УДК 517.9

С. В. Янчук, Н. А. Али (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ДИХОТОМИЧНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ

Conditions of exponential stability and dichotomy for pulse linear extensions of dynamical systems on a torus are investigated.

Досліджуються умови стійкості та дихотомії імпульсних лінійних розширень динамічних систем на торі.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m \setminus \Gamma,$$
$$\Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор,

$$\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{T}_m :\ \Psi(\varphi) = 0\},$$

$a(\varphi)$, $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ — 2π-периодические функции из пространства $C^l(\mathcal{T}_m)$.

В данной работе исследуются условия устойчивости и экспоненциальной дихотомичности системы (1), результаты [1] обобщаются на импульсный случай.

Укажем некоторые общие ограничения на поверхность импульсного воздействия Γ. Обозначим через $\varphi_t(\varphi)$, $t > 0$, решение первого уравнения системы (1) такое, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Тогда очевидно, что моменты импульсного воздействия τ будут определяться следующим образом: $\{\tau :\ \Psi(\varphi_\tau(\varphi)) = 0\}$.

Далее будем предполагать, что множество $\{\tau\}$ не имеет предельных точек на любом конечном интервале. В частности, это имеет место, когда функция $\Psi(\varphi)$ непрерывно дифференцируема и пересечения траектории φ_t с поверхностью Γ на торе трансверсальны [2], т. е. в нашем случае

$$\operatorname{grad}\Psi(\varphi_t)\dot{\varphi}_t = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}(\varphi_t)a(\varphi_t) \neq 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{2}$$

При таком предположении, разместив моменты импульсного воздействия в порядке возрастания, получим последовательность $\{\tau_i(\varphi)\}$, для элементов которой выполнено равенство

$$\tau_i(\varphi_\theta(\varphi)) + \theta = \tau_i(\varphi). \tag{3}$$

Обозначим через $\Phi^t_\tau(\varphi)$ матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \qquad t \neq \tau_i(\varphi),$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i(\varphi)} = B(\varphi_t(\varphi))x. \tag{4}$$

Поскольку последовательность τ_i не имеет конечных предельных точек, то, согласно [3], матрицант имеет вид

$$\Phi_\tau^t(\varphi) = \Omega_{\tau_n}^t(\varphi)\left(\prod_{\tau_0 < \tau_k \le \tau_n}\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_k})\Bigr)\Omega_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(\varphi)\right)\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_0})\Bigr)\Omega_\tau^{\tau_0}(\varphi),$$
$$\tau \le \tau_0 \le \tau_n \le t, \tag{5}$$

где Ω_τ^t — матрицант соответствующей линейной системы без импульсного воздействия, принадлежащий пространству $C^l(\mathcal{T}_m)$ [4]. Поэтому $\Phi_\tau^t(\varphi)$ имеет разрывы в точках τ_i, а именно

$$\Phi_\tau^{\tau_i+0}(\varphi) - \Phi_\tau^{\tau_i-0}(\varphi) = B\bigl(\varphi_{\tau_i}\bigr)\Phi_\tau^{\tau_i-0}(\varphi).$$

Более того, можно показать [2], что $\Phi_\tau^t(\varphi)$ удовлетворяет матричному уравнению (4). Известно [4], что для $\Omega_\tau^t(\varphi)$ выполнено соотношение $\Omega_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi)$. Покажем, что аналогичное соотношение справедливо и в импульсном случае.

Лемма 1. *Матрицант системы* (4) *удовлетворяет условию*

$$\Phi_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Phi_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi) \tag{6}$$

для любых $t > \tau > 0$, $\theta > 0$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Доказательство вытекает из следующих преобразований:

$$\Phi_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Omega_{\tau_n}^t(\varphi_\theta(\varphi))\left(\prod_{\tau_0 < \tau_k \le \tau_n}\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_k}(\varphi_\theta(\varphi)))\Bigr)\Omega_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(\varphi_\theta(\varphi))\right)\times$$
$$\times\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_0}(\varphi_\theta(\varphi)))\Bigr)\Omega_\tau^{\tau_0}(\varphi_\theta(\varphi)) =$$
$$= \Omega_{\tau_n+\theta}^{t+\theta}(\varphi)\left(\prod_{\tau_0 < \tau_k \le \tau_n}\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_k+\theta})\Bigr)\Omega_{\tau_{k-1}+\theta}^{\tau_k+\theta}(\varphi)\right)\Bigl(E + B(\varphi_{\tau_0+\theta})\Bigr)\Omega_{\tau+\theta}^{\tau_0+\theta}(\varphi). \tag{7}$$

Поскольку, как видно из (3), моменты импульсного воздействия для $\varphi_t(\varphi)$ сдвинуты на θ относительно соответствующих моментов для $\varphi_t(\varphi_\theta)$, то из (7) сразу следует справедливость утверждения леммы.

С помощью леммы 1 можно также доказать соотношение

$$\Phi_0^{t+\tau}(\varphi) = \Phi_\tau^t(\varphi_\tau)\Phi_0^\tau(\varphi), \qquad t \ge \tau \ge 0. \tag{8}$$

Отметим, что до сих пор мы рассматривали матрицант Φ_τ^t для $t \ge \tau$. Если предположить, что

$$\det(E + B(\varphi)) \ne 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{9}$$

то справедливо равенство $\Phi_\tau^t(\varphi) = \left[\Phi_t^\tau\right]^{-1}$, $t \le \tau$.

Используя лемму 1, равенство 8 и рассуждения [1], легко установить справедливость следующей теоремы об экспоненциальной устойчивости системы 1.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) $a(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $a(\varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица,* $A(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. *Тогда для того чтобы* (1) *была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные* T *и* $d < 1$ *такие, что*

$$\left\|\Phi_0^T(\varphi)\right\| \le d \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь экспоненциальную дихотомию системы (1). Определим экспоненциальную дихотомию данной системы свойствами, аналогичными свойствам дихотомичной системы без импульсного воздействия [1], т. е. существует проектор [2]

$$C(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m \setminus \Gamma), \qquad C^2(\varphi) = C(\varphi) \tag{11}$$

такой, что

$$\left\| \Phi_0^t(\varphi) C(\varphi) \right\| \leq K \exp\{-\gamma t\} \qquad \forall\, t \in R^+, \tag{12}$$

$$\left\| \Phi_0^t(\varphi)(E - C(\varphi)) \right\| \leq K \exp\{\gamma t\} \qquad \forall\, t \in R^-, \tag{13}$$

где

$$K = \text{const} \geq 1, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad R^- = (-\infty, 0], \quad R^+ = [0, +\infty], \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

E — единичная матрица, причем выполнено равенство

$$\Phi_0^t(\varphi) C(\varphi) = C(\varphi_t) \Phi_0^t(\varphi). \tag{14}$$

При таком определении с учетом свойств (6) и (8) мы можем применить результаты из п. 3 [1]. В результате получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) $a(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $a(\varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица,* $A(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, *а также выполнено* (9). *Тогда* (1) *будет экспоненциально дихотомичной тогда и только тогда, когда существует проектор* $C(\varphi)$, *удовлетворяющий условиям* (14), *и постоянные* $T > 0$ *и* $0 < d < 1$, *для которых выполнены неравенства*

$$\left\| \Phi_0^T(\varphi) C(\varphi) \right\| \leq d, \qquad \left\| \Phi_0^{-T}(\varphi)(E - C(\varphi)) \right\| \leq d \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

1. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665–1700.
2. *Ткаченко В. И.* Функция Грина и условия существования инвариантных множеств импульсных систем // Там же. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1379–1383.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. И.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 285 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Получено 21.04.97