \varepsilon F_2(x, \varphi) + \ldots + \varepsilon^p F_p(x, \varphi) + \ldots ,$$

коэффициенты которых $X_\nu(x, \varphi)$ и $F_\nu(x, \varphi)$ являются полиномами по x и тригонометрическими полиномами по φ, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots , \lambda_m)$ — постоянный вектор такой, что для любого целочисленного вектора k

$$(k, \lambda) \neq 0, \quad k = (k_1, k_2, \ldots , k_m), \quad k^2 = \sum_i k_i^2 \neq 0.$$

При $\varepsilon = 0$ система (6) имеет инвариантный тор

$$x = 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{7}$$

Пусть M является множеством конечных сумм вида

$$(X(x, \varphi), F(x, \varphi)) = \sum (X_{rk}, F_{rk}) x^r e^{i(k, \varphi)},$$

где $r \in Z_+^n$, $k \in Z^m$, Z — множество целых чисел, $X_{rk} = \left(X_{rk}^1, \ldots , X_{rk}^n \right)$ и $F_{rk} =$ $= \left(F_{rk}^1, \ldots , F_{rk}^m \right)$ — постоянные векторы.

Через $\mu = (\mu_1, \ldots , \mu_n)$ обозначим вектор собственных чисел матрицы A, J — жорданова форма матрицы A. Будем предполагать, что $A = J$.

Определим на M „усредняющий" оператор $S=(S_1, S_0)$ соотношениями

$$S(X(x,\varphi), F(x,\varphi)) = (S_1 X(x,\varphi), S_0 F(x,\varphi)) =$$

$$= \left(\sum_{(r,k)\in Q_1} X^1_{rk}\, x^r e^{i(k,\varphi)}, \ldots, \sum_{(r,k)\in Q_n} X^n_{rk}\, x^r e^{i(k,\varphi)}, \sum_{(r,k)\in Q_0} F_{rk}\, x^r e^{i(k,\varphi)} \right),$$

где

$$Q_j = \left\{ (r,k)\in Z^n_+ \times Z^m \mid (r,\mu) + i(k,\lambda) = \mu_j \right\}, \quad j=\overline{1,n},$$

$$Q_0 = \left\{ (r,k)\in Z^n_+ \times Z^m \mid (r,\mu) + i(k,\lambda) = 0 \right\}, \quad x^r = x_1^{r_1}\, x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n},$$

$$|r| = r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \quad |k| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_m|, \quad (k,\varphi) = k_1\varphi_1 + \ldots + k_m\varphi_m,$$

а также линейный оператор $L=(L_1, L_0)$, где

$$L = L_0 - A, \quad L_0 = \frac{\partial}{\partial x} A x + \frac{\partial}{\partial \varphi}\lambda.$$

2. Установим применимость метода m-параметрического семейства решений для системы (1). Во множестве $M' \subset M$ содержатся все функции, зависящие лишь от переменного φ. На этом множестве оператор L принимает вид $L' = (L_1', L_0')$, где

$$L_1' = \frac{\partial}{\partial \varphi}\lambda - A, \quad L_0' = \frac{\partial}{\partial \varphi}\lambda.$$

Сужение оператора $S=(S_1, S_2)$ на M' определяется соотношениями

$$\forall\, (u,v)\in M', \quad S_1 u = 0, \quad S_0 u = c = \text{const}.$$

Очевидно, что $LM' \subseteq M'$, $SM' \subseteq M'$.

Установим однозначную разрешимость в классе M_0' уравнения

$$L_0' w = A w + X'(\varphi). \tag{8}$$

На характеристике $\lambda t + \theta$ уравнение (8) превращается в уравнение

$$\frac{dw(\lambda t+\varphi)}{dt} = A w(\lambda t + \varphi) + X'(\lambda t + \varphi),$$

решением которого является функция

$$w(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau) X'(\lambda\tau + \varphi)\, d\tau, \tag{9}$$

где $G_0(\tau)$ — функция Грина линейной системы уравнений [2], определенной по A. При этом функция $w(\varphi)$ также является тригонометрическим полиномом. Поэтому к ней применим оператор S_1

$$S_1 w(\varphi) = 0.$$

Операторы L_0' и S_0 являются гомологическим и усредняющим операторами метода асимптотического интегрирования [3], поэтому функция $((L_0' - A)^{-1} \times$ $\times (I - S_1) X(\varphi),\ (L_0')^{-1} (I - S_0) F(\varphi))$, где $(L_0' - A)^{-1}$ задается интегралом (9), является прообразом функции $((I - S_1) X(\varphi),\ (I - S_0) F(\varphi))$. Тем самым выполняется условие 3.

Условие 4 означает выполнение равенства

$$\begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix}(E, O)\begin{pmatrix} Y_0(\varphi) \\ Y_1(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0(\varphi) \\ Y_1(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $Y_1(\varphi) = S_1 X(\varphi)$, $Y_0(\varphi) = S_0 F(\varphi)$, E — m-мерная единичная матрица, O — нулевая матрица размера $n \times m$.

Оно выполняется в силу $S_1 X(\varphi) = 0$. Тем самым мы можем применить метод m-параметрического семейства решений системы (6).

Изложим алгоритм асимптотического разложения m-параметрического семейства решений системы (6). Согласно формулам (4), (5) разложения рассматриваемого семейства решений системы (6) ищем в виде

$$x = \varepsilon w_1(\theta) + \varepsilon^2 w_2(\theta) + \ldots + \varepsilon^p w_p(\theta) + \ldots, \tag{10}$$

$$\varphi = \theta + \varepsilon v_1(\theta) + \varepsilon^2 v_2(\theta) + \ldots + \varepsilon^p v_p(\theta) + \ldots, \tag{11}$$

считая $\theta = \theta_t(\theta)$ решением системы уравнений вида

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \varepsilon \Phi_1(\theta) + \ldots + \varepsilon^p \Phi_p(\theta) + \ldots . \tag{12}$$

Подставляя ряды (10), (11) и их производные по t, взятые в силу уравнения (12), в исходную систему уравнений (6) и разлагая полученные выражения по степеням параметра ε, получаем систему равенств для определения функций v_1, w_1:

$$\begin{aligned} L_0' w_1 &= A w_1 + X_1'(\theta), \\ L_0' v_1 &= F_1'(\theta) - \Phi_1(\theta), \end{aligned} \tag{13}$$

где $X_1'(\theta) = X_1(0, \theta)$, $F_1'(\theta) = F_1(0, \theta)$.

Формула (9) позволяет определить решение первого уравнения в виде

$$w_1(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau) X_1'(\lambda\tau + \theta)\, d\tau,$$

где $G_0(\tau)$ — функция Грина, удовлетворяющая оценке

$$\| G_0(\tau) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\}, \quad \tau \in R.$$

На характеристике $\lambda t + \theta$ второе уравнение принимает вид

$$v_1(\lambda t + \theta) = v_1(\theta) + \int_0^t [F_1'(\lambda\tau + \theta) - \Phi_1(\lambda\tau + \theta)]\, d\tau. \tag{14}$$

Функция $F_1'(\lambda t + \theta) - \Phi_1(\lambda t + \theta)$ в (14) является квазипериодической и такой же является функция $v_1 \in M_0'$, поэтому квазипериодичным должен быть и интеграл, стоящий в правой части формулы (14). Необходимое условие квазипериодичности первообразной от квазипериодической функции (теорема Боля [4]) требует выполнения равенства

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F_1'(\lambda t + \theta) - \Phi_1(\lambda t + \theta)]\, dt = 0. \tag{15}$$

Так как $\Phi_1(\theta) \in \operatorname{Ker}\{L_0'\}$, то

$$\Phi_1(\theta) = \Phi_1(\lambda t + \theta) = \Phi_1 = \text{const}.$$

Учитывая это, из (15) находим

$$\Phi_1 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1'(\lambda t + \theta)\, dt.$$

Формула (15) определяет действие оператора S_0 на функцию $(X(\varphi), F(\varphi)) \in M_0'$. Так как для искомого решения уравнений (13)

$$S_0 v_1 = 0,$$

то

$$v_1(\theta) = -\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t [F_1'(\lambda\tau + \theta) - \Phi_1]\, d\tau\, dt.$$

Определим функции v_2, w_2. Согласно изложенной выше процедуре для v_2, w_2 получаем

$$\begin{aligned} L_0' w_2 &= A w_2 + X_2'(\theta), \\ L_0' v_2 &= F_2'(\theta) - \Phi_2(\theta), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$X_2'(\theta) = X_2(0, \theta, 0) + \left[\frac{\partial X_1'(\theta)}{\partial x} w_1(\theta) + \frac{\partial X_1'(\theta)}{\partial \theta} v_1(\theta) \right] - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \Phi_1,$$

$$F_2'(\theta) = F_2(0, \theta) + \left[\frac{\partial F_1'(\theta)}{\partial x} w_1(\theta) + \frac{\partial F_1'(\theta)}{\partial \theta} v_1(\theta) \right] - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \Phi_1.$$

На характеристике $\lambda t + \theta$ второе уравнение системы (16) для v_2 принимает вид

$$\frac{d v_2(\lambda t + \theta)}{dt} = F_2'(\lambda t + \theta) - \Phi_2(\lambda t + \theta).$$

Отсюда находим

$$v_2(\lambda t + \theta) = v_2(\theta) + \int_0^t [F_2'(\lambda\tau + \theta) - \Phi_2(\lambda\tau + \theta)]\, d\tau.$$

В силу квазипериодичности правой части и подынтегрального выражения должно выполняться следующее равенство:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F_2'(\lambda t + \theta) - \Phi_2(\lambda t + \theta)]\, dt = 0.$$

Отсюда определим функцию $\Phi_2(\theta)$:

$$\Phi_2 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_2'(\lambda t + \theta)\, dt.$$

Теперь учитывая, что $S_0 v_2 = 0$, находим

$$v_2(\theta) = -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t [F_2'(\lambda\tau+\theta)-\Phi_2]\,d\tau\,dt.$$

Функция $w_2(\theta)$ определяется с помощью формулы

$$w_2(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau)X_2'(\lambda\tau+\theta)\,d\tau.$$

Эти формулы определяют вторые из искомых коэффициентов разложений

$$x = \varepsilon w_1(\theta)+\varepsilon^2 w_2(\theta),$$

$$\varphi = \theta+\varepsilon v_1(\theta)+\varepsilon^2 v_2(\theta).$$

Аналогичными формулами определяются остальные коэффициенты разложений.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. – Киев, 1987. – 66 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.41).
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании слабо нелинейных систем // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 4. – С. 483 – 500.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Получено 02.06.97