УДК 517.9

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider nonlinear (with Fredholm operator in a linear part) boundary-value problems for systems of ordinary differential equations in a neighborhood of generating solutions. By using the Lyapunov – Schmidt method, we establish conditions for the existence of solutions of the boundary-value problems under consideration and obtain iterative algorithms for their construction.

Розглядаються нелінійні (з нетеровим оператором в лінійній частині) крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь в околі породжуючих розв'язків. На основі методу Ляпунова–Шмідта отримані умови існування розв'язків розглядуваних крайових задач та ітераційні алгоритми їх побудови.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную краевую задачу для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Z(z, t), \tag{1}$$

$$lz = \varphi(z(\cdot)) \tag{2}$$

в окрестности решений $z_0 = P_{Q_r} c_r$ для каждого $c_r \in R^r$ задачи

$$\dot{z} = 0, \quad lz = 0, \tag{3}$$

которую выберем в качестве порождающей для (1), (2). Найдем коэффициентные условия существования решений $z = z(t)\colon z(\cdot) \in C^1[a, b]$ задачи (1), (2) и предложим итерационные алгоритмы их построения в окрестности решений $z_0 = P_{Q_r} c_r$ порождающей для (1), (2) краевой задачи.

Используем следующие предположения и обозначения [1]: нелинейная n-мерная вектор-функция $Z(z, t)$ такая, что $Z(\cdot, t) \in C^1[\|z - z_0\| \le q]$, $Z(z, \cdot) \in C[a, b]$; l и φ есть соответственно линейный и нелинейный m-мерные ограниченные векторные функционалы, φ — непрерывно дифференцируемый по Фреше; Z и φ имеют достаточно малые константы Липшица.

Пусть $Q = lE$ — $(m \times n)$-мерная матрица, полученная в результате подстановки единичной матрицы в краевое условие (3), а Q^+ — единственная $(n \times m)$-мерная матрица, псевдообратная по Муру – Пенроузу к Q. Через P_Q обозначим $(n \times n)$-мерную матрицу (ортопроектор: $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), которая проектирует действительное пространство R^n на нуль-пространство $N(Q)$ матрицы Q, $P_Q\colon R^n \to N(Q)$; аналогично P_{Q^*} — $(m \times m)$-мерная матрица; $R^m \to N(Q^*)$.

Далее, обозначим через P_{Q_r} $(n \times r)$-мерную матрицу, столбцы которой являются r линейно независимыми столбцами матрицы $P_Q (r = n - n_1,\ n_1 = \operatorname{rank} Q \le \min(n, m))$; $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, строки которой являются d линейно независимыми строками матрицы $P_{Q^*} (d = m - n_1)$.

Линейная часть краевых задач (1), (2) есть оператор, не имеющий обратного. Это не позволяет непосредственно применять традиционные методы исследования краевых задач, основанные на использовании принципа неподвижной точки. В нашем случае необратимость линейной части оператора исходной краевой задачи является следствием того, что число m краевых условий не совпадает с размерностью n дифференциальной системы. Такие задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений являются нетеровыми (или с нетеровой линейной частью). Большое количество работ, посвященных изучению таких задач, выполнено в предположении их фредгольмовости ($m = n$) [2–4]. Более того, в большинстве из них предполагается существование обратного оператора к оператору линейной части исходной краевой задачи (так называемый некритический случай). Используя аппарат обобщенно-обратных матриц и вариант [1–3] метода Ляпунова – Шмидта, будем рассматривать критические (или резонансные) краевые задачи. Прежде чем приступить к изучению исходной краевой задачи, сформулируем [1, с. 169] критерий разрешимости линейной неоднородной краевой задачи

$$\dot{z} = f_0(t), \quad lz = \alpha, \quad t \in [a, b]. \tag{4}$$

Лемма. *Предположим, что* $\operatorname{rang}(Q = lE) = n_1 \le \min(n, m)$. *Тогда однородная краевая задача* (3) *имеет* r *-параметрическое семейство решений* $z_0(c_r) = P_{Q_r} c_r$. *Неоднородная краевая задача* (4) *разрешима тогда и только тогда, когда* $f_0(t) \in C[a, b]$ и $\alpha \in R^m$ *удовлетворяют условию*

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - l \int_a^b g(\cdot, \tau) f_0(\tau) d\tau \right\} = 0$$

и имеет r*-параметрическое семейство решений* $z(t, c_r)$: $z(\cdot, c_r) \in C^1[a, b]$:

$$z(t, c_r) = P_{Q_r} c_r + (G[f_0])(t) + Q^+ \alpha, \quad c_r \in R^r, \tag{5}$$

где

$$(G[f_0])(t) = \int_a^b g(t, \tau) f_0(\tau) d\tau$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (4);

$$g(t, \tau) = \begin{cases} 1, & a \le \tau \le t \le b; \\ 0, & a \le t < \tau \le b. \end{cases}$$

2. Основной результат. Выполняя в (1), (2) замену переменных

$$z(t) = z_0(c_r) + y(t), \tag{6}$$

получаем задачу нахождения решения $y = y(t)$: $y(\cdot) \in C^1[a, b]$ краевой задачи

$$\dot{y} = Z(z_0(c_r) + y, t), \quad ly = \varphi(z_0(c_r) + y(\cdot)) \tag{7}$$

в окрестности точки $y = 0$, предполагая существование такого решения в точке $y = 0$. Принимая во внимание условия на нелинейность, имеем следующие разложения в окрестности точки $y = 0$:

$$Z(z_0(c_r) + y, t) = Z(z_0(c_r), t) + A_1(t, c_r)y + R(y, t), \tag{8}$$

$$\varphi(z_0(c_r) + y(\cdot)) = \varphi(z_0(c_r)) + l_1 y(\cdot) + R_0(y(\cdot)), \tag{9}$$

где

$$A_1(t) = A_1(t, c_r) = \left. \frac{\partial Z(z, t)}{\partial z} \right|_{z = z_0(t, c_r)},$$

$$R(0, t) = 0, \quad \frac{\partial R(0, t)}{\partial y} = 0;$$

$l_1 y(\cdot)$ — линейная часть векторного функционала $\varphi(z_0(c_r) + y(\cdot))$;

$$R_0(0) = 0, \quad \frac{\partial R_0(0)}{\partial y} = 0.$$

С учетом последнего получаем задачу нахождения условий существования решений $y(t)$: $y(\cdot) \in C^1[a, b]$ краевой задачи

$$\dot{y} = Z(z_0(c_r), t) + A_1(t) y + R(y, t), \tag{10}$$

$$l y = \varphi(z_0(c_r)) + l_1 y(\cdot) + R_0(y(\cdot)) \tag{11}$$

в окрестности точки $y = 0$.

Необходимое условие существования искомого решения краевой задачи (1), (2) формулируется следующим образом.

Теорема 1 (*необходимое условие*). *Предположим, что нелинейная краевая задача* (1), (2) *имеет решение* $z(t)$: $z(\cdot) \in C^1[a, b]$ *в окрестности точки* $z_0 = P_{Q_r} c_r$ *с константой* $c_r = c_r^* \in R^r$ $(r = n - n_1,\ n_1 = \operatorname{rang}[Q = lE])$. *Тогда вектор констант* c_r^* *удовлетворяет уравнению*

$$F(c_r) = P_{Q_d^*} \left\{ \varphi(z_0(c_r)) - l \int_a^b g(\cdot, \tau) Z(z_0(c_r), \tau) d\tau \right\} = 0. \tag{12}$$

Доказательство теоремы осуществляется с помощью леммы и аналогично доказательству соответствующей теоремы для периодической слабо нелинейной краевой задачи [1, с. 183; 3, с. 290]. В этом случае уравнение (12) трансформируется в хорошо известное уравнение для порождающих амплитуд соответствующей периодической краевой задачи.

Критический случай первого порядка. Формально рассматривая нелинейности в краевой задаче (10), (11) как неоднородности и применяя к задаче лемму, получаем следующее представление решения $y(t)$ краевой задачи (10), (11):

$$y(t) = P_{Q_r} c + y^{(1)}(t), \tag{13}$$

где неизвестный вектор констант $c \in R^r$ определяется из условий существования решения

$$P_{Q_d^*} \left\{ \varphi(z_0(c_r^*)) + l_1 [P_{Q_r} c + y^{(1)}(\cdot)] + R_0(y(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot, \tau) [Z(z_0(c_r^*), \tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r} c + y^{(1)}(\tau)) + R(y(\tau), \tau)] d\tau \right\} = 0. \tag{14}$$

Неизвестная вектор-функция $y^{(1)}(t)$ может быть представлена с помощью обобщенного оператора Грина $(G[*])(t)$ и псевдообратной матрицы Q^+ следующим образом:

$$y^{(1)}(t) = Q^+ \varphi(z_0(c_r^*) + y(\cdot)) + (G[Z(z_0(c_r^*) + y(\tau), \tau)])(t). \tag{15}$$

Учитывая, что вектор констант $c_r^* \in R^r$ необходимо удовлетворяет уравнению (12), получаем следующую операторную систему, эквивалентную на $C^1[a, b]$ исходной краевой задаче (1), (2):

$$y(t) = P_{Q_r} c + y^{(1)}(t), \tag{16}$$

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\left\{ l_1 y^{(1)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau) y^{(1)}(\tau) + R(y(\tau),\tau)\right] d\tau \right\},$$

$$y^{(1)}(t) = Q^+ \varphi(z_0(c_r^*) + y(\cdot)) + (G[Z(z_0(c_r^*) + y(\tau),\tau)])(t),$$

где

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{ l_1 E - l \int_a^b g(\cdot,\tau) A_1(\tau)\, d\tau \right\} P_{Q_r}$$

— $(d \times r)$-мерная матрица

$$(d = m - n_1, \quad r = n - n_1, \quad n_1 = \operatorname{rang} Q).$$

Обозначим через P_{B_0} $(r \times r)$-мерную матрицу (ортопроектор), которая проектирует пространство R^r на $N(B_0)$, а через $P_{B_0^*}$ $(d \times d)$-мерную матрицу (ортопроектор), которая проектирует пространство R^d на нуль-пространство $N(B_0^*)$. Тогда при условиях

$$P_{B_0} = 0, \qquad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \tag{17}$$

второе уравнение в операторной системе (16) единственным образом разрешимо относительно c:

$$c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{ l_1 y^{(1)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau) y^{(1)}(\tau) + R(y(\tau),\tau)\right] d\tau \right\},$$

где B_0^+ — псевдообратная к B_0 $(r \times d)$-матрица.

Структура полученной операторной системы (16) позволяет [1, с. 188; 3, с. 298] для ее решения применить метод простых итераций, а также с помощью метода мажорант Ляпунова доказать сходимость итерационного процесса в достаточно малой окрестности порождающего решения и получить необходимые оценки погрешности приближений. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (*достаточное условие*). *Для любого корня $c_r = c_r^* \in R^r$ уравнения* (12) *при условии* (17) *существует единственное решение $z = z(t, c_r^*) \in C^1[a,b]$ исходной краевой задачи* (1), (2) *в достаточно малой окрестности порождающего решения $z_0(c_r^*) = P_{Q_r} c_r^*$. Это решение может быть найдено с помощью итерационного процесса*

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{ l_1 y_k^{(1)}(\cdot) + R_0(y_k(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot,\tau)\left[A_1(\tau) y_k^{(1)}(\tau) + R(y_k(\tau),\tau)\right] d\tau \right\},$$

$$y_{k+1}^{(1)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*) + y_k(\tau), \tau)])(t) + Q^+ \varphi(z_0(c_r^*) + y_k(\cdot)), \tag{18}$$

$$y_{k+1}(t) = P_{Q_r} c_k + y_{k+1}^{(1)}(t),$$

$$z_k(t) = P_{Q_r} c_r^* + y_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$y_0^{(1)} = y_0 = 0,$$

сходящегося в достаточно малой окрестности точки $z_0(c_r^*) = P_{Q_r} c_r^* \in R^r$.

Замечания. **1.** В случае, когда краевая задача (1), (2) имеет фредгольмов оператор в линейной части $(m = n)$, из $P_{B_0} = 0$ следует $P_{B_0^*} = 0$ и второе условие $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ в (17) автоматически выполняется. По аналогии с [1, 3] можно показать, что условие $P_{B_0} = 0$ (или $\det B_0 \neq 0$, $(m = n)$) эквивалентно требованию простоты корней уравнения (12).

2. Рассмотренный случай будем называть критическим случаем первого порядка [1, с. 183; 3, с. 297]. Он характерен тем, что ответ на вопрос о существовании решения краевой задачи (1), (2) полностью решается после анализа краевой задачи

$$\dot{y} = Z(z_0(c_r^*), t), \tag{19}$$

$$ly = \varphi(z_0(c_r^*)), \tag{20}$$

используемой для определения первого приближения к искомому решению.

Критический случай второго порядка. Рассмотрим теперь случай, когда $P_{B_0} \neq 0$, т. е. случай кратных корней уравнения (12), который будем называть критическим случаем второго порядка. Он характеризуется тем, что ответ на вопрос о существовании решения исходной краевой задачи дается после анализа краевой задачи, служащей для нахождения второго приближения. При этом существование решения исходной задачи зависит от условия, составляемого с помощью нелинейности и первого приближения к искомому решению.

Итак, пусть выполнено условие $P_{B_0} \neq 0$ $(\operatorname{rang} B_0 < r)$. Тогда второе уравнение в операторной системе (16) разрешимо относительно $c \in R^r$ тогда и только тогда, когда

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 y^{(1)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot, \tau) [A_1(\tau) y^{(1)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)] \, d\tau \right\} = 0, \tag{21}$$

и при этом имеет решение

$$c = c^{(0)} + c^{(1)},$$

где

$$c^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ l_1 y^{(1)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) - \right.$$

$$\left. - l \int_a^b g(\cdot, \tau) [A_1(\tau) y^{(1)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)] \, d\tau \right\},$$

$c^{(1)}$ — произвольная r-мерная константа из $N(B_0)$, $c^{(1)} = P_{B_0}c = P_{B_0}c^{(1)} \in \in N(B_0) \subseteq R^r$.

Учитывая представление для c, из третьего уравнения операторной системы (16) получаем

$$y^{(1)}(t) = G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(t), \tag{22}$$

где

$$G_1(t) = ((G[A_1(\tau)])(t) + Q^+ l_1 E)P_{Q_r}$$

— $(n \times r)$-мерная матрица;

$$y^{(2)}(t) = Q^+[\varphi(z_0(c_r^*) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} +$$

$$+ y^{(2)}(\cdot)) + R_0(y(\cdot))] + (G[Z(z_0(c_r^*), \tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c^{(0)} +$$

$$+ G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + y^{(2)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)])(t). \tag{23}$$

С учетом представления (22) из условия (21) разрешимости второго уравнения системы (16) получаем алгебраическую систему

$$B_1 c^{(1)} = -P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1 y^{(2)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) -$$

$$- l\int_a^b g(\cdot, \tau)[A_1(\tau)y^{(2)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)]\,d\tau\Big\}, \tag{24}$$

где

$$B_1 = P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1 G_1(\cdot) - l\int_a^b g(\cdot, \tau)A_1(\tau)G_1(\tau)d\tau\Big\}P_{B_0}$$

— $(d \times r)$-мерная матрица $(d = m - n_1,\ r = n - n_1,\ n_1 = \operatorname{rang} Q)$.

Обозначим через P_{B_1} $(r \times r)$-мерную матрицу-ортопроектор: $R^r \to N(B_1)$, а через $P_{B_1^*}$ — $(d \times d)$-мерную матрицу-ортопроектор: $R^d \to N(B_1^*)$. Тогда необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (24) будет иметь вид

$$P_{B_1^*}P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1 y^{(2)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) -$$

$$- l\int_a^b g(\cdot, \tau)[A_1(\tau)y^{(2)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)]\,d\tau\Big\} = 0.$$

При этом условии система (24) разрешима относительно $c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$c^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1 y^{(2)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) -$$

$$- \, l \int_a^b g(\cdot, \tau) [A_1(\tau) y^{(2)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)] \, d\tau \Bigg\} + c^{(2)}.$$

Здесь $c^{(2)}$ — произвольный вектор из $N(B_0) \cap N(B_1)$; $c^{(2)} = P_{B_1} c^{(1)} = P_{B_1} P_{B_0} c^{(1)} \in N(B_0) \cap N(B_1)$. Предположим, что пересечение нуль-пространств $N(B_0)$ и $N(B_1)$ нулевое, т. е. $P_{B_1} P_{B_0} = 0$, тогда (24) имеет единственное решение $(c^{(2)} = 0)$. Достаточным условием разрешимости уравнения (24) является требование, чтобы пересечение нуль-пространств $N(B_0^*)$, $N(B_1^*)$, $N(Q^*)$ было нулевым: $P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$.

Таким образом, при условиях

$$P_{B_0} \neq 0, \quad P_{B_1} P_{B_0} = 0, \quad P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \tag{25}$$

система (16) преобразуется в эквивалентную операторную систему

$$y(t) = P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c^{(0)} + G_1(t) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(t),$$

$$c^{(0)} = - B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 (G_1(\cdot) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot)) + R_0(y(\cdot)) -$$

$$- \, l \int_a^b g(\cdot, \tau) [A_1(\tau)(G_1(\tau) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\tau)) + R(y(\tau), \tau)] \, d\tau \Bigg\}, \tag{26}$$

$$c^{(1)} = - B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Bigg\{ l_1 y^{(2)}(\cdot) + R_0(y(\cdot)) -$$

$$- \, l \int_a^b g(\cdot, \tau) [A_1(\tau) y^{(2)}(\tau) + R(y(\tau), \tau)] \, d\tau \Bigg\},$$

$$y^{(2)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*), \tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c^{(0)} +$$

$$+ \, G_1(\tau) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\tau)) + R(y(\tau), \tau)])(t) +$$

$$+ \, Q^+ [\varphi(z_0(c_r^*)) + l_1 (P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c^{(0)} + G_1(\cdot) P_{B_0} c^{(1)} + y^{(2)}(\cdot)) + R_1(y(\cdot))].$$

Операторная система (26) принадлежит классу систем [3, с. 202], для решения которых применим метод простых итераций.

Итерационный алгоритм. Построим итерационный алгоритм метода простых итераций для отыскания решения операторной системы (26). Первое приближение $y_1^{(2)}$ к $y^{(2)}$ выберем в виде

$$y^{(2)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*), \tau)])(t) + Q^+ \varphi(z_0(c_r^*)).$$

Вектор-функция $y_1^{(2)}$ представляет собой решение следующей краевой задачи:

$$\dot{y}_1 = Z(z_0(c_r^*), t), \quad l y_1 = \varphi(z_0(c_r^*)). \tag{27}$$

Такое решение существует в силу выбора $c_r^* \in R^r$ из уравнения (12). Первое приближение y_1 краевой задачи (10), (11) считаем равным $y_1^{(2)}$. Второе приближение $y_2^{(2)}$ к $y^{(2)}$ полагаем равным

$$y_2^{(2)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*), \tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + $$
$$+ y^{(2)}(\tau)) + R(y_1^{(2)}(\tau), \tau)])(t) +$$
$$+ Q^+[\varphi(z_0(c_r^*)) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(\cdot)) + R_1(y_1^{(2)}(\cdot))].$$

По определению вектор-функция $y_2^{(2)}$ есть частное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot y_2 &= Z(z_0(c_r^*), t) + A_1(t)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(t)) + R(y_1^{(2)}(t), t), \\ l y_2 &= \varphi(z_0(c_r^*) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_1^{(2)}(\cdot)) + R_1(y_1^{(2)}(\cdot)). \end{aligned} \tag{28}$$

Существование такого решения обеспечивается выбором векторной константы $c_1^{(0)} \in R^r$ из условия разрешимости типа (5) задачи (28):

$$B_0 c_1^{(0)} + P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 y_1^{(2)}(\cdot) + R_0(y_1^{(2)}(\cdot)) -$$
$$- l\int_a^b g(\cdot, \tau)[A_1(\tau) y_1^{(2)}(\tau) + R(y_1^{(2)}(\tau), \tau)]\, d\tau \Bigg\} = 0. \tag{29}$$

В свою очередь, необходимое и достаточное условие разрешимости системы (29) имеет вид

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 y_1^{(2)}(\cdot) + R_0(y_1^{(2)}(\cdot)) -$$
$$- l\int_a^b g(\cdot, \tau)[A_1(\tau) y_1^{(2)}(\tau) + R(y_1^{(2)}(\tau), \tau)]\, d\tau \Bigg\} = 0. \tag{30}$$

При этом условии из (29) определяем первое приближение $c_1^{(0)}$ к $c^{(0)} \in R^r$ по формуле

$$c_1^{(0)} = -P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 y_1^{(2)}(\cdot) + R_0(y_1^{(2)}(\cdot)) -$$
$$- l\int_a^b g(\cdot, \tau)[A_1(\tau) y_1^{(2)}(\tau)) + R(y_1^{(2)}(\tau), \tau)]\, d\tau \Bigg\}.$$

В качестве второго приближения $y_2(t)$ к искомому решению $y(t)$ используем выражение

$$y_2(t) = P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_1^{(0)} + y_2^{(2)}(t).$$

Третье приближение ищем как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot y_3 &= Z(z_0(c_r^*), t) + A_1(t)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_2^{(0)} + G_1(\tau) P_{B_0} c_1^{(1)} + \\ &\quad + y_2^{(2)}(t)) + R(y_2(t), t), \\ l y_2 &= \varphi(z_0(c_r^*) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_2^{(0)} + G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + \\ &\quad + y_2^{(2)}(\cdot)) + R_0(y_2(\cdot)), \end{aligned} \tag{31}$$

где константы $c_2^{(0)}$, $c_1^{(1)}$ определяются из условия ее разрешимости

$$B_0 c_2^{(0)} + P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 [G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + y_2^{(2)}(\cdot)] + R_0(y_2(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau)(G_1(\tau)P_{B_0} c_1^{(1)} + y_2^{(2)}(\tau)) + R(y_2(\tau),\tau)]\, d\tau \Big\} = 0.$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости последней системы относительно $c_2^{(0)} = (I_r - P_{B_0}) c_2^{(0)} \in R^r \ominus N(B_0)$ получим алгебраическую систему для определения $c_1^{(1)} \in N(B_0)$:

$$B_1 c_1^{(1)} = - P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 y_2^{(2)}(\cdot) + R_0(y_2(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau) y_2^{(2)}(\tau) + R(y_2(\tau),\tau)]\, d\tau \Big\}.$$

Поскольку предполагаются выполненными условия

$$P_{B_1} P_{B_0} = 0, \qquad P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0,$$

то из последних двух систем однозначно находим первое приближение $c_1^{(1)}$ к $c^{(1)}$ и второе приближение $c_2^{(0)}$ к $c^{(0)}$ по формулам

$$c_1^{(1)} = - B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 y_2^{(2)}(\cdot) + R_0(y_2(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau) y_2^{(2)}(\tau)) + R(y_2(\tau),\tau)]\, d\tau \Big\},$$

$$c_2^{(0)} = - B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 [G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + y_2^{(2)}(\cdot)] + R_0(y_2(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau)(G_1(\tau)P_{B_0} c_1^{(1)} + y_2^{(2)}(\tau)) + R(y_2(\tau),\tau)]\, d\tau \Big\}.$$

В качестве третьего приближения $y_3^{(2)}(t)$ к $y^{(2)}(t)$ и $y_3(t)$ к $y(t)$ возьмем следующие:

$$y_3^{(2)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*),\tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c_2^{(0)} +$$

$$+ G_1(\tau) P_{B_0} c_1^{(1)} + y^{(2)}(\tau)) + R(y_2(\tau),\tau])(t) +$$

$$+ Q^+[\varphi(z_0(c_r^*)) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c_2^{(0)} + G_1(\cdot) P_{B_0} c_1^{(1)} + y_2^{(2)}(\cdot)) + R_0(y_2(\cdot))],$$

$$y_3(t) = P_{Q_r}(I_r - P_{B_0}) c_2^{(0)} + G_1(t) P_{B_0} c_1^{(1)} + y_3^{(2)}(t).$$

Продолжая аналогичный процесс, из операторной системы (26) для определения решения $y(\cdot) \in C^1[a,b]$ краевой задачи (10), (11), а значит, и решения $z(t, c_r^*)$ краевой задачи (1), (2) получаем следующую итерационную процедуру:

$$c_{k-1}^{(1)} = -B_0^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 y_k^{(2)}(\cdot) + R_0(y_k(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau) y_k^{(2)}(\tau)) + R(y_k(\tau),\tau)]\,d\tau \Big\},$$

$$c_k^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 [G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_k^{(2)}(\cdot)] + R_0(y_k(\cdot)) -$$

$$- l \int_a^b g(\cdot,\tau)[A_1(\tau)(G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_k^{(2)}(\tau)) + R(y_k(\tau),\tau)]\,d\tau \Big\},$$

$$y_{k+1}^{(2)}(t) = (G[Z(z_0(c_r^*),\tau) + A_1(\tau)(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} +$$

$$+ G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_k^{(2)}(\tau)) + R(y_k(\tau),\tau)])(t) +$$

$$+ Q^+[\varphi(z_0(c_r^*)) + l_1(P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} + G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_k^{(2)}(\cdot)) + R_0(y_k(\cdot))], \tag{32}$$

$$y_{k+1}(t) = P_{Q_r}(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} + G_1(t) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + y_{k+1}^{(2)}(t),$$

$$z_k(t, c_r^*) = z_0(c_r^*) + y_k(t),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \qquad y_0(t) = y_0^{(2)}(t) = 0.$$

Сходимость итерационного процесса устанавливается методом мажорирующих уравнений Ляпунова, схема которого описана в работах [1 – 3]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (*достаточное условие*). *Пусть краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда для любого корня* $c_r = c_r^* \in R^r$ *уравнения* (12) *при условиях* (25), (30) *существует единственное решение* $z = z(t, c_r^*)$: $z(\cdot, c_r^*) \in C^1[a,b]$ *исходной краевой задачи* (1), (2) *в достаточно малой окрестности порождающего решения* $z_0(c_r^*) = P_{Q_r} c_r^*$. *Это решение может быть найдено с помощью итерационного процесса* (32), *сходящегося в достаточно малой окрестности точки* $z_0(c_r^*) = P_{Q_r} c_r^* \in R^r$.

Заметим, что условие (30) есть естественное необходимое и достаточное условие существования решения $y_2^{(2)}(t)$ краевой задачи (28), являющейся системой второго приближения к исходной задаче (1), (2). В критическом случае первого порядка ($P_{B_0} = 0$, $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$) из теоремы 3 следует теорема 2, а итерационный процесс (32) переходит в процесс (18).

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.

Получено 13.10.97