УДК 517.9

С. Д. Борисенко (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

БАГАТОВИМІРНІ ІНТЕГРО-СУМАРНІ НЕРІВНОСТІ

The functional integral inequalities of the Bellman – Bihari type are considered for discontinuous functions of many variables.

Розглядаються функціональні інтегральні нерівності типу Беллмана – Біхарі для розривних функцій багатьох змінних.

Результати, викладені у даній статті, продовжують та узагальнюють дослідження [1 – 8]. Розглянемо евклідів простір R^n з точками $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^0 = (x^{10}, \ldots, x^{n0})$, порядком $x^0 \le x$ $(x^{i0} \le x^i)$ $\forall\, i = \overline{1, n}$. Позначимо

$$\int\limits_{x^0}^{x} \ldots du \;=\; \int\limits_{x^{10}}^{x^1} \ldots \int\limits_{x^{n0}}^{x^n} \ldots du_1 \ldots du_n, \tag{1}$$

$$\sum_{x^0 < x_k < x} \alpha_k \;=\; \sum_{x^{10} < x_{k_1} < x^1, \ldots, x^{n0} < x_{k_n} < x^n} \alpha_k, \qquad D_i \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Введемо простір $\mathscr{F}$-неперервних функцій

$$\bar f : R^n \to R^n$$

таких, що

A) $\bar f(x) = \left(\bar f_1(x), \bar f_2(x), \ldots, \bar f_n(x)\right)$, де $\bar f_j : R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

B) $\bar f(x) \le x$.

C) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \bar f_j(x) = \infty \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай: 1) $u(x)$ — невід'ємна неперервна в області $D = \{x : x \ge x^0\}$ функція, за винятком $\{x_k\} = \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\}$ — точок скінченного стрибка:

$$u(x_i - 0) \ne u(x_i + 0) \qquad \forall\, i \in N;$$

2) множина векторів $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ впорядкована: $x_i < x_{i+1}$ $\forall\, i \in N$ при $x_{i_k} < x_{(i+1)_k}$, $k = \overline{1, n}$; $x^{10} < x_{k_1} < x^1, \ldots, x^{n0} < x_{k_n} < x^n$, причому $\lim_{k \to \infty} x_k = \infty$ (якщо область D обмежена, то вважається, що точок $\{x_k\}$ — скінченна кількість; при необмеженості D — не більше ніж зліченна; надалі D необмежена, причому $x^0 < x_k < x$);

3) $q(x) \ge 1$, $\beta_i = \text{const} \ge 0$, $i \in N$, $\psi(x) > 0$ — неспадна $\forall\, x \in D$;

4) $f(x) \ge 0$, причому $f(x) = 0$, $x \in D_{k_1 \ldots k_n}$ при $k_i \ne k_j$ $i, j = \overline{1, n}$, де $D = \bigcup_{k_1 \ldots k_n \ge 1} D_{k_1 \ldots k_n}$, $D_{k_1 \ldots k_n} = \{(x^1, \ldots, x^n) : x^1 \in [x_{k_1 - 1}, x_{k_1}[, \ldots, x^n \in [x_{k_n - 1}, x_{k_n}[,\ k_1 = 1, 2, \ldots, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots\}$. Тобто $f(x)$ — додатна на всіх підмножинах $D_{k_i \ldots k_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, і $f(x) = 0$, $x \in D \setminus \bigcup_{i \in N} D_{k_i \ldots k_i}$.

Справедлива теорема.

Теорема. *Нехай функція $u(x)$ визначена в області D і задовольняє нерівність*

$$u(x) \le \psi(x) + q(x)\left[\int_{x^0}^{x} f(\tau)u^m(p(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{x^0}^{x} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(\tau)u^m(\sigma(\tau))\,d\tau\right)ds\right] + \sum_{x^0 < x_i < x} \beta_i u(x_i - 0), \qquad m > 0, \tag{2}$$

де $p(t),\ \sigma(t) \in \mathcal{F}$, *причому виконані умови* 1 – 4 *і* $g(x) \ge 0$. *Тоді будуть справджуватись оцінки*

$$u(x) \le \psi(x)q(x)\prod_{x^0 < x_i < x}(1+\beta_i^*) \times$$

$$\times\left\{1 + (1-m)\int_{x^0}^{x} f(t)\left[\psi^{m-1}(t)q^m(p(t)) + \int_{x^0}^{t} g(\tau)\psi^{m-1}(\tau) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, q^m(\sigma(\tau))\left[\frac{\psi(\sigma(\tau))}{\psi(\tau)}\right]^m d\tau\right]dt\right\}^{1/(1-m)}, \quad 0 < m < 1, \tag{3}$$

$$u(x) \le \psi(x)q(x)\prod_{x^0 < x_i < x}(1+\beta_i^*) \times$$

$$\times \exp\left(\int_{x^0}^{x} \frac{f(\tau)q(p(\tau))\psi(p(\tau)) + g(\tau)q(\sigma(\tau))\psi(\sigma(\tau))}{\psi(p(\tau))}\,d\tau\right) \tag{4}$$

при $m = 1$,

$$u(x) \le \psi(x)q(x)\prod_{x^0 < x_i < x}(1+\beta_i^*) \times$$

$$\times\left\{1 + (1-m)\prod_{x^0 < x_i < x}(1+\beta_i^*)^{m-1}\int_{x^0}^{x} f(t)\left[\psi^{m-1}(t)q^m(p(t)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x^0}^{t} g(\tau)\psi^{m-1}(\tau)q^m(\sigma(\tau))\left[\frac{\psi(\sigma(\tau))}{\psi(\tau)}\right]^m d\tau\right]dt\right\}^{-1/m-1}, \tag{5}$$

при $m > 1$.

За умови, що

$$\int_{x^0}^{x} f(t)\left[\psi^{m-1}(t)q^m(p(t)) + \int_{x^0}^{t} g(\tau)\psi^{m-1}(\tau) \times \right.$$

$$\left. \times\, q^m(\sigma(\tau))\left[\frac{\psi(\sigma(\tau))}{\psi(\tau)}\right]^m d\tau\right]dt < \frac{\prod_{x^0 < x_i < x}(1+\beta_i^*)^{m-1}}{m-1}, \qquad \beta_i^* = \beta_i q(x_i).$$

Доведення. Очевидно

$$\frac{u(x)}{\psi(x)} \le q(x)\left[1 + \int_{x^0}^{x} f(s)\left[\frac{u(p(s))}{\psi(s)}\right]^m \psi^{m-1}(s)\,ds + \right.$$

$$+ \int_{x^0}^{x} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(t)\left[\frac{u(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \psi^{m-1}(t)\,dt\right)ds + \sum_{x^0 < x_i < x} \beta_i \frac{u(x_i - 0)}{\psi(x_i - 0)}\Bigg]. \tag{6}$$

Нехай

$$u^*(x) = 1 + \int_{x^0}^{x} f(s)\left[\frac{u(p(s))}{\psi(s)}\right]^m \psi^{m-1}(s)\,ds +$$

$$+ \int_{x^0}^{x} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(t)\left[\frac{u(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \psi^{m-1}(t)\,dt\right)ds + \sum_{x^0 < x_i < x} \beta_i \frac{u(x_i - 0)}{\psi(x_i - 0)}. \tag{7}$$

Тоді

$$u^*(p(x)) \le 1 + \int_{x^0}^{p(x)} f(s)\left[\frac{u(p(s))}{\psi(s)}\right]^m \psi^{m-1}(s)\,ds +$$

$$+ \int_{x^0}^{p(x)} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(t)\left[\frac{u(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \psi^{m-1}(t)\,dt\right)ds + \sum_{x^0 < x_i < p(x)} \beta_i \frac{u(x_i - 0)}{\psi(x_i - 0)} \le u^*(x),$$

$$u^*(\sigma(x)) \le 1 + \int_{x^0}^{\sigma(x)} f(s)\left[\frac{u(p(s))}{\psi(s)}\right]^m \psi^{m-1}(s)\,ds +$$

$$+ \int_{x^0}^{\sigma(x)} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(t)\left[\frac{u(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \psi^{m-1}(t)\,dt\right)ds + \sum_{x^0 < x_i < \sigma(x)} \beta_i \frac{u(x_i - 0)}{\psi(x_i - 0)} \le u^*(x),$$

а значить,

$$\begin{aligned} u(x) &\le \psi(x)q(x)u^*(x), \\ u(p(x)) &\le q(p(x))\psi(p(x))u^*(p(x)) \le q(p(x))\psi(p(x))u^*(x), \\ u(\sigma(x)) &\le q(\sigma(x))\psi(\sigma(x))u^*(\sigma(x)) \le q(\sigma(x))\psi(\sigma(x))u^*(x), \\ u(x_i - 0) &\le \psi(x_i - 0)q(x_i - 0)u^*(x_i - 0). \end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи ці нерівності, маємо

$$u^*(x) \le 1 + \int_{x^0}^{x} f(s)\psi^{m-1}(s)\left[\frac{q(p(s))\psi(p(s))u^*(s)}{\psi(s)}\right]^m ds +$$

$$+ \int_{x^0}^{x} f(s)\left(\int_{x^0}^{s} g(t)\left[\frac{q(\sigma(s))\psi(\sigma(s))u^*(t)}{\psi(t)}\right]^m dt\right) +$$

$$+ \sum_{x^0 < x_i < x} \beta_i \frac{\psi(x_i - 0)q(x_i - 0)u^*(x_i - 0)}{\psi(x_i - 0)}. \tag{9}$$

Розглянемо область $D_{k_1 \ldots k_n}$, $k_i = 1$. Тоді

$$D_1 D_2 \ldots D_n\left[u^*(x)\right] = f(x)\psi^{m-1}(x)\left[\frac{u(p(x))}{\psi(x)}\right]^m +$$

$$+ f(x)\int_{x^0}^{x} g(t)\left[\frac{u(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \psi^{m-1}(t)\,dt \le f(x)\psi^{m-1}(x)q^m(p(x))\left[u_*(x)\right]^m +$$

$$+ f(x)\int_{x^0}^{x} g(t)\psi^{m-1}(t)\left[\frac{q(\sigma(t))\,\psi(\sigma(t))u_*(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m dt \le$$

$$\le f(x)\psi^{m-1}(x)q^m(p(x))\left\{\left[u_*(x)\right]^m + \int_{x^0}^{x} g(t)q^m(\sigma(t))\left[\frac{\psi(\sigma(t))}{\psi(p(t))}\right]^m \left[u_*(t)\right]^m dt\right\}.$$

Покладемо $m = 1$. Позначимо

$$V(x) = u_*(x) + \int_{x^0}^{x} g(t)q(\sigma(t))\left[\frac{\psi(\sigma(t))}{\psi(p(t))}\right]u_*(t)\,dt.$$

Тоді $V(x) = u_*(x)$ при $x^i = x^{i0}$, $1 \le i \le n$, і $u_*(x) \le V(x)$ для $x \ge x^0$, а значить,

$$D_1D_2 \ldots D_n V(x) = D_1D_2 \ldots D_n\left[u_*(x)\right] +$$

$$+ g(x)q(\sigma(x))\frac{\psi(\sigma(x))}{\psi(p(x))}u_*(x) \le$$

$$\le f(x)q(p(x))V(x) + g(x)q(\sigma(x))\frac{\psi(\sigma(x))}{\psi(p(x))}V(x). \tag{10}$$

Таким чином,

$$D_1 \ldots D_n V(x) \le \left[\frac{f(x)\,q(p(x))\psi(p(x)) + g(x)\,q(\sigma(x))\psi(\sigma(x))}{\psi(p(x))}\right]V(x). \tag{11}$$

Нехай

$$W(x) = \frac{f(x)\,q(p(x))\psi(p(x)) + g(x)\,q(\sigma(x))\psi(\sigma(x))}{\psi(p(x))}.$$

Нерівність (11) запишемо у вигляді

$$D_1 \ldots D_n V(x) \le W(x)V(x). \tag{12}$$

Запишемо для нерівності (12) ряд очевидних співвідношень

$$\frac{V(x)\,D_1 \ldots D_n V(x)}{[V(x)]^2} \le W(x)\frac{D_n V(x)\,D_1 \ldots D_{n-1}V(x)}{[V(x)]^2},$$

$$D_n\left(\frac{D_1 \ldots D_{n-1}V(x)}{V(x)}\right) \le W(x),$$

$$\frac{D_1 \ldots D_n V(x)}{V(x)} \le \int_{x^{n0}}^{x^n} W(x^1, \ldots, x^{n-1}, \tau^n)\,d\tau^n,$$

$$\frac{V(x)D_1 \ldots D_{n-1}V(x)}{[V(x)]^2} \le \int_{x^{n0}}^{x^n} W(x^1, \ldots, x^{n-1}, \tau^n)\,d\tau^n + \frac{D_{n-1}V(x)D_1 \ldots D_{n-2}V(x)}{[V(x)]^2},$$

$$D_{n-1}\left(\frac{D_1 \ldots D_{n-2}V(x)}{V(x)}\right) \le \int\limits_{x^{n0}}^{x^n} W(x^1, \ldots, x^{n-1}, \tau^n)\, d\tau^n,$$

$$\frac{D_1 \ldots D_{n-2}V(x)}{V(x)} \le \int\limits_{x^{n-10}}^{x^{n-1}} \int\limits_{x^{n0}}^{x^n} W(x^1, \ldots, x^{n-2}, \tau^{n-1}, \tau^n)\, d\tau^n\, d\tau^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{D_1 V(x)}{V(x)} \le \int\limits_{x^{20}}^{x^2} \ldots \int\limits_{x^{n0}}^{x^n} W(x^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)\, d\tau^n\, d\tau^{n-1} \ldots d\tau^2.$$

Таким чином,

$$V(x) \le \exp\left(\int\limits_{x^0}^{x} W(\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= \exp\left(\int\limits_{x^{n0}}^{x^n} \frac{f(\tau)q(p(\tau))\psi(p(\tau)) + g(\tau)q(\sigma(\tau))\psi(\sigma(\tau))}{\psi(p(\tau))}\, d\tau\right).$$

Значить, для будь-якого $x \ge x^0$

$$u_*(x) \le \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i) \exp\left(\int\limits_{x^0}^{x} W(\tau)\, d\tau\right).$$

Враховуючи (6), отримуємо

$$u(x) \le \psi(x) q(x) \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i^*) \exp\left(\int\limits_{x^0}^{x} W(\tau)\, d\tau\right).$$

Розглянемо випадок $m \ne 1$ і область $D_{k_1 \ldots k_n}$, $k_i = 1$. Тоді

$$D_1 \ldots D_n\left[u_*(x)\right] \le f(x)\psi^{m-1}(x) q^m(p(x))\left[u_*(x)\right]^m +$$

$$+ f(x) \int\limits_{x^{n0}}^{x^n} g(t)\psi^{m-1}(t) q^m(\sigma(t)) \left[\frac{\psi(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m \left[u_*(t)\right]^m dt.$$

Нехай

$$\overline{W}(x) = f(x)\left[\psi^{m-1}(x) q^m(p(x)) + \int\limits_{x^0}^{x} g(t)\psi^{m-1}(t) q^m(\sigma(t)) \left[\frac{\psi(\sigma(t))}{\psi(t)}\right]^m dt\right]. \quad (13)$$

Тоді

$$\frac{D_1 \ldots D_n\left[u_*(x)\right]}{\left[u_*(x)\right]^m} \le \overline{W}(x). \quad (14)$$

Запишемо очевидні співвідношення:

$$D_n\left(\frac{D_1 \ldots D_{n-1}\left[u_*(x)\right]}{\left[u_*(x)\right]^m}\right) \le \overline{W}(x),$$

$$\frac{D_1 \ldots D_{n-1}\left[u^*(x)\right]}{\left[u^*(x)\right]^m} \leq \int_{x^{n0}}^{x^n} \overline{W}(x^1, \ldots, x^{n-1}, \tau^n)\, d\tau^n,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (15)$$

$$\frac{D_1\left[u^*(x)\right]}{\left[u^*(x)\right]^m} \leq \int_{x^{20}}^{x^2} \ldots \int_{x^{n0}}^{x^n} \overline{W}(x^1, t^1, \ldots, t^n)\, dt^n \ldots dt^2.$$

Таким чином,

$$u^*(x) \leq \left\{1 + (1-m)\int_{x^0}^{x} \overline{W}(t)\, dt\right\}^{1/(1-m)}. \qquad (16)$$

Розповсюджуючи оцінку (16) на всю область D, одержуємо

$$u^*(x) \leq \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i q(x_i)) \left\{1 + (1-m)\int_{x^0}^{x} \overline{W}(\tau)\, d\tau\right\}^{1/(1-m)}, \quad 0 < m < 1,$$

$$u^*(x) \leq \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i q(x_i)) \times$$

$$\times \left[1 - (1-m) \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i q(x_i))^{m-1} \int_{x^0}^{x} \overline{W}(\tau)\, d\tau\right]^{-1/(m-1)}, \quad m > 1.$$

Для довільних $x \geq x^0$:

$$\int_{x^0}^{x} \overline{W}(\tau)\, d\tau < \frac{1}{m-1} \prod_{x^0 < x_i < x} (1 + \beta_i q(x_i))^{1-m}. \qquad (17)$$

Остаточно отримуємо оцінки (3) – (5).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 11. – С. 1995–2002.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
3. *Самойленко А. М., Борисенко С. Д.* Об устойчивости решений нелинейных систем, подвергающихся импульсному воздействию на заданных поверхностях // Всесоюзная научная конф. „Метод функций А. М. Ляпунова в современной математике" (Харьков, 27–29 мая, 1986 г.): Тез. докл. – 1986. – С. 24.
4. *Самойленко А. М., Борисенко С. Д.* Интегро-суммарные неравенства и устойчивость процессов с дискретным возмущением // Тр. Третьей Междунар. конф. „Дифференциальные уравнения и их приложения". – Руссе, 1987. – Ч.1. – С.377–380.
5. *Борисенко С. Д.* О практической устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 57–59.
6. *Bihari I. A.* A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations // Acta math. Acad. Sci. hung. – 1965. – **7**, № 1. – P. 71–94.
7. *Bondge B. K., Pachpatte B. G.* On some fundamental integral inequalities in n-independent variables // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1980. – **8**, № 4. – P. 553–560.
8. *Akinyele Olusola.* On Gronwall – Bellman – Bihari – Type integral inequalities in several variables with Retardation // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – **104**, № 1. – P. 1–26.

Одержано 18.09.97