УДК 517.962.2

**А. Г. Баскаков** (Воронеж. ун-т, Россия)

# О ДЕКОМПОЗИЦИИ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА*

The results are obtained concerning the reducibility of an operator of weighted shift to a system of scalar operators of weighted shift.

Одержані результати про звідність оператора зваженого зсуву до системи скалярних операторів зваженого зсуву.

**Введение.** Пусть $G$ — локально компактная абелева группа (с групповой операцией, записываемой аддитивно) и $\hat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы $G$. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Символом $\mathcal{F}(G, \mathcal{X})$ (или, короче, $\mathcal{F}$) обозначим одно из следующих банаховых пространств: $L_p = L_p(G, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$, — пространство суммируемых со степенью $p$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $G$ функций, принимающих значения в $\mathcal{X}$, $C = C(G, \mathcal{X})$ — подпространство непрерывных функций из $L_\infty(G, \mathcal{X})$. Если $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то соответствующее пространство обозначается символом $\mathcal{F}(G)$ (например, $C(G) = C(G, \mathbb{C})$ и т. д.).

В банаховом пространстве $\mathcal{F}(G, \mathcal{X})$ рассматривается группа изометрических операторов $S(g)$, $g \in G$, сдвигов функций и $\mathcal{F}(G, \mathcal{X})$, имеющих вид

$$(S(g)x)(s) = x(s+g), \qquad g \in \mathcal{F}, \qquad g, s \in G.$$

В данной статье изучается оператор взвешенного сдвига $\mathcal{K} \in \operatorname{End}\mathcal{F}(G, \mathcal{X})$ вида

$$(\mathcal{K}x)(g) = (A - \mathcal{B}(g))x(g+\omega), \qquad g \in G, \qquad x \in \mathcal{F},$$

где $\omega \in G$, $\omega \neq 0$, $A \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ и $\mathcal{B} \in C(G, \operatorname{End}\mathcal{X})$ — операторнозначная функция.

Основным результатом статьи является теорема 1 о декомпозиции оператора $\mathcal{K}$ в прямую сумму скалярных операторов взвешенного сдвига. Такой результат сводит изучение спектральных свойств оператора $\mathcal{K}$ к изучению скалярных операторов взвешенного сдвига и связан с результатами статьи [1], в которой рассматривались близкие операторы при $G = \mathbb{R}$ и для периодической функции $\mathcal{B}$.

Теорема 1 получена на основе метода подобных операторов, берущего свое начало с работ Пуанкаре, Дюлака [2], Ляпунова [3] и тесно связанного с методом усреднения [4] метода Фридрихса подобных операторов [5].

**1. Теорема о декомпозиции оператора взвешенного сдвига.** Основной результат статьи получен при выполнении следующих трех предположений.

*Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

**Предположение 1.** *Банахово пространство* $X$ *совпадает с* $\mathbb{C}^n$. *На* $X$ *введена норма* $\|x\| = \max_{1 \le k \le n}|x_k|$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ *и в* $\operatorname{End}\mathbb{C}^n$ *берется операторная норма, индуцируемая из* $\mathbb{C}^n$ (*т. е. если* $T \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ *имеет матрицу* $(t_{ij})$ *относительно стандартного базиса* $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$, *то* $\|T\| = \max_{1 \le i \le n}\sum_{j=1}^n |t_{ij}|$).

**Предположение 2.** *Оператор* $A$ *имеет диагональную матрицу в базисе* $(e_i)$ *из* $\mathbb{C}^n$: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 \le i \le n$, *причем* $0 \le |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$.

В третьем предположении используются классы функций из следующего определения.

**Определение 1.** *Линейное подпространство* $\mathfrak{A}(G)$ *из* $C(G)$ *назовем допустимой алгеброй, если выполнены два условия:*

1) $\mathfrak{A}(G)$ — *банахова алгебра (относительно поточечного умножения) со своей нормой, удовлетворяющей условию* $\|x\| \ge \|x\|_C = \sup_{g \in G}|x(g)|$ *для любой функции* $x \in \mathfrak{A}(G)$;

2) *для любой функции* $x$ *из* $\mathfrak{A}(G)$ *функции* $x_{\pm}(g) = x(g \pm \omega)$, $g \in G$, *принадлежат* $\mathfrak{A}(G)$ *и* $\|x\| = \|x_{\pm}\|$.

Если $\mathfrak{A}(G)$ — некоторая допустимая алгебра, то символом $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$ обозначим банахову алгебру операторнозначных функций из $C(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$, матричные элементы которых принадлежат $\mathfrak{A}(G)$, т. е. $X \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$, если функции $x_{ij}(g) = (X(g)e_j, e_i)$, $1 \le i, j \le n$, принадлежат $\mathfrak{A}(G)$. При этом положим $\|X\| = \max_{1 \le i \le n}\sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|$. Алгебру $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$ будем также называть допустимой.

Допустимыми алгебрами являются $C(G)$, алгебра $AP(G)$ скалярных непрерывных почти периодических функций, определенных на $G$, алгебра непрерывных периодических периода $\omega \in \mathbb{R}$ функций, определенных на $G = \mathbb{R}$.

**Предположение 3.** *Функция* $\mathcal{B}$ *принадлежит некоторой допустимой алгебре* $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$.

В последнем пункте используется следующее предположение.

**Предположение 4.** *Множество чисел* $\left\{\gamma(\omega); \gamma \in \hat{G}\right\}$ *плотно на окружности* $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия предположений* 1 – 3 *и функция* $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет условию*

$$\varepsilon = 4\|\mathcal{B}\|d < 1, \qquad d = \min_{i \ne j}\big||\lambda_i| - |\lambda_j|\big|. \tag{1}$$

*Тогда оператор* $\mathcal{K}$ *подобен оператору взвешенного сдвига* $\mathcal{K}_0 \in \operatorname{End}\mathcal{F}$, *имеющего вид*

$$(\mathcal{K}_0 x)(g) = (A - \mathcal{B}_0(g))x(g + \omega),$$

*где*

$$\mathcal{B}_0(g) = \begin{pmatrix} a_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(g) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n(g) \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathfrak{A}(G), \quad 1 \le i \le n,$$

*причем выполняются оценки*

$$\|a_i - b_{ii}\| \le \varepsilon\|\mathcal{B}\|, \quad 1 \le i \le n. \tag{2}$$

*Преобразование подобия осуществляет оператор умножения на некоторую функцию из алгебры* $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End} \mathbb{C}^n)$.

***Доказательство.*** Пусть $P_k$, $k = 1, \ldots, n$, — проекторы из алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^n$, определенные формулами

$$P_k x = (x, e_k)e_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Определим два линейных оператора $J, \Gamma \in \operatorname{End} \mathfrak{A}(G, \operatorname{End} \mathbb{C}^n)$, положив

$$JX = \sum_{k=1}^{n} P_k X P_k, \quad X \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End} \mathbb{C}^n) \text{ (оператор диагонализации)}$$

и определим функцию $\Gamma X$ как решение $Y_0$ уравнения

$$A(S(\omega)Y) - YA = X - JX, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию $JY_0 = 0$ ($S(\omega)Y$ — сдвиг функции $Y$ на $\omega$). Такое решение уравнения (3) существует, единственно и его матричные элементы $y_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, определяются из следующих рассматриваемых в $\mathfrak{A}(G)$ функциональных уравнений

$$\lambda_i y_{ij}(y + \omega) - \lambda_i y_{ij}(g) = x_{ij}(g), \quad i \neq j, \quad g \in G.$$

Если $i < j$, то $|\lambda_i| < |\lambda_j|$, и поэтому функция $y_{ij} \in \mathfrak{A}(G)$ определяется формулой

$$y_{ij}(g) = \left(-1/\lambda_j\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_i/\lambda_j\right)^k x_{ij}(g + k\omega).$$

Отсюда и из предположения 3 (см. также определение 1) получаем оценку

$$\| y_{ij} \| \leq \frac{\| x_{ij} \|}{|\lambda_j| - |\lambda_i|}.$$

При $i > j$ верны формула

$$y_{ij}(g) = (1/\lambda_j) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_j/\lambda_i\right)^{k-1} x_{ij}(g - k\omega)$$

и вытекающая из нее оценка

$$\| y_{ij} \| \leq \frac{\| x_{ij} \|}{|\lambda_i| - |\lambda_j|}.$$

Теперь непосредственно из определения нормы в $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End} \mathbb{C}^n)$ получаем

$$\| \Gamma \| \leq d^{-1}, \quad d = \min_{i \neq j} \left| |\lambda_i| - |\lambda_j| \right|. \tag{4}$$

Отметим еще, что

$$\| J \| = 1. \tag{5}$$

Будем искать преобразование $\mathcal{U}$ оператора $\mathcal{K}$ в виде оператора умножения

$$(\mathcal{U}x)(g) = (I + (\Gamma X)(g))x(g), \quad g \in G, \quad x \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C}^n),$$

где $X$ — подлежащая определению операторнозначная функция из $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End} \mathbb{C}^n)$ и $I$ — тождественный оператор. Подобный для $\mathcal{K}$ оператор $\mathcal{K}_0 \in \operatorname{End} \mathcal{F}(G, \mathbb{C}^n)$ будем искать в виде

$$(\mathcal{K}_0 x)(g) = (A - (JX)(g))x(g + \omega).$$

Таким образом, должно выполняться равенство

$$K\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{K}_0, \tag{6}$$

или

$$(A - \mathcal{B}(g))(S(\omega)(x + \Gamma X x))(g) =$$

$$= (I + (\Gamma X)(g))(A - (JX)(g))x(g + \omega), \quad x \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C}^n), \quad g \in G.$$

С учетом того, что функция $\Gamma X$ является решением уравнения (3), из полученных равенств следует, что равенство (6) выполняется, если функция $X$ является решением нелинейного уравнения

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - (\Gamma X)(JX) + \mathcal{B}, \tag{7}$$

рассматриваемого в банаховой алгебре $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$. Применяя к обеим частям уравнения (7) оператор диагонализации $J$ и учитывая легко проверяемые равенства

$$J((\Gamma X)(JY)) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n),$$

получаем $JX = J(\mathcal{B}\Gamma X) + J\mathcal{B}$ и, следовательно, уравнение (7) эквивалентно (также рассматриваемому в $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$) уравнению

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - (\Gamma X)(J\mathcal{B}) - (\Gamma X)J(\mathcal{B}\Gamma X) + \mathcal{B}. \tag{8}$$

В целях выяснения условий разрешимости уравнения (8) рассмотрим скалярное уравнение

$$t = \varphi(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $\varphi(t) = \|\mathcal{B}\| d^{-2} t^2 + 2\|\mathcal{B}\| d^{-1} t + \|\mathcal{B}\|$. Оно является мажорантным (см. оценки (4) и (5)) для уравнения (7) (более подробно см. [6], гл. XVIII, § 1). Условием существования положительного корня уравнения (9) и, следовательно, условием разрешимости уравнения (8) служит условие (1). Таким образом, шар из $\mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$ вида

$$\{X \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n) : \|X - \mathcal{B}\| \leq t_* - \|\mathcal{B}\|\},$$

где $t_* = 2\|\mathcal{B}\|[(1 - 2\|\mathcal{B}\|d^{-1}) + (1 - 4\|\mathcal{B}\|d^{-1})^{1/2}]^{-1}$ — наименьший положительный корень уравнения (9), содержит единственное решение $X_0 \in \mathfrak{A}(G, \operatorname{End}\mathbb{C}^n)$ уравнения (8). Поскольку

$$\|\Gamma X_0\| \leq \|\Gamma\mathcal{B}\| + \|\Gamma(X_0 - \mathcal{B})\| \leq d^{-1}(\|\mathcal{B}\| + t_* - \|\mathcal{B}\|) <$$

$$< \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}12\right) = 1$$

и $\|(\Gamma X_0)(g)\| \leq \|\Gamma X_0\| < 1$ для всех $g \in G$, то $I + \Gamma X_0$ — обратимая операторнозначная функция, причем функция $g \mapsto (I + \Gamma X_0(g))^{-1} : G \to \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ является непрерывной и ограниченной. Следовательно, имеет место подобие операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0$, причем содержащиеся в формулировке теоремы функции $a_i$, $i = 1, \dots, n$, совпадают с функциями $x_{ii}^0$, $i = 1, \dots, n$ (диагональными матричными элементами функции $X_0$).

Поскольку

$$|a_i(g) - b_{ii}(g)| \leq \|a_i - b_{ii}\| \leq \|J(X_0 - \mathcal{B})\| = \|J(\mathcal{B}\Gamma X_0)\| \leq$$

$$\leq \|\mathcal{B}\| d^{-1} \| X_0\| = 1/4\varepsilon\|X_0\| \leq \varepsilon\|\mathcal{B}\|, \quad g \in G,$$

то получена оценка из условий теоремы 1. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Из теоремы 1 следует, что если функция $\mathcal{B}$ почти периодична, то почти периодическими будут и функции $a_i$, $i = 1, \dots, n$.

**Лемма 1.** *Спектр* $\sigma(\mathcal{K})$ *оператора* $\mathcal{K}$ *имеет свойство*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \{\gamma(\omega)\lambda;\ \gamma \in \hat{G},\ \lambda \in \sigma(\mathcal{K})\}.$$

*В частности, если выполнено предположение* 4, *то множество* $\sigma(\mathcal{K})$ *инвариантно относительно вращений вокруг нуля из комплексной плоскости* $\mathbb{C}$.

***Доказательство.*** Операторы $V(\gamma), \gamma \in \hat{G}$ из алгебры End $\mathcal{F}(G, X)$ вида

$$(V(\gamma)x)(g) = \gamma(g)x(g), \quad g \in G, \quad \gamma \in \hat{G}, \quad x \in \mathcal{F},$$

образуют группу изометрических операторов и выполняются равенства

$$V(\gamma)\mathcal{K}V(\gamma^{-1}) = \gamma(\omega)\mathcal{K}, \quad \gamma \in \hat{G}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{K}$ подобен операторам $\gamma(\omega)\mathcal{K}$, $\gamma \in \hat{G}$ и поэтому $\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\gamma(\omega)\mathcal{K})$ для любого $\gamma \in \hat{G}$. Лемма доказана.

**Лемма 2** [7]. *Пусть выполнено предположение* 4. *Тогда спектр* $\sigma(\mathcal{K})$ *представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k, \tag{10}$$

*где* $\sigma_k = \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_k \le |\lambda| \le \beta_k\}$, $k = 1, \dots, m$, $m \le n$, $0 \le \alpha_1 \le \beta_1 < \alpha_2 \le \le \beta_2 < \dots \le \beta_m$. *Проектор Рисса* $P(\sigma_k, \mathcal{K})$, *построенный по спектральному множеству* $\sigma_k$, *представим в виде*

$$(P(\sigma_k, \mathcal{K})x)(g) = P_k(g)x(g), \quad x \in \mathcal{F}, \quad g \in G,$$

*где* $P_k$ — *принадлежащая пространству* $C(G, \mathrm{End}\, \mathbb{C}^n)$ *проекторнозначная функция.*

Далее всюду считается выполненным предположение 4.

***Замечание* 2.** При выяснении условий разрешимости уравнения (7) можно использовать теорему о сжимающих отображениях. Оператор

$$\Phi(X) = \mathcal{B}\Gamma X - (\Gamma X)(J\mathcal{B}) - (\Gamma X)J(\mathcal{B}\Gamma X), \quad X \in \mathfrak{A}(G, \mathrm{End}\, \mathbb{C}^n)$$

отображает шар с центром в нуле и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ из банахова пространства $\mathfrak{A}(G, \mathrm{End}\, \mathbb{C}^n)$ в себя, является на нем сжимающим с константой сжатия $q(\varepsilon) = = 1 - (1 - 4\varepsilon)^{1/2}$. Следовательно, $|a_i(g)| \le 2\|\mathcal{B}\|$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $g \in G$. В условиях теоремы 1 спектр $\sigma(\mathcal{K})$ оператора $\mathcal{K}$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K}_0) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(\mathcal{K}_i),$$

где $\mathcal{K}_i \in \mathrm{End}\, \mathcal{F}(G)$, $1 \le i \le n$, — скалярные операторы, определенные формулами

$$(\mathcal{K}_i x)(g) = (\lambda_i + a_i(g))x(g + \omega), \quad x \in \mathcal{F}(G).$$

Из леммы 2 следует, что спектр каждого оператора $\mathcal{K}_i$ является связным множеством, а из приведенных в теореме 1 оценок следуют включения

$$\sigma(\mathcal{K}_i) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda_i| - 2\|\mathcal{B}\| \le |\lambda| \le |\lambda_i| + 2\|\mathcal{B}\|\}, \quad 1 \le i \le n.$$

Поэтому из предположения 4 следует, что множество $\sigma(\mathcal{K})$ представимо в виде объединения $n$ взаимно непересекающихся таких множеств (колец из $\mathbb{C}$).

**2. О спектральном анализе скалярных операторов взвешенного сдвига.** Теорема 1 (см. также замечание 2) сводит изучение оператора взвешенного сдвига $\mathcal{K}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, к изучению скалярных операторов взвешенного сдвига (действующих в банаховом пространстве $\mathcal{F}(G)$ скалярных функций). Поэтому естественно сделать некоторые уточнения относительно спектральной теории таких операторов.

Рассмотрим скалярный оператор взвешенного сдвига вида

$$(\mathcal{A}x)(g) = a(g)x(g+\omega), \quad g \in G, \quad x \in C(G),$$

где $a$ — некоторая функция из допустимой алгебры $\mathfrak{A}(G)$.

Если она удовлетворяет условию $a(g+\omega) = a(g)$ для любого $g \in G$, то оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End} C(G)$ представим в виде произведения $\mathcal{A}_0 S(\omega)$ перестановочных между собой операторов $S(\omega)$ и $(\mathcal{A}_0 x)(g) = a(g)x(g)$, $g \in G$, $x \in$ $\in C(G)$.

Так как $\sigma(\mathcal{A}_0)$ совпадает с замыканием множества значений функции $a$, выполняется равенство $\sigma(S(\omega)) = \mathbb{T}$, и поскольку сужение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство

$$C_\omega(G) = \{ x \in C(G) \colon x(g+\omega) = x(g),\ g \in G \}$$

совпадает с $\mathcal{A}_0$, то из леммы 1 получаем, что справедливо равенство

$$\sigma(\mathcal{A}) = \overline{\{ a(g)\gamma \colon g \in G,\ \gamma \in \mathbb{T} \}}. \tag{11}$$

Для произвольной функции $a \in \mathfrak{A}(G)$ описание спектра оператора $\mathcal{A}$ осуществляется в следующей теореме, непосредственно вытекающей из связности множества $\sigma(\mathcal{A})$, леммы 2 и формулы Гельфанда для спектрального радиуса оператора $\mathcal{A}$. При ее формулировке используется величина

$$\alpha(b) = \lim_{n \to \infty} \left( \sup_{g \in G} |b(g)b(g+\omega)\ldots b(g+n\omega)|^{1/n} \right),$$

где $b \in C(G)$.

**Теорема 2.** *Спектр* $\sigma(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \colon \alpha_0 \le |\lambda| \le \alpha(a) \}$, *где* $\alpha_0 = \alpha(1/a)$, *если* $\inf_{g \in G} |a(g)| > 0$, *и* $\alpha_0 = 0$, *если* $\inf_{g \in G} |\alpha(g)| > 0$.

**Лемма 3.** *Если* $a \in AP(G)$, *то существует предел*

$$\tilde{a} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S(k\omega)a, \tag{12}$$

*для которого справедливы равенства* $\tilde{a}(g+\omega) = \tilde{a}(g)$, $g \in G$ *и функция* $a - \tilde{a}$ *принадлежит замыканию множества значений* $\operatorname{Im}(S(\omega) - I)$ *оператора* $S(\omega) - I \in \operatorname{End} AP(G)$. *Функция* $\tilde{a} \equiv \mathrm{const}$, *если спектр Бора* $\sigma(a) = \{ \chi_1, \chi_2, \ldots \}$ *функции* $a$ *имеет свойство* $\chi_k(\omega) \ne 1$ *для любого* $\chi_k \in \sigma(a)$, *не являющегося единицей группы* $\hat{G}$.

***Доказательство.*** Поскольку $S(\omega)$ — обратимая изометрия и множество сдвигов почти периодической функции $a$ относительно компактно в $AP(G)$, то последовательность $a_N = (1/(N+1)) \sum_{k=0}^{N} S(k\omega)a$, $N \ge 1$, относительно компактна в $AP(G)$. Теперь достаточно сослаться на эргодическую теорему (см., например, [8, с. 704]), из которой следует, что $S(\omega)\tilde{a} = \tilde{a}$ и $a - \tilde{a} \in$ $\in \overline{\operatorname{Im}(S(\omega) - I)}$. Лемма доказана.

В условиях следующей теоремы предполагается, что функция $a \in AP(G)$ удовлетворяет условию отделенности от нуля

$$\inf_{g \in G} |\alpha(g)| > 0$$

и $G$ — связная группа. Согласно теореме Бора – ван Кампена [9], функция $a$ представима в виде

$$a(g) = \chi_0(g) \exp a_0(g), \quad g \in G,$$

где $\chi_0 \in \hat{G}$ и $a_0 \in AP(G)$. Тогда из леммы 3 следует существование предела $\tilde{a}_0$ вида (12) и что $a_0 - \tilde{a}_0 \in \overline{\operatorname{Im}(S(\omega) - I)}$.

**Теорема 3.** *Предположим, что* $a_0 - \tilde{a}_0 \in \operatorname{Im}(S(\omega) - I)$. *Тогда оператор* $(\mathcal{K}x)(g) = a(g)x(g+\omega)$, $x \in \mathcal{F}(G)$ *подобен оператору*

$$(\mathcal{K}_0 x)(g) = \chi_0(g) \exp \tilde{a}_0(g) x(g+\omega)$$

*и имеет место представление*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \overline{\{\chi_0(g)(\exp \tilde{a}_0(g))\gamma;\ g \in G,\ \gamma \in \mathbb{T}\}}. \tag{13}$$

***Доказательство.*** Из условий теоремы следует, что существует функция $\varphi \in AP(G)$ такая, что $a_0 - \tilde{a}_0 = (S(\omega) - I)\varphi$. Рассмотрим обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathcal{F}(G)$ вида

$$(Ux)(g) = (\exp \varphi(g)) x(g), \quad x \in \mathcal{F}(G), \quad g \in G.$$

Справедливы равенства

$$(U\mathcal{K}U^{-1}x)(g) = \exp \varphi(g) a(g)(\exp - \varphi(g+\omega)) x(g+\omega) =$$
$$= \chi_0(g)(\exp \tilde{a}_0(g)) x(g+\omega),$$

т. е. операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0$ подобны. Следовательно, $\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K}_0)$. Поскольку оператор $\mathcal{K}_0$ представим в виде

$$(\mathcal{K}_0 x)(g) = \chi_0(\omega) c(g) x(g+\omega),$$

где $c(g) = \chi_0(\omega)^{-1} \chi_0(g) \exp \tilde{a}_0(g)$ удовлетворяет условию $c(g+\omega) = c(g)$, $g \in G$, то $\sigma(\mathcal{K}_0) = \chi_0(\omega)\sigma(\mathcal{K}_1)$, где $(\mathcal{K}_1 x)(g) = c(g)x(g+\omega)$. Осталось использовать равенство (11), имеющее место для $\sigma(\mathcal{K}_1)$. Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Поскольку всегда $a_0 - \tilde{a}_0 \in \overline{\operatorname{Im}(S(\omega) - I)}$ (см. лемму 3), то $a_0 - \tilde{a}_0 = \lim_{n \to \infty} b_n$, где $b_n \in \operatorname{Im}(S(\omega) - I)$. Отсюда, используя последовательность операторов $(U_n x)(g) = (\exp b_n(g)) x(g)$, $n \geq 1$, получаем представление (13), которое является аналогом известной теоремы Массера для скалярных дифференциальных операторов [10].

1. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 514–519.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1971. – 304 с.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
5. *Фридрихс К. О.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1969. – 232 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
7. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ разностных операторов // Докл. АН России. – 1997. – **353**, № 5.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 895 с.
9. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
10. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

Получено 27.03.97