УДК 517.938

В. Л. Кулик
(Ин-т математики НАН Украины, Киев; Шленск. политехника, Гливице, Польша),
Б. Вуйтович (Люблин. политехника, Польша)

ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ ФУНКЦИИ ГРИНА – САМОЙЛЕНКО

By using the alternating-sign Lyapunov functions, we study the problems of regularity and weak regularity of some linear extensions of dynamical systems on a torus.

З допомогою знакозмінних функцій Ляпунова досліджуються питання регулярності і слабкої регулярності деяких лінійних розширень динамічних систем на торі.

После введения А. М. Самойленко [1] понятия функции Грина линейных расширений динамических систем на торе начались исследования вопросов существования таких функций, их единственности и неединственности, зависимости от параметров, грубости, дифференцируемости и т. д. [2 – 4]. Однако постоянно возникают вопросы, ответы на которые еще не получены. Рассмотрению некоторых из этих вопросов и посвящена предлагаемая статья.

Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi \in T_m$ — m-мерный тор, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$, принято называть линейным расширением динамической системы на торе. Обычно через $\varphi_t(\varphi)$ обозначают решение системы $d\varphi/dt = a(\varphi)$ с начальным условием $\varphi_t(\varphi)_{t=0} = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — матрицант линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

нормированный в точке $t = \tau$: $\Omega^t_t = I_n$ — n-мерная единичная матрица. Напомним [2], что система (1) имеет функцию Грина – Самойленко $G_0(\tau, \varphi)$, если существует непрерывная $n \times n$-мерная матричная функция $C(\varphi)$, 2π-периодическая по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$, т. е. $C(\varphi) \in C^0(T_m)$, такая, что функция

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega^0_\tau(\varphi)[\, C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\,], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяет оценке

$$\| G_0(\tau, \varphi)\| \le K e^{-\gamma|\tau|} \tag{4}$$

с положительными постоянными K, γ, независимыми от $\varphi \in T_m$ и $\tau \in R$. Очевидно, выбор нормы $\|G\|$ матрицы не имеет здесь особенного значения, однако мы будем придерживаться операторной нормы $\|G\| = \max_{\|x\|=1} \|Gx\|$, $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle$, $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — обычное скалярное произведение в R^n. В дальнейшем будем использовать также обозначение $\|S\|_0 = \max_{\varphi \in T_m} \|S(\varphi)\|$.

Легко показать, что выполнение оценки (4) эквивалентно выполнению следующих оценок:

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \right\| \le Ke^{-\gamma t}, \quad t \ge 0,$$
$$\left\| \Omega_0^t(\varphi)[C(\varphi) - I_n] \right\| \le Ke^{\gamma t}, \quad t \le 0, \tag{4'}$$

с теми же положительными постоянными K, γ.

Будем говорить, что система (1) регулярна, если она имеет единственную функцию Грина (3) с оценкой (4). Если же известно, что система (1) имеет хотя бы одну функцию Грина (3) с оценкой (4), то эту систему назовем слабо регулярной. В случае, когда система (1) имеет не менее двух различных функций Грина (3) с оценкой (4), назовем ее строго слабо регулярной.

Сформулируем критерий слабой регулярности.

Теорема 1 [2]. *Для того чтобы система* (1) *была слабо регулярной, необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратичная форма*

$$V(\varphi, y) = \langle S(\varphi)y, y \rangle \tag{5}$$

с непрерывно дифференцируемой матрицей коэффициентов $S(\varphi) \in C^1(T_m)$, *которая имеет положительно определенную производную вдоль решений сопряженной системы*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^*(\varphi)y \tag{6}$$

($A^*(\varphi) = A^T(\varphi)$ — *транспонированная матрица*), *т. е.*

$$\dot V(\varphi, y) = \left\langle \left(\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) - S(\varphi)A^*(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi) \right) y, y \right\rangle \ge \|y\|^2 \quad \forall y \in R^n. \tag{7}$$

При этом система (1) *будет регулярной в том и только в том случае, когда* $\det S(\varphi) \ne 0$; *строго слабо регулярной — когда при некотором значении* $\varphi = \varphi_0$ $\det S(\varphi_0) = 0$.

***Замечание* 1.** В случае, когда $\det S(\varphi) \ne 0 \quad \forall \varphi \in T_m$, квадратичная форма $V(\varphi, x) = -\langle S^{-1}(\varphi)x, x \rangle$ имеет положительно определенную производную вдоль решений системы (1).

Приведем несколько примеров системы (1), которые имеют функции Грина – Самойленко.

***Пример* 1.**

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{dt} = (\cos\varphi)x.$$

Эта система является строго слабо регулярной, поскольку для производной функции $V = -(\cos\varphi)y^2$ вдоль решений системы $d\varphi/dt = \sin\varphi$, $dy/dt = -(\cos\varphi)y$ выполняется оценка $\dot V = (\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)y^2 \ge y^2$ и $\cos\pi/2 = 0$. При этом система

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi + a_1(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = (\cos\varphi + a_2(\varphi))x,$$

где $a_i(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$, остается строго слабо регулярной при выполнении неравенства $|a_1(\varphi)| + 2|a_2(\varphi)| < 1 \quad \forall \varphi \in T_1$.

***Пример* 2.**

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \quad \frac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi)x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi)x_1 - (\cos\varphi)x_2.$$

Эта система является регулярной. Легко проверяется, что производная $\dot{V}$ невырожденной квадратичной формы

$$V = (\cos\varphi)x_1^2 + 2(\sin\varphi)x_1x_2 - (\cos\varphi)x_2^2$$

вдоль решений исходной системы удовлетворяет неравенству $\dot{V} \geq x_1^2 + x_2^2$.

***Пример* 3.**

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{dx_1}{dt} = (\sin\varphi)x_1 + \lambda(\cos^2\varphi)x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - (\sin\varphi)x_2, \tag{8}$$

где $\lambda = \text{const} > 0$.

Проверим, что производная квадратичной формы

$$V = px_1x_2 - (\sin\varphi)x_2^2 \tag{9}$$

вдоль решений исходной системы (8) при фиксированных значениях параметра

$$p > \max\left\{1, \frac{2}{\lambda}\right\}$$

будет положительно определенной.

Вычисляя эту производную, имеем

$$\dot{V} = p\Big[(\sin x)x_1 + \lambda(\cos^2\varphi)x_2\Big]x_2 + px_1[x_1 - (\sin x)x_2] -$$
$$-(\cos\varphi)x_2^2 - 2(\sin\varphi)x_2(x_1 - (\sin\varphi)x_2) = px_1^2 - 2(\sin\varphi)x_1x_2 +$$
$$+\Big[p\lambda\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi - \cos\varphi\Big]x_2^2 \geq px_1^2 - 2|x_1||x_2| +$$
$$+(2 - \cos\varphi)x_2^2 \geq \varepsilon\big(x_1^2 + x_2^2\big), \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Поскольку квадратичная форма (9) является невырожденной $(\rho > 0)$, то система (8) будет регулярной при каждом значении параметра $\lambda > 0$.

В работе [2] установлено, что каждую слабо регулярную систему (1) всегда можно дополнить до регулярной следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = A(\varphi)x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - A^*(\varphi)x_2. \tag{11}$$

При этом производная квадратичной формы

$$V_p(\varphi, x_1, x_2) = p\langle x_1, x_2\rangle + \langle S(\varphi)x_2, x_2\rangle \tag{12}$$

вдоль решений системы (11) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $\rho > 0$ $\big(p > 2\|S\|_0\big)$. Это дало возможность не только исследовать вопросы гладкости по переменным φ неединственной функции Грина, но и получить интегральное представление всех нетривиальных инвариантных торов системы (1):

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0^\tau(\varphi)C_{12}(\varphi_\tau(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

где $C_{12}(\varphi)$ — $n \times n$-мерная симметричная матрица $(C_{11}(\varphi) \in C'(T_m, a))$, удовлетворяющая тождеству

$$C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv \Omega_0^\tau(\varphi) C_{12}(\varphi)\left(\Omega_0^\tau(\varphi)\right)^* \quad \forall \varphi \in T_m, \quad \tau \in R; \quad f(\varphi) \in C^0(T_m).$$

При исследовании вопросов дифференцируемости функции Грина (3) по переменной φ важной является величина постоянной γ в оценке (4). Поэтому целесообразно исследование системы вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = A(\varphi)x_1 + \lambda x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - A^*(\varphi)x_2 + \lambda x_2. \tag{13}$$

При изучении вопроса о величине изменения λ, при которой производная квадратичной формы (12) в силу системы (13) при некоторых значениях $p > 0$ будет положительно определенной, установлено неравенство $|\lambda| < \left(6\|S\|_0\right)^{-1}$. На самом же деле возмущенная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = (A(\varphi_t(\varphi)) + \lambda I_n)x$$

сохраняет свойство экспоненциальной дихотомичности на полуосях при условии

$$|\lambda| < \left(2\|S\|_0\right)^{-1}. \tag{14}$$

Поэтому до сих пор остается открытым вопрос: будет ли система (13) регулярной при выполнении оценки (14)?

Рассмотрим теперь возмущенную систему вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + d(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = (A(\varphi) + D_1(\varphi))x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + (-A^*(\varphi) + D_2(\varphi))x_2, \tag{15}$$

где $d(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, $D_i(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *является слабо регулярной* (*следовательно, выполняется условие* (7) *с некоторой фиксированной матрицей* $S(\varphi)$). *Тогда при выполнении неравенства*

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial \varphi} d + SD_2 + D_2^* S \right\|_0 + 2\|S\|_0 \left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 < 1 \tag{16}$$

система (15) *будет регулярной. При этом производная квадратичной формы* (12) *вдоль решений системы* (15) *при некоторых* $p > 0$ *будет положительно определенной.*

Доказательство. Вычисляя производную квадратичной формы (12) вдоль решений системы (15), получаем

$$\dot{V}_p = p\langle (A + D_1)x_1, x_2 \rangle + p\left\langle x_1, x_1 + (-A^* + D_2)x_2 \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial S}{\partial \varphi}(a(\varphi) + d(\varphi))x_2, x_2 \right\rangle + 2\left\langle S x_2, x_1 + (-A^* + D_2)x_2 \right\rangle =$$
$$= p\|x_1\|^2 + p\left\langle \left(D_1 + D_2^*\right)x_1, x_2 \right\rangle + \left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi} a(\varphi) - 2AS\right]x_2, x_2 \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial S}{\partial \varphi} d(\varphi) x_2, x_2 \right\rangle + 2\langle S(\varphi) x_2, x_1 \rangle + 2\langle SD_2 x_2, x_2 \rangle \geq$$

$$\geq p\| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 - \left\| \frac{\partial S}{\partial \varphi} d(\varphi) + SD_2 + D_2^* S \right\|_0 \| x_2 \|^2 -$$

$$- \left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 \| x_1 \| \| x_2 \| - 2\| S \|_0 \| x_1 \| \| x_2 \|.$$

Теперь для простоты обозначим

$$\sigma_i = \| x_i \|, \quad i = 1, 2, \quad K = \left\| \frac{\partial S}{\partial \varphi} d(\varphi) + SD_2 + D_2^* S \right\|_0$$

и рассмотрим соответствующую последней части полученного неравенства квадратичную форму

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = p\sigma_1^2 - \left(p\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 + 2\| S \|_0 \right) \sigma_1 \sigma_2 + (1 - K)\sigma_2^2.$$

Очевидно, для положительной определенности квадратичной формы Φ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\begin{vmatrix} p & \frac{1}{2}\left[-p\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 - 2\| S \|_0 \right] \\ \frac{1}{2}\left[-p\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 - 2\| S \|_0 \right] & 1 - K \end{vmatrix} > 0,$$

которое можно записать в следующем виде:

$$\left[\left(p\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 + 2\| S \|_0 \right) - 2p^{1/2}(1 - K)^{1/2} \right] \times$$

$$\times \left[\left(p\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 + 2\| S \|_0 \right) + 2p^{1/2}(1 - K)^{1/2} \right] < 0.$$

Обозначая $\sqrt{p} = x$ и учитывая положительность второго сомножителя, имеем

$$\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 x^2 - 2(1 - K)^{1/2} x + 2\| S \|_0 < 0.$$

Для того чтобы полученное неравенство имело положительное решение с учетом условий

$$x_b = \frac{(1 - K)^{1/2}}{\left\| D_1 + D_2^* \right\|_0} > 0, \qquad 2\| S \|_0 > 0,$$

достаточно выполнение неравенства

$$D = \left[2(1 - K)^{1/2} \right]^2 - 4 \cdot 2\| S \|_0 \left\| D_1 + D_2^* \right\|_0 > 0,$$

равносильного (16).

Таким образом, при выполнении неравенства (16) квадратичная форма Φ при некоторых значениях $p > 0$ будет положительно определенной. Это значит, что производная квадратичной формы (12) вдоль решений системы (15) положительно определена, т. е. система (15) — регулярна.

Анализ структуры формы (12) указывает на целесообразность рассмотрения квадратичных форм вида

$$V_p(\varphi, x_1, x_2, x_3) = p(\langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle) + \langle S(\varphi) x_3, x_3 \rangle, \qquad (17)$$

где $x_i \in R^n$, и нахождения таких матриц $P(\varphi)$ размеров $3n \times 3n$, чтобы производная квадратичной формы (17) вдоль решений системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \qquad (18)$$

была положительно определенной.

Рассмотрим первое слагаемое в квадратичной форме (17) и для удобства положим $p = 2$:

$$V = 2(\langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle) = \langle Jx, x \rangle, \tag{19}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n & I_n \\ I_n & 0 & I_n \\ I_n & I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Вычисляя производную от (19) вдоль решений (18), имеем

$$\dot{V} = \langle JPx, x \rangle + \langle Jx, Px \rangle = \left\langle \left(JP + P^* J\right)x, x \right\rangle. \tag{21}$$

Приравнивая правую часть (21) к форме $2\langle B(\varphi)x, x \rangle$ с заданной симметричной матрицей

$$B(\varphi) = \operatorname{diag}\{ B_1(\varphi), B_2(\varphi), B_3(\varphi) \}, \tag{22}$$

где B_i — $n \times n$-мерные матрицы, свойства которых будут оговорены ниже, получаем равенство

$$JP(\varphi) + P^*(\varphi)J = 2B(\varphi). \tag{23}$$

Отсюда следует

$$JP(\varphi) = B(\varphi) + M(\varphi), \tag{24}$$

где $3n \times 3n$-мерная матрица $M(\varphi)$ имеет свойство

$$M^*(\varphi) \equiv -M(\varphi) \quad \forall \varphi \in T_m. \tag{25}$$

Поскольку матрица $B(\varphi)$ уже занимает диагональные блоки, то в качестве матрицы $M(\varphi)$ выберем следующую:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -A_{12}^* & -A_{13}^*(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) & 0 & -A_{23}^*(\varphi) \\ A_{13}(\varphi) & A_{23}(\varphi) & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $n \times n$-мерные матрицы $A_{ij}(\varphi) \in C^0(T_m)$ произвольные. Запишем матрицу J^{-1}, обратную к матрице (20):

$$J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -I_n & I_n & I_n \\ I_n & -I_n & I_n \\ I_n & I_n & -I_n \end{pmatrix}. \tag{20$'$}$$

Учитывая вид матриц (22), (26), из равенства (24) получаем

$$P(\varphi) = J^{-1}(B(\varphi) + M(\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-B_1 + A_{12} + A_{13}) & \left(A_{12}^* + B_2 + A_{23}\right) & \left(A_{13}^* - A_{23}^* + B_3\right) \\ (B_1 - A_{12} + A_{13}) & \left(-A_{12}^* - B_2 + A_{23}\right) & \left(-A_{13}^* + A_{23}^* + B_3\right) \\ (B_1 + A_{12} - A_{13}) & \left(-A_{12}^* + B_2 - A_{23}\right) & \left(-A_{13}^* - A_{23}^* - B_3\right) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Таким образом, если матрица $P(\varphi)$ в системе (18) будет иметь вид (27), то производная квадратичной формы (19) вдоль решений системы (18) будет иметь вид $\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{3} \langle B_i(\varphi)x_i, x_i \rangle$.

На основании приведенных выше рассуждений убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть в системе* (18) *матрица* $P(\varphi)$ *имеет вид* (27), *где все три матрицы* $B_i(\varphi) \in C^0(T_m)$ *положительно определены*:

$$\langle B_i(\varphi)x, x \rangle \geq \beta_i \|x\|^2, \quad \beta_i > 0, \quad \forall x \in R^n, \quad i = 1, 2, 3. \tag{28}$$

Тогда при любых матрицах $A_{ij}(\varphi) \in C^0(T_m)$ *в структуре* (27) *система* (18) *будет регулярной.*

Замечание 2. Теорема 3 верна и в случае, когда неравенства (28) заменены следующими:

$$\langle B_i(\varphi)x, x \rangle \leq -\beta_i \|x\|^2, \quad \beta_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall x \in R^n.$$

Теперь предположим, что из трех неравенств (28) выполняются только два $(i = 1, 2)$, а $B_3(\varphi) \equiv 0$. Тогда, очевидно, для регулярности системы (18) нужно требовать дополнительные условия, которые содержатся в следующем утверждении.

Теорема 4. *Пусть в структуре* (27) *матрицы* $P(\varphi)$ *симметричные матрицы* $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ — *положительно определены, т. е. выполнены неравенства* (28) *при* $i = 1, 2$, *а симметричная матрица* $B_3(\varphi)$ *такая, что* $\langle B_3(\varphi)x, x \rangle \geq 0$, *т. е. может быть и нулевой* $B_3(\varphi) \equiv 0$. *Кроме того, предположим также, что система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(A_{13}(\varphi) + A_{23}(\varphi) + B_3(\varphi))x \tag{29}$$

является слабо регулярной. Тогда система (18) *будет регулярной.*

Доказательство. Свойство слабой регулярности системы (29) эквивалентно существованию $n \times n$-мерной симметричной матрицы $S(\varphi) \in C^1(T_m)$ такой, что

$$\left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi} a(\varphi) - \frac{1}{2} S\left(A_{13}^* + A_{23}^* + B_3^*\right) - \frac{1}{2}(A_{13} + A_{23} + B_3)S \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2. \tag{30}$$

Теперь докажем, что производная квадратичной формы (17) (матрица $S(\varphi)$ та же, что и в (30)) вдоль решений системы (18) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной. Используем следующие обозначения:

$$W[S] = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P(\varphi)S(\varphi), \tag{30*}$$

$P_3 = \mathrm{diag}\,\{0, 0, I_n\}$ — $3n \times 3n$-мерная матрица проектирования,

$$I_{3n} - P_3 = P_2,$$

$$\overline{S} = \mathrm{diag}\,\{0, 0, S(\varphi)\}, \qquad \beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}.$$

При этих обозначениях неравенство (30) можно записать в следующем виде:

$$\langle W[\overline{S}]P_3x, P_3x \rangle \geq \|P_3x\|^2, \tag{30'}$$

где $x = \mathrm{colon}\,\{x_1, x_2, x_3\} \in R^{3n}$.

Теперь производную квадратичной формы (17) вдоль решений системы (18) запишем и оценим следующим образом:

$$\dot{V}_p = \left\langle W[pJ+\bar{S}]x, x\right\rangle = p\langle W[J]x, x\rangle + \left\langle W[\bar{S}]x, x\right\rangle = 2p\left(\sum_{i=1}^{3}\langle B_i x_i, x_i\rangle\right) +$$

$$+ \left\langle W[\bar{S}](P_2+P_3)x, (P_2+P_3)x\right\rangle \geq 2p\left(\beta_1\|x_1\|^2 + \beta_2\|x_2\|^2\right) + \left\langle W[\bar{S}]P_2x, P_2x\right\rangle +$$

$$+ 2\left\langle W[\bar{S}]P_2x, P_3x\right\rangle + \left\langle W[\bar{S}]P_3x, P_3x\right\rangle \geq 2p\beta\|P_2x\|^2 - \|W[\bar{S}]\|_0\|P_2x\|^2 -$$

$$- 2\|W[\bar{S}]\|_0\|P_2x\|\|P_3x\| + \|P_3x\|^2 = \left(2\beta p - \|W[\bar{S}]\|_0\right)\|P_2x\|^2 -$$

$$- 2\|W[\bar{S}]\|_0\|P_2x\|\|P_3x\| + \|P_3x\|^2.$$

Последнее выражение рассмотрим как квадратичную форму от переменных $\sigma_1 = \|P_2x\|$, $\sigma_2 = \|P_2x\|$: $\Phi_p(\sigma_1, \sigma_2) = (2\beta p - \|W\|_0)\sigma_1^2 - 2\|W\|_0\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$. Легко установить, что записанная квадратичная форма будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра p $\left(p > \left(\|W[\bar{S}]\|_0 + \|W[\bar{S}]\|_0^2\right)/(2\beta)\right)$:

$$\Phi_p(\sigma_1, \sigma_2) \geq \gamma(p)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right),$$

где $\gamma(p) = \left(2p\beta - \|W\|_0 + \|W\|_0^2\right)\left(2p\beta - \|W\|_0 + 1\right)^{-1}$.

Поэтому на основании полученных ранее оценок имеем

$$\dot{V}_p(\varphi, x_1, x_2, x_3) = \left\langle W[pJ+\bar{S}]x, x\right\rangle \geq \gamma(p)\left(\|P_2x\|^2 + \|P_3x\|^2\right) \geq \frac{\gamma(p)}{2}\|x\|^2.$$

Поскольку квадратичная форма (12) является невырожденной при $p > 0$, то система (18) будет регулярной.

Замечание 3. Условия на матрицы B_i в теореме 4 можно менять; при этом нужно предполагать слабую регулярность систем, аналогичных (29).

Запишем это более конкретно:

1) $\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geq 0, \quad \langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i\|x\|^2, \quad i = 2, 3, \quad \forall x \in R^n,$

$\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(-A_{12}^*(\varphi) - A_{13}^*(\varphi) + B_1(\varphi)\right)x$ слабо регулярна;

2) $\langle B_2(\varphi)x, x\rangle \geq 0, \quad \langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i\|x\|^2, \quad i = 1, 3, \quad \forall x \in R^n,$

$\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(A_{12}(\varphi) - A_{23}^*(\varphi) + B_2(\varphi)\right)x$ слабо регулярна.

Теперь предполагаем, что выполнено только одно строгое неравенство

$$\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_1\|x\|^2, \quad \beta_1 > 0, \tag{31}$$

$$\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq 0, \quad i = 2, 3, \quad \forall x \in R^n. \tag{32}$$

При этом матрицы B_1, B_2 могут быть нулевыми. Возникает вопрос: какие дополнительные условия должны быть наложены на матрицу (27), чтобы система (18) все-таки была регулярной? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 5. *Пусть симметричные матрицы* $B_i(\varphi) \in C^0(T_m)$, $i = 1, 2, 3$, *удовлетворяют условиям* (31), (32) *и система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad 2\frac{dx_1}{dt} = \left(A_{12} - A_{23}^* + B_2\right)x_2 + \left(A_{12} + A_{23}^* - B_2\right)x_3,$$
$$2\frac{dx_3}{dt} = \left(A_{13} - A_{23} - B_3\right)x_2 + \left(A_{13} + A_{23} + B_3\right)x_3, \tag{33}$$

слабо регулярна. Тогда система (18) *с матрицей* $P(\varphi)$ *вида* (27) *будет регулярной.*

Доказательство приведенного утверждения аналогично доказательству теоремы 4. Поэтому мы отметим здесь только основную идею доказательства.

Поскольку система (33) слабо регулярна, то существует квадратичная форма $V(\varphi, x_2, x_3) = \left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle$ с непрерывно дифференцируемой $2n \times 2n$-мерной симметричной матрицей коэффициентов $\hat{S}(\varphi) \in C^1(T_m)$, которая имеет положительно определенную производную вдоль решений системы, сопряженной к системе (33), т. е. выполняется неравенство

$$\left\langle \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \varphi} a(\varphi) - \hat{S}\hat{A}^* - \hat{A}\hat{S}\right)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle \geq \|\hat{x}\|^2 \tag{34}$$

при всех $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^{2n}$. Матрица $\hat{A}$ размеров $2n \times 2n$ соответствует системе (33). Заметим, что $-\hat{A}^*$ является блоком матрицы $P(\varphi)$ вида (27) (напомним, что матрицы B_i, $i = 1, 2, 3,$ — симметричные согласно начальному предположению). Поэтому, используя обозначение (30′), условие (34) запишем в виде

$$\left\langle W[\hat{S}]\hat{P}x, \hat{P}x \right\rangle \geq \left\|\hat{P}x\right\|^2,$$
$$\hat{P} = \operatorname{diag}\{0, I_n, I_n\}, \qquad x = \operatorname{colon}\{x_1, x_2, x_3\},$$
$$\hat{S} = \operatorname{diag}\{0, \hat{S}\}.$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы 4, непосредственно убеждаемся, что производная квадратичной формы $p(\langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle) + \left\langle \hat{S}\hat{x}, \hat{x} \right\rangle$, где $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, вдоль решений системы (18) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной, следовательно, система (18) — регулярна.

Приведем пример регулярной системы (18) с матрицей $P(\varphi)$ вида (27).

Полагая $a(\varphi) = \sin\varphi$, $B_1 = B_2 = 1$, $B_3 = 0$, $A_{13} = \lambda_1 \cos\varphi$, $A_{23} = \lambda_2 \cos\varphi$, $A_{12} = \mu \cos m\varphi$, имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = (-1 + \mu\sin m\varphi + \lambda_1\cos\varphi)x_1 + (1 + \mu\sin m\varphi + \lambda_2\cos\varphi)x_2 + $$
$$+ (\lambda_1 - \lambda_2)(\cos\varphi)x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (1 - \mu\sin m\varphi + \lambda_1\cos\varphi)x_1 + (-1 - \mu\sin m\varphi + \lambda_2\cos\varphi)x_2 + $$
$$+ (\lambda_2 - \lambda_1)(\cos\varphi)x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (1+\mu\sin m\varphi - \lambda_1\cos\varphi)x_1 + (1-\mu\sin m\varphi - \lambda_2\cos\varphi)x_2 - $$
$$- (\lambda_1+\lambda_2)(\cos\varphi)x_3.$$

Эта система имеет единственную функцию Грина – Самойленко при условии

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

и при любых фиксированных значениях $\mu \in R$, $m \in Z$.

Квадратичная форма V, которая имеет положительную производную вдоль решений приведенной системы, имеет вид

$$V = p(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (\cos\varphi)x_3^2, \quad p >> 0.$$

Обратим внимание на то, что в более простом случае, когда матрицы (20) и (20′) имеют вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицы $M(\varphi)$, $B(\varphi)$ таковы:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -A^*(\varphi) \\ A(\varphi) & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем матрицу $P(\varphi)$, соответствующую расширенной системе (11):

$$P(\varphi) = J^{-1}(B+M) = \begin{pmatrix} A(\varphi) & 0 \\ I_n & -A^*(\varphi) \end{pmatrix}.$$

В этом случае в работе [2] установлены интересные свойства $2n \times 2n$-мерной матрицы проектирования, входящей в структуру функции Грина – Самойленко:

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi; P), & \tau \le 0; \\ \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi) - I_n & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) - I_n \end{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi; P), & \tau > 0, \end{cases}$$

а именно, были доказаны следующие тождества:

$$C_{11}(\varphi) + C_{22}^*(\varphi) \equiv I, \quad C_{12}^*(\varphi) \equiv C_{12}(\varphi), \quad C_{21}^*(\varphi) \equiv C_{21}(\varphi).$$

Вопрос о структуре функции Грина – Самойленко для системы (18) с матрицей $P(\varphi)$ вида (27) до сих пор остается открытым.

Рассмотрим многомерный случай. Теперь матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{I_n \quad I_n \quad \ldots \quad I_n}^{k} \\ I_n & 0 \quad I_n \quad \ldots \quad I_n \\ I_n & I_n \quad 0 \quad \ldots \quad I_n \\ I_n & I_n \quad I_n \quad \ldots \quad 0 \end{pmatrix},$$

а обратная матрица

$$J^{-1} = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} (1-k)I_n & I_n & I_n & \dots & I_n \\ I_n & (1-k)I_n & I_n & \dots & I_n \\ I_n & I_n & (1-k)I_n & \dots & I_n \\ & & & \dots & \\ I_n & I_n & I_n & \dots & (1-k)I_n \end{pmatrix}. \tag{35}$$

По аналогии с матрицами (22), (26) выбираем следующие:

$$B(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{ B_1(\varphi), B_2(\varphi), \dots, B_{k+1}(\varphi) \right\}, \tag{36}$$

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -A_{11}^*(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) & \dots & -A_{1,k}^*(\varphi) \\ A_{11}(\varphi) & 0 & -A_{21}^*(\varphi) & \dots & -A_{2,k-1}^*(\varphi) \\ A_{12}(\varphi) & A_{21}(\varphi) & 0 & \dots & -A_{3,k-2}^*(\varphi) \\ & & & \dots & \\ A_{1,k}(\varphi) & A_{2,k-1}(\varphi) & A_{3,k-2}(\varphi) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Матрицу $P(\varphi)$ размеров $(k+1)n \times (k+1)n$ запишем в виде

$$P(\varphi) = J^{-1}(B(\varphi) + M(\varphi)), \tag{38}$$

где матрицы J^{-1}, B, M имеют вид соответственно (35), (36), (37).

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 4.

Теоремы 6. *Пусть k матриц $B_i(\varphi)$, $i = \overline{1,k}$, являются положительно определенными, т. е. $\langle B_i(\varphi)x, x \rangle \geq \beta_i \|x\|^2 \quad \forall x \in R^n$, $i = \overline{1,k}$, а $B_{k+1}(\varphi) \equiv 0$. Предположим также, что система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\left(A_{1,k}(\varphi) + A_{2,k-1}(\varphi) + \dots + A_{k,1}(\varphi)\right)x$$

слабо регулярна. Тогда система уравнений вида (18), *где $x \in R^{n(k+1)}$, с матрицей* (38) *при любых $A_{ij}(\varphi) \in C^0(T_m)$ является регулярной.*

Замечание 4. Приведенные утверждения позволяют существенно расширить множество примеров систем (1), имеющих единственную функцию Грина – Самойленко.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219–1240.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Самойленко А. М.* Сепаратрисные многообразия и расщепляемость линейного расширения динамических систем на торе // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 1. – С. 31–38.

Получено 12.06.97