УДК 517.9

А. Ю. Лучка (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Consistency conditions are established for a system of differential equations with pulse influence and additional conditions. The applicability of approximate methods to the problems of this sort is proved.

Встановлюються умови сумісності системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та додатковими умовами і дається обґрунтування щодо застосування до таких задач наближених методів.

Теорія систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, до яких зводиться низка задач природознавства і техніки, в останні десятиліття збагатилась істотними результатами [1 – 3]. Серед таких систем зустрічаються системи, про розв'язки яких відома додаткова інформація. Створення методів дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та додатковими умовами є актуальною задачею. В даній статті висвітлюються питання сумісності та побудови наближених розв'язків вказаних систем.

1. Постановка задачі. Нехай задано систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = F(t, x) \tag{1}$$

і треба знайти вектор-функцію $x(t)$, де $t \in [0, T]$, яка задовольняє при $t \in [0, T] \setminus \{t_i\}$ систему рівнянь (1), умови

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

та додаткові обмеження

$$\Phi_s(x) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, p}, \quad p = m + \nu. \tag{3}$$

В задачі (1) – (3) $A(t)$ — неперервна при $t \in [0, T]$ матриця розміру $m \times m$, $F\colon [0, T] \times R^m \to R^m$, S_i — сталі матриці розміру $m \times m$, $\gamma_i \in R$, $i = \overline{1, l}$, Φ_s — лінійні неперервні функціонали, $\alpha_s \in R$, $s = \overline{1, p}$, і $t_i \in (0, T)$ — фіксовані моменти імпульсного впливу.

Розглядувану задачу вважатимемо сумісною, якщо існує вектор-функція $x(t)$, яка задовольняє систему (1), умови (2) і обмеження (3). В противному разі задача несумісна.

2. Допоміжна задача. Розглянемо задачу з керуванням

$$\frac{dx}{dt} + A(t)z = u(t) + y(t), \tag{4}$$

$$z(t_i + 0) = S_i z(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{5}$$

$$\Phi_s(z) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, p}, \quad p = m + \nu, \tag{6}$$

в якій $y(t)$ — задана вектор-функція і

$$u(t) = B(t)\lambda, \tag{7}$$

де $B(t)$ — неперервна матриця розміру $m \times \nu$, а $\lambda \in R^\nu$ і $z(t)$ — шукані вектор та вектор-функція.

Припустимо, що однорідна задача (4) – (6) ($y(t) = 0$, $\gamma_i = 0$, $\alpha_s = 0$) має тільки тривіальний розв'язок. В цьому випадку, як це встановлено у [4] (§ 21), існують матриці $G(t, \tau)$ і $R(t, \tau)$ розміру $m \times m$, які визначаються однозначно і такі, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (4) – (6) виражається формулами

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y(\tau)d\tau, \tag{8}$$

$$u(t) = r(t) - \int_0^T R(t,\tau)y(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Слід відмітити, що вектор-функції $h(t)$ і $r(t)$ є розв'язком задачі (4) – (6) при $y(t)=0$, тобто

$$\frac{dh(t)}{dt} + A(t)h(t) = r(t), \tag{10}$$

$$h(t_i+0) = S_i h(t_i-0) + \gamma_i, \quad \Phi_s(h) = \alpha_s, \tag{11}$$

$i=\overline{1,l}$, $s=\overline{1,p}$, і справджуються співвідношення

$$\int_0^T G(t,\tau)B(\tau)d\tau = 0, \quad \int_0^T R(t,\tau)B(\tau)d\tau = B(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau) + A(t)G(t,\tau) + R(t,\tau) = \delta(t-\tau). \tag{13}$$

Лема. *Для будь-якої диференційовної вектор-функції* $x(t)$, *яка задовольняє умови* (2) *та* (3), *справедливі співвідношення*

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}x(\tau) + A(\tau)x(\tau)\right\}d\tau, \tag{14}$$

$$\int_0^T R(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}x(\tau) + A(\tau)x(\tau)\right\}d\tau = r(t). \tag{15}$$

Справді, покладемо в задачі (4) – (6)

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + A(t)x(t) \tag{16}$$

і нехай $v(t)=z(t)-x(t)$. Тоді з урахуванням умови (2) та (3) задача (4) – (6) набуде вигляду

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v = u(t), \tag{17}$$

$$v(t_i+0) = S_i v(t_i-0), \quad i=\overline{1,l}, \quad \Phi_s(v) = 0, \quad s=\overline{1,p}. \tag{18}$$

За припущенням задача (17) і (18) має тільки тривіальний розв'язок $v(t)=0$, $u(t)=0$. Отже, якщо в задачі (4) – (6) вектор-функція $y(t)$ має вигляд (16), то

$$z(t) = x(t), \quad u(t) = 0. \tag{19}$$

Оскільки єдиний розв'язок задачі (4) – (6) виражається формулами (8) і (9), то, підставивши у них вираз (16) і врахувавши співвідношення (19), отримаємо формули (14) і (15).

3. Умови сумісності задачі. Встановимо умови сумісності задачі (1) – (3). Для цього розглянемо задачу з керуванням (4) – (7), у якій

$$y(t) = F(t, z(t)), \tag{20}$$

тобто

$$\frac{dz}{dt} + A(t)z = u(t) + F(t, z), \tag{21}$$

$$z(t_i + 0) = S_i z(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{22}$$

$$\Phi_s(z) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, p}, \quad p > m. \tag{23}$$

Оскільки розв'язок задачі (4) – (7) виражається формулами (8), (9), то, підставивши (8) у (20), дістанемо інтегральне рівняння

$$y(t) = F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t, \tau) y(\tau) d\tau\right]. \tag{24}$$

Таким чином, дослідження задачі з керуванням (21) – (23) зводиться до дослідження інтегрального рівняння (24).

Теорема 1. *Задача* (1) – (3) *сумісна лише тоді, коли існує розв'язок* $y^*(t)$ *рівняння* (24), *який задовольняє умову*

$$\int_0^T R(t, \tau) y^*(\tau) d\tau = r(t). \tag{25}$$

Доведення. Нехай існує розв'язок $y^*(t)$ рівняння (24) і виконується співвідношення (25). Тоді вектор-функція

$$x^*(t) = h(t) + \int_0^T G(t, \tau) y^*(\tau) d\tau \tag{26}$$

задовольняє рівняння (1) і умови (2) та (3). Справді, на основі формул (1), (26), (10), (13), (25) і (24) маємо

$$\frac{dx^*(t)}{dt} + A(t)x^*(t) - F[t, x^*(t)] = \frac{dh(t)}{dt} + A(t)h(t) +$$

$$+ \int_0^T \left\{\frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) + A(t)G(t, \tau)\right\} y^*(\tau) d\tau - F[t, x^*(t)] =$$

$$= r(t) + y^*(t) - \int_0^T R(t, \tau) y^*(\tau) d\tau - F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t, \tau) y^*(\tau) d\tau\right] = 0.$$

Далі, на підставі формул (11) і властивостей

$$G(t_i + 0, \tau) = S_i G(t_i - 0, \tau), \quad i = \overline{1, l},$$

$$\Phi_s(G(\cdot, \tau)) = 0, \quad s = \overline{1, p},$$

легко переконатись, що вектор-функція $x^*(t)$, яка визначається формулою (26), задовольняє умови (2) та (3).

Нехай тепер задача (1) – (3) сумісна, тобто існує розв'язок $x^*(t)$, який задовольняє умови (2) та (3). Покладемо

$$y^*(t) = \frac{d}{dt} x^*(t) + A(t)x^*(t) \tag{27}$$

і покажемо, що ця вектор-функція є розв'язком рівняння (24) і задовольняє умову (25). Оскільки, очевидно, виконується умова леми, то на основі формул (14), (15) і (27) маємо

$$x^*(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y^*(\tau)d\tau, \qquad \int_0^T R(t,\tau)y^*(\tau)d\tau = r(t),$$

тобто умова (25) виконується, а на підставі формул (27), (26) і (1) отримуємо

$$y^*(t) - F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y^*(\tau)d\tau\right] = \frac{d}{dt}x^*(t) + A(t)x^*(t) - F[t, x^*(t)] = 0,$$

тобто $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (24).

***Зауваження* 1**. Якщо $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (24), який не задовольняє умову (25), то вектор-функції

$$z^*(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y^*(\tau)d\tau, \tag{28}$$

$$u^*(t) = r(t) - \int_0^T R(t,\tau)y^*(\tau)d\tau, \tag{29}$$

є розв'язком задачі з керуванням (21) – (23).

Справді, вектор-функція $z^*(t)$, побудована за формулою (28), умови (22) і (23) задовольняє очевидним чином, а використавши формули (21), (28), (29), (10), (13) і (24), маємо

$$\frac{d}{dt}z^*(t) + A(t)z^*(t) - u^*(t) - F[t, z^*(t)] = \frac{dh(t)}{dt} + A(t)h(t) -$$

$$- r(t) + \int_0^T \left\{\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau) + A(t)G(t,\tau) + R(t,\tau)\right\}y^*(\tau)d\tau - F[t, z^*(t)] =$$

$$= y^*(t) - F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y^*(\tau)d\tau\right] = 0.$$

Але в цьому випадку задача (1) – (3) несумісна, бо вектор-функція $z^*(t)$ (28) не задовольняє рівняння (1). Вона задовольняє рівняння (1) лише тоді, коли виконується умова (25), тобто на підставі формули (29) $u^*(t) = 0$.

Наслідок. *Задача* (1) – (3) *сумісна лише тоді, коли задача з керуванням* (21) – (23) *має розв'язок, у якого* $u^*(t) = 0$.

4. Застосування наближених методів. До задачі (1) – (3) можна застосувати відомі наближені методи, зокрема ітераційні, проекційні та проекційно-ітеративні [4 – 8].

Зупинимось на одному варіанті проекційно-ітеративного методу, згідно з яким послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1) – (3) визначаємо з допоміжної задачі

$$\frac{dx_k}{dt} + A(t)x_k = u_k(t) + z_k(t), \tag{30}$$

$$x_k(t_i + 0) = S_i x_k(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{31}$$

$$\Phi_s(x_k) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, p}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{32}$$

в якій $u_k(t) = B(t)\lambda_k$ і

$$z_k(t) = w_k(t) + F[t, x_{k-1}(t)]. \tag{33}$$

Поправку шукаємо у вигляді

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \phi_j(t) \tag{34}$$

і вимагаємо, щоб вона задовольняла умови

$$\int_0^T \{ y_k(t) - z_k(t) \} \psi_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{35}$$

де $\{ \phi_j(t),\ j = \overline{1, n} \}$ та $\{ \psi_i(t),\ i = \overline{1, n} \}$ — задані системи лінійно незалежних вектор-функцій і

$$y_k(t) = F[t, x_k(t)]. \tag{36}$$

Початкове наближення $x_0(t)$, яке задовольняє умови (2) та (3), можна задати довільним чином чи визначити із задачі (30) – (32) при $k = 0$ і заданій вектор-функції $z_0(t)$.

На основі формул (30) – (36) для визначення невідомих параметрів a_j^k, $j = \overline{1, n}$, і вектора $\lambda_k \in \mathbf{R}^\nu$ отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, причому ν рівнянь системи — лінійні, а n рівнянь, взагалі кажучи, — нелінійні.

Проекційно-ітеративний метод (30) – (36) для задачі (1) – (3) зводиться до проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння (24).

Справді, за припущенням існує єдиний розв'язок задачі (30) – (32), що виражається формулами

$$x_k(t) = h(t) + \int_0^T G(t, \tau) z_k(\tau) d\tau, \tag{37}$$

$$u_k(t) = r(t) - \int_0^T R(t, \tau) z_k(\tau) d\tau, \tag{38}$$

де, як випливає з формул (33) і (36),

$$z_k(t) = y_{k-1}(t) + w_k(t). \tag{39}$$

Підставимо тепер (37) у (36), в результаті чого одержимо

$$y_k(t) = F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t, \tau) z_k(\tau) d\tau \right]. \tag{40}$$

На основі аналізу формул (34), (35), (39) і (40) приходимо до висновку, що вони визначають один з варіантів проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння (24), достатні умови збіжності якого можна знайти, наприклад, в [4, 7].

Припустимо, що проекційно-ітеративний метод для інтегрального рівняння (24) збіжний, тобто

$$\lim_{k \to \infty} y_k(t) = \lim_{k \to \infty} z_k(t) = y^*(t), \tag{41}$$

де $y^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння. В цьому випадку, як випливає із співвідношень (37), (38) і (41), маємо

$$\lim_{k \to \infty} x_k(t) = h(t) + \int_0^T G(t, \tau) y^*(\tau) d\tau = x^*(t), \tag{42}$$

$$\lim_{k \to \infty} u_k(t) = r(t) - \int_0^T R(t,\tau) y^*(\tau) d\tau = u^*(t). \tag{43}$$

Якщо, крім цього, задача (1) – (3) сумісна, то, по-перше, згідно з наслідком в формулі (43) $u^*(t) = 0$, а, по-друге, вектор-функція $x^*(t)$ (42) — розв'язок даної задачі. Враховуючи викладене, одержуємо таку теорему.

Теорема 2. *Якщо проекційно-ітеративний метод* (30) – (36) *збіжний і* $u_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то задача* (1) – (3) *сумісна.*

Зауваження 2. В проекційно-ітеративному методі координатну систему $\left\{\phi_j(t),\ j = \overline{1,n}\right\}$ доцільно вибирати таким чином, щоб ні одна з вектор-функцій не була лінійною комбінацією стовпців матриці $B(t)$. В противному випадку такі координатні вектор-функції не впливають на швидкість збіжності методу.

Зауваження 3. Проекційно-ітеративний метод як частинний випадок містить у собі метод послідовних наближень, суть якого полягає в тому, що послідовні наближення будуються на основі алгоритму (30) – (33), в якому $w_k(t) = 0$. Збіжність такого методу для задачі (1) – (3) зводиться до збіжності методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (24), тобто

$$z_k(t) = F\left[t, h(t) + \int_0^T G(t,\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau\right].$$

Зауваження 4. Наближення $x_0(t)$, побудоване за методом (30) – (36) при $k = 0$ і $z_0(t) = w_0(t)$, збігається з наближенням, побудованим за проекційним методом для задачі (1) – (3). Обгрунтування останнього зводиться до обгрунтування проекційного методу для інтегрального рівняння (24), умови збіжності якого висвітлені в обширній літературі (див., наприклад, [8]).

Зауваження 5. На основі формул (8), (20), (10), (13) та (14) легко отримати інтегральне рівняння

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau) F[\tau, z(\tau)] d\tau \tag{44}$$

і переконатись, що будь-який розв'язок цього рівняння, який задовольняє умову

$$\int_0^T R(t,\tau) F[\tau, z(\tau)] d\tau = r(t), \tag{45}$$

є розв'язком задачі (1) – (3) і, навпаки, кожний розв'язок задачі (1) – (3) є розв'язком рівняння (44). Отже, умови сумісності можна переформулювати: задача (1) – (3) сумісна лише тоді, коли існує розв'язок інтегрального рівняння, який задовольняє умову (45).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: наук. думка, 1993. – 288 с.
5. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1501–1509.
6. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решений // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С.82–96.
7. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 224 с.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Одержано 20.11.97