УДК 517.43 + 517.984

Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ЧИСЛА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ*

We prove a theorem on upper bound for the number of characteristic values of an operator-valued function holomorphic and bounded in a domain. This estimate is similar to the well-known inequality for zeros of a numerical function holomorphic and bounded in a domain. We derive a number of corollaries from the theorem obtained, in particular, a statement on estimate for the number of characteristic values of polynomial bundles of operators lying in a given disk.

Доведено теорему про оцінку зверху числа характеристичних значень голоморфної та обмеженої в області операторнозначної функції. Ця оцінка аналогічна добре відомій нерівності для нулів голоморфної та обмеженої в області числової функції. З отриманої теореми виведено ряд наслідків, зокрема твердження про оцінку числа характеристичних значень поліноміальних жмутків операторів, що лежать у заданому крузі.

1. Введение. Данная работа посвящена доказательству теоремы об оценке сверху числа характеристических значений голоморфной и ограниченной в области оператор-функции. Далее предполагается, что все операторы являются линейными ограниченными и действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, а I — тождественный в $\mathfrak{H}$ оператор. Работа состоит из трех пунктов. Во втором пункте вводятся все необходимые понятия и обозначения, в частности, в нем дано восходящее к М. В. Келдышу [1, 2] определение кратности характеристического значения голоморфной оператор-функции. В этом же пункте сформулирована основная теорема работы и выведен ряд следствий из нее. Следствие 2 является простой переформулировкой основной теоремы на случай круга радиуса R и в нем, в частности, показано, что для характеристических значений μ_k голоморфной и ограниченной в этом круге оператор-функции справедлива оценка

$$\sum_k \left(R - |\mu_k| \right) < \infty,$$

которая хорошо известна в случае голоморфных и ограниченных числовых функций (см., например, гл. 6, § 4 в [3]). Далее в следствии 3 устанавливается оценка сверху числа характеристических значений полиномиального пучка операторов, которые принадлежат произвольному кругу радиуса $r > 0$ (из полученной в этом следствии оценки несложно вывести теорему работы [4]). Приведенные в следствиях 2 и 3 неравенства таковы, что из них легко выводятся следствия 4 и 5, относящиеся к оценкам количества характеристических значений семейства полиномиальных пучков операторов, которое определяется некоторым комплексным параметром ω. Необходимость в получении такого рода оценок продиктована рядом задач математической физики (см., например, [5 – 9]), которые сводятся к исследованию семейства квадратичных пучков операторов L_ω, $\omega \in \mathbb{C}$, представимого в виде

$$L_\omega(\lambda) = I + \lambda B + \lambda^2 C + \omega T, \tag{1}$$

где B, C и T — вполне непрерывные операторы, λ — спектральный параметр, которому соответствуют характеристические значения $\mu_k(\omega)$, а также отвечающие им цепочки собственных и присоединенных к ним векторов. Параметр ω в (1) задает семейство пучков операторов и, например, в задачах о нормальных

*Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Министерстве науки Украины.

колебаниях упругого полуцилиндра выражает частоту этих колебаний [5, 9]. Из установленной в следствии 5 оценки вытекает теорема работы [10], из которой, в свою очередь, получается основной результат заметки [9].

В заключительном третьем пункте дано доказательство основной теоремы.

Отметим, что в приведенных далее оценках постоянные, как правило, округлены. Однако уточнения их (которые, как видно из доказательств, легко сделать) не повлияют на качественную сторону этих оценок, но сделают их лишь более громоздкими.

2. Формулировка основной теоремы и следствия из нее. Чтобы сформулировать основной результат работы, введем необходимые обозначения и понятия. Через $[\mathfrak{H}]$ обозначим множество ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а через $\ker A$ — ядро оператора A.

В дальнейшем предполагаем L голоморфной оператор-функцией, определенной в области Ω (т. е. на открытом связном множестве комплексной плоскости) и принимающей свои значения в $[\mathfrak{H}]$. Число $\mu \in \Omega$ назовем *характеристическим значением* L, если существует такой ненулевой вектор x_0, для которого $L(\mu)x_0 = 0$. Тогда x_0 — *собственный вектор* оператор-функции L, отвечающий характеристическому значению μ. Элемент x_k (возможно равный нулю) назовем *присоединенным вектором порядка* $k \geq 1$ к собственному вектору x_0, если x_k получается в результате решения системы уравнений

$$L(\mu)x_1 + L^{(1)}(\mu)x_0 = 0,$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$L(\mu)x_k + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\mu)x_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!}L^{(k)}(\mu)x_0 = 0$$

относительно векторов $x_1, \dots, x_k$. Элементы $x_0, \dots, x_k$ — *цепочка собственного и присоединенных к нему векторов* оператор-функции L, отвечающая характеристическому значению μ. Каждому собственному вектору x_0 оператор-функции L поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к x_0 элементов. Величина $d + 1$ — *кратность собственного вектора* x_0. В случае, когда собственный вектор x_0 имеет присоединенные векторы x_k сколь угодно большого порядка k, считаем его кратность равной бесконечности. *Кратностью характеристического значения* $\mu \in \Omega$ оператор-функции L назовем величину $N(\mu; L)$, равную максимальному значению суммы кратностей всех линейно независимых собственных векторов, отвечающих этому характеристическому значению. Если хотя бы один из собственных векторов $x \in \ker L(\mu)$ имеет бесконечную кратность или $\dim\ker L(\mu) = \infty$, то $N(\mu; L) = \infty$. В случае, когда μ не является характеристическим значением L, полагаем $N(\mu; L) := 0$. Итак, величина $N(\mu; L)$ определена для всех $\mu \in \Omega$. Для произвольного множества $\Psi \subseteq \Omega$ введем число $N(\Psi; L) = \sum_{\mu \in \Psi} N(\mu; L)$, которое конечно лишь в том случае, когда Ψ принадлежит только конечное число характеристических значений μ_k оператор-функции L и все они имеют конечную кратность. Число $N(\Psi; L)$ определяет количество характеристических значений с учетом их кратностей оператор-функции L, принадлежащих множеству Ψ.

Резольвентным множеством оператор-функции L назовем множество тех значений $\lambda \in \Omega$, в которых оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный; при этом $L^{-1}(\lambda) := (L(\lambda))^{-1}$. Резольвентное множество оператор-функции L

обозначим через $\rho(L)$, а его дополнение к Ω — через $\sigma(L)$. Множество $\sigma(L)$ — *спектр оператор-функции* L. Число $\mu \in \sigma(L)$ назовем *дискретной точкой спектра* L, если некоторая проколотая окрестность μ принадлежит резольвентному множеству оператор-функции L и в этой проколотой окрестности справедливо представление

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{h=0}^{d} \frac{R_{d-h}}{(\lambda-\mu)^{h+1}} + W(\lambda)$$

с голоморфной в точке μ функцией W, принимающей свои значения в $[\mathfrak{H}]$, и с конечномерными операторами $R_0, \ldots, R_d$.

Несложно показать (см., например, лемму 1 в [11]), что если μ — дискретная точка спектра оператор-функции L, то μ является характеристическим значением L и для него $N(\mu; L) < \infty$. Достаточное условие дискретности всего спектра L, находящегося в области Ω, дает следующая лемма, принадлежащая М. В. Келдышу (см. гл. 1, п. 1 в [2] или лемму 5.5 в [12]).

Лемма 1. *Пусть голоморфная в области Ω оператор-функция A принимает свои значения в множестве вполне непрерывных операторов и при некотором $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $I + A(\lambda_0)$ обратим. Тогда весь спектр оператор-функции $\lambda \mapsto I + A(\lambda)$ (находящийся в Ω) состоит из не более чем счетного числа изолированных дискретных точек спектра, возможные предельные точки которых могут находиться лишь на границе области Ω и на бесконечности.*

Замечание. Пусть Ψ — замкнутое ограниченное множество, принадлежащее области Ω, а оператор-функция A удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда согласно утверждению этой леммы для оператор-функции L, заданной равенством $L(\lambda) = I + A(\lambda)$, величина $N(\Psi; L)$ конечна.

В следующей далее теореме и в следствии 1 из нее предполагаем Ω односвязной областью с границей, содержащей более одной точки (последнее требование гарантирует, согласно теореме Римана, существование конформного отображения Ω на единичный круг). Обозначим через $g(\cdot, \cdot; \Omega)$ функцию Грина области Ω. Тогда справедливо равенство (см., например, [3], гл. 6, § 1.6)

$$g(\lambda, \mu; \Omega) = \ln\left|\frac{1-\alpha(\lambda)\overline{\alpha(\mu)}}{\alpha(\lambda)-\alpha(\mu)}\right|, \qquad \lambda, \mu \in \Omega, \tag{2}$$

в котором α — произвольное конформное отображение области Ω на единичный круг $\Phi_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Из (2) следуют соотношения $g(\lambda, \mu; \Omega) = g(\mu, \lambda; \Omega)$ и $g(\lambda, \mu; \Omega) > 0$ при $\lambda, \mu \in \Omega$, а также гармоничность для каждого фиксированного $\mu \in \Omega$ функции $g(\cdot, \mu; \Omega)$ в области $\Omega \setminus \{\mu\}$. Поэтому для произвольного замкнутого ограниченного множества Ψ, принадлежащего Ω, корректно определена положительная величина

$$c(\lambda, \Psi; \Omega) := \inf\{g(\lambda, \mu; \Omega) \colon \mu \in \Psi\}, \qquad \lambda \in \Omega. \tag{3}$$

В последующих утверждениях фигурируют суммы вида

$$\sum_{k \colon \mu_k \in \Omega} g(\lambda, \mu_k; \Omega), \tag{4}$$

в которых μ_k — характеристические значения оператор-функции L, занумерованные с учетом их кратностей, а $\lambda \in \Omega$. Условия этих утверждений таковы, что оператор-функция L представима в виде $L(\lambda) = I + A(\lambda)$ с оператор-функцией A, удовлетворяющей требованиям леммы 1. Следовательно, в сумме (4) не более чем счетное число положительных слагаемых и поэтому их нумерация (или, что то же самое, нумерация характеристических значений μ_k) не влияет на сумму (4). Отметим, что если в области Ω нет характеристических значений оператор-функции L, то сумма (4) предполагается равной нулю.

И наконец, для вполне непрерывного оператора A обозначим через $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, … последовательность собственных значений этого оператора (если они, конечно, имеются), занумерованную в порядке невозрастания модулей и с учетом кратностей. Числа $s_k(A) := \lambda_k(C)$, где оператор $C = (A^*A)^{1/2} \geq 0$, назовем s-числами оператора A. Для каждого $t > 0$ обозначим через $\nu(t; A)$ количество чисел $s_k(A)$, больших t^{-1}, и положим $\nu(0; A) := 0$. Тогда $\nu(t; A) \equiv 0$ при $A = 0$ и $\nu(t; A) = 0$ при $A \neq 0$, $0 \leq t \leq \|A\|^{-1}$. Функцию $\nu(\cdot; A)$ назовем *функцией распределения s-чисел оператора* A. Далее, для сокращения записи, равенством

$$\Theta(t; A) := \int_0^t \frac{\nu(\xi; A)}{\xi} d\xi, \qquad t \geq 0, \tag{5}$$

введем *усредненную функцию распределения s-чисел* оператора A.

Основным утверждением работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть оператор-функция L представима в виде*

$$L(\lambda) = I + B_1(\lambda) A_1 D_1(\lambda) + \ldots + B_n(\lambda) A_n D_n(\lambda), \tag{6}$$

где все операторы A_l вполне непрерывны, а B_l и D_l — такие голоморфные в области Ω оператор-функции со значениями в $[\mathfrak{H}]$, что

$$m_l := \sup\{\|B_l(\lambda)\| \, \|D_l(\lambda)\| : \lambda \in \Omega\} < \infty, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Предположим, что при некотором $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $L(\lambda_0)$ обратим. Тогда для любого $\delta > 1$ справедлива оценка

$$\sum_{k:\, \mu_k \in \Omega} g(\lambda_0, \mu_k; \Omega) \leq \sum_{l=1}^{n} \Bigg\{ 2\Theta(\delta m_l n; A_l) + $$
$$+ \nu(\delta m_l n; A_l) \ln \left[\left(1 + \frac{1}{(\delta - 1)n}\right) \left(1 + \frac{\|L^{-1}(\lambda_0)\|}{\delta n}\right) \right] \Bigg\}, \tag{8}$$

в которой μ_k — характеристические значения L.

В частности, для произвольного ограниченного замкнутого множества $\Psi \subset \subset \Omega$ имеем

$$N(\Psi; \Omega) \leq \frac{1}{c(\lambda_0, \Psi; \Omega)} \sum_{l=1}^{n} \Bigg\{ 2\Theta(\delta m_l n; A_l) + $$
$$+ \nu(\delta m_l n; A_l) \ln \left[\left(1 + \frac{1}{(\delta - 1)n}\right) \left(1 + \frac{\|L^{-1}(\lambda_0)\|}{\delta n}\right) \right] \Bigg\}. \tag{9}$$

Неравенство (9) является простым следствием оценки (8). Действительно, из определения (3) числа $c(\lambda, \Psi; \Omega)$ и включения $\Psi \subset \Omega$ следует

$$c(\lambda_0, \Psi; \Omega) N(\Psi; L) \leq \sum_{k:\, \mu_k \in \Psi} g(\lambda_0, \mu_k; \Omega) \leq \sum_{k:\, \mu_k \in \Omega} g(\lambda_0, \mu_k; \Omega),$$

откуда и из (8) получаем (9).

Оператор-функция L, заданная равенством (6), удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому согласно замечанию число $N(\Psi; L)$ конечно. Неравенство (9) дает оценку сверху этого числа в зависимости от функций распределения s-чисел операторов A_l, верхних граней норм оператор-функций B_l и D_l из условия (7), а также от величины $c(\lambda_0, \Psi; \Omega)$, являющейся числовой характеристикой расположения точки λ_0 и ограниченного замкнутого множества Ψ внутри области Ω. Поскольку согласно лемме 1 во всех точках области Ω, за исключением, быть может, счетного числа изолированных точек, оператор-функция L обратима, то любую из этих точек можно принять за λ_0 в условии теоремы. Это замечание и произвольность числа $\delta > 1$ в утверждении теоремы дают возможность в ряде случаев минимизировать правые части оценок (8) и (9) за счет выбора параметров δ и λ_0.

Теперь выведем из теоремы такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда*

$$\sum_{k:\, \mu_k \in \Omega} g(\lambda_0, \mu_k; \Omega) \le 2 \sum_{l=1}^{n} \Theta\Big(\big(3n + \|L^{-1}(\lambda_0)\|\big) m_l; A_l\Big). \tag{10}$$

В частности, для произвольного ограниченного замкнутого множества $\Psi \subset \Omega$ *справедлива оценка*

$$N(\Psi; L) \le \frac{2}{c(\lambda_0, \Psi; \Omega)} \sum_{l=1}^{n} \Theta\Big(\big(3n + \|L^{-1}(\lambda_0)\|\big) m_l; A_l\Big). \tag{11}$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (8) число $\delta = 1 + n^{-1}$, получаем

$$\sum_{k:\, \mu_k \in \Omega} g(\lambda_0, \mu_k; \Omega) \le \sum_{l=1}^{n} \Bigg\{ 2\Theta((n+1)m_l; A_l) + \\ + \nu((n+1)m_l; A_l) \ln\left(2 + 2\frac{\|L^{-1}(\lambda_0)\|}{n+1}\right)\Bigg\}. \tag{12}$$

Но

$$2 + 2\frac{\|L^{-1}(\lambda_0)\|}{n+1} \le \left(\frac{3n + \|L^{-1}(\lambda_0)\|}{n+1}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда, учитывая неубываемость функции $\nu(\cdot\,; A_l)$, имеем

$$\nu((n+1)m_l; A_l) \ln\left(2 + 2\frac{\|L^{-1}(\lambda_0)\|}{n+1}\right) \le 2 \int\limits_{(n+1)m_l}^{(3n + \|L^{-1}(\lambda_0)\|)m_l} \frac{\nu(\xi; A_l)}{\xi}\, d\xi .$$

Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (12) и учитывая определение (5) функции $\Theta(\cdot\,; A_l)$, получаем (10).

Оценка (11) выводится из неравенства (10) точно так же, как оценка (9) — из неравенства (8).

Выведем из следствия 1 утверждение, относящееся к случаю, когда область Ω совпадает с кругом Φ_R комплексной плоскости радиуса $R > 0$ и с центром в нуле, т. е.

$$\Phi_R := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}.$$

Считаем также, что $\overline{\Phi}_r := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r\}$ для $r \ge 0$.

Следствие 2. *Пусть условия теоремы выполнены с областью* $\Omega = \Phi_R$. *Тогда в обозначениях, введенных при формулировке теоремы, справедлива оценка*

$$\sum_{k:\,|\mu_k|<R} (R-|\mu_k|) \le \frac{2R^2}{(R-|\lambda_0|)\ln\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{n} \Theta\Big(\big(3n+\big\|L^{-1}(\lambda_0)\big\|\big)m_l;\, A_l\Big). \tag{13}$$

В частности, для произвольного $r \in [0, R)$ *выполнено неравенство*

$$N(\overline{\Phi}_r; L) \le \frac{2R^2}{(R-r)(R-|\lambda_0|)\ln\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{n} \Theta\Big(\big(3n+\big\|L^{-1}(\lambda_0)\big\|\big)m_l;\, A_l\Big). \tag{14}$$

Доказательство. Конформное отображение круга Φ_R на единичный круг Φ_1 задается функцией $\lambda \mapsto R^{-1}\lambda$ и поэтому функция Грина для круга Φ_R имеет представление

$$g(\lambda, \mu; \Phi_R) = \ln\left|\frac{R^2-\lambda\overline{\mu}}{R(\lambda-\mu)}\right|, \qquad |\lambda|<R, \qquad |\mu|<R. \tag{15}$$

Пусть λ и μ отличны от нуля. Тогда

$$\left|\frac{R^2-\lambda\overline{\mu}}{R(\lambda-\mu)}\right| = \left\{\frac{R^4-2R^2|\lambda||\mu|\cos(\arg\lambda-\arg\mu)+|\lambda|^2|\mu|^2}{R^2\big(|\lambda|^2-2|\lambda||\mu|\cos(\arg\lambda-\arg\mu)+|\mu|^2\big)}\right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge \left\{\min_{-1\le t\le 1}\frac{R^4-2R^2|\lambda||\mu|t+|\lambda|^2|\mu|^2}{R^2\big(|\lambda|^2-2|\lambda||\mu|t+|\mu|^2\big)}\right\}^{1/2}.$$

Дифференцированием показывается, что выражение, минимум которого ищется, монотонно возрастает на полуинтервале $[-1, 1)$; значит, этот минимум достигается при $t=-1$. Тем самым

$$\left|\frac{R^2-\lambda\overline{\mu}}{R(\lambda-\mu)}\right| \ge \frac{R^2+|\lambda||\mu|}{R(|\lambda|+|\mu|)} =$$

$$= 1+\frac{(R-|\lambda|)(R-|\mu|)}{R(|\lambda|+|\mu|)} \ge 1+\frac{(R-|\lambda|)(R-|\mu|)}{2R^2}. \tag{16}$$

(Очевидно, что эти же оценки справедливы, когда одно либо оба числа λ и μ равны нулю.)

Функция $\xi \mapsto \ln(1+2^{-1}\xi)$ выпукла вверх, следовательно, $\ln(1+2^{-1}\xi) \ge$ $\ge \xi\ln\frac{3}{2}$ при $0 \le \xi \le 1$. Отсюда и из соотношений (15), (16) получаем

$$g(\lambda, \mu; \Phi_R) \ge \frac{(R-|\lambda|)(R-|\mu|)}{R^2}\ln\frac{3}{2}.$$

Это неравенство и утверждение (10) следствия 1 показывает справедливость оценки (13). Неравенство (14) является непосредственным следствием оценки (13).

Для полиномиальных пучков операторов из следствия 2 выводится такое утверждение.

Следствие 3. *Пусть полиномиальный пучок операторов* L *определен равенством*

$$L(\lambda) = I + A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^n A_n,$$

где $A_0, \ldots, A_n$ *— вполне непрерывные операторы. Предположим, что при некотором* λ_0 *оператор* $L(\lambda_0)$ *обратим. Тогда для всех* $r \geq 2|\lambda_0|$ *справедлива оценка*

$$N(\overline{\Phi}_r; L) \leq \frac{8}{\ln\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{n} \Theta\left(2^l\left(6n + \left\|L^{-1}(\lambda_0)\right\|\right) r^l; A_l\right). \tag{17}$$

Доказательство. Так как весь спектр оператор-функции L дискретен, а функции $\Theta(\cdot; A_l)$ непрерывны, то оценку (17) достаточно установить в предположении, что $r > 0$. Положим в утверждении (14) следствия 2 число $R = 2r$. Тогда

$$\frac{R^2}{(R-r)(R-|\lambda_0|)} \leq 4.$$

А учитывая определение чисел m_l из условия (7) (в котором в данном случае считаем $B_l(\lambda) := \lambda^n I$, $D_l(\lambda) := I$ и $\Omega := \Phi_{2r}$), имеем $m_l = (2r)^l$. Из этих соотношений и оценки (14) при n, равном $n+1$, где n взято из условий следствия 3 (поскольку в следствии 3 операторы A_l занумерованы индексом l, изменяющимся от 0 до n), получаем требуемое неравенство (17).

Выведем теперь из следствий 2 и 3 утверждения, относящиеся к оценкам числа характеристических значений семейства полиномиальных пучков операторов, зависящего от комплексного параметра.

Следствие 4. *Пусть семейство пучков операторов* L_ω *задано равенством*

$$L_\omega(\lambda) = I + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^n A_n + \omega T,$$

где $A_0, \ldots, A_n$ *и* T *— вполне непрерывные операторы. Пусть, кроме того, на комплексной плоскости существует такая непрерывная кривая* Γ, *проходящая через нуль и содержащая сколь угодно большие по модулю комплексные числа, что оператор* $L_0(\lambda)$ *обратим при* $\lambda \in \Gamma$ *и*

$$\left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq c, \qquad |\lambda|^n \left\|TL_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq c \tag{18}$$

с независящей от $\lambda \in \Gamma$ *постоянной* $c \geq 1$. *Тогда для всех* $\omega \in \mathbb{C}$ *и* $r \geq 0$ *справедлива оценка*

$$N(\overline{\Phi}_r; L_\omega) \leq \frac{16}{\ln\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{n} \Theta\left(2^{l+4} c^2 n\left(r + |\omega|^{1/n}\right)^l; A_l\right). \tag{19}$$

Доказательство. При $\omega = 0$ оценка (19) непосредственно следует из оценки (17), первого неравенства в условии (18), в котором считаем $\lambda = \lambda_0 = 0$, и предположения о $c \geq 1$. Поэтому далее считаем $\omega \neq 0$.

Для каждого фиксированного $\omega \in \mathbb{C}$ найдем такое $\lambda(\omega)$, что

$$\lambda(\omega) \in \Gamma, \qquad |\lambda(\omega)| = (2c|\omega|)^{1/n}. \tag{20}$$

Тогда из второго неравенства в условии (18) получаем соотношения

$$\left\|\omega T L_0^{-1}(\lambda(\omega))\right\| \leq c|\omega||\lambda(\omega)|^{-n} = \frac{1}{2},$$

а так как

$$L_\omega(\lambda(\omega)) = \left[I + \omega T L_0^{-1}(\lambda(\omega))\right] L_0(\lambda(\omega)),$$

то с учетом первого неравенства в условии (18) имеем

$$\left\| L_\omega^{-1}(\lambda(\omega)) \right\| \le 2c. \tag{21}$$

Положим теперь в следствии 2 операторы A_l и оператор-функции B_l и D_l заданными равенствами

$$\begin{gathered} A_l := A_l, \quad B_l(\lambda) := \lambda^l I, \quad D_l(\lambda) := I, \quad l = 1, \ldots, n, \\ A_{n+1} := T, \quad B_{n+1}(\lambda) := \omega I, \quad D_{n+1}(\lambda) := I. \end{gathered} \tag{22}$$

(Тем самым считаем, что в следствии 2 число n равно $n+1$, где n взято из условий следствия 4). Пусть, кроме того,

$$\lambda_0 := \lambda(\omega), \quad R := 2(r + |\lambda(\omega)|). \tag{23}$$

Из соотношений (20), (22), (23) и определения чисел m_l из условия (7), в котором в данном случае область Ω полагаем равной кругу Φ_R, заключаем, что

$$m_l = 2^l(r + |\lambda(\omega)|)^l = 2^l\left(r + (2c|\omega|)^{1/n}\right)^l, \quad l = 1, \ldots, n,$$

а $m_{n+1} = |\omega|$. Учитывая эти равенства, соотношения (21) – (23) и применяя к оператор-функции $L := L_\omega$ оценку (14), выводим

$$\begin{aligned} N(\overline{\Phi}_r; L_\omega) \le\ & 8\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{-1} \Theta((3n+3+2c)|\omega|; T) + \\ & + \frac{8}{\ln\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{n} \Theta\left(2^l(3n+3+2c)\left(r + (2c|\omega|)^{1/n}\right)^l; A_l\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть оператор $C(\lambda) := T L_0^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$. Тогда

$$T = C(\lambda)(I + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^n A_n),$$

а из второго неравенства в условии (18) следует $\| C(\lambda) \| \le c|\lambda|^{-n}$, $\lambda \in \Gamma$. Отсюда, учитывая, что кривая Γ содержит сколь угодно большие по модулю комплексные числа, получаем оценку $\| Tx \| \le c \| A_n x \|$ для всех векторов $x \in \mathfrak{H}$. Эта оценка и минимаксное свойство s-чисел (см., например, лемму XI.9.2 в [13]) показывают, что $s_k(T) \le c\, s_k(A_n)$, $k = 1, 2, \ldots$, и поэтому $\nu(t; T) \le \nu(ct; A_n)$, $t \ge 0$. Принимая во внимание это неравенство и определение (5) функции $\Theta(\cdot\,; A)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \Theta((3n+3+2c)|\omega|; T) \le\ & \Theta((3n+3+2c)c|\omega|; A_n) \le \\ \le\ & \Theta\left(2^n(3n+3+2c)\left(r + (2c|\omega|)^{1/n}\right)^n; A_n\right). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в правую часть неравенства (24), а затем (поскольку $c \ge 1$) учитывая неравенства

$$(3n+3+2c)\left(r + (2c|\omega|)^{1/n}\right)^l \le 2^4 c^2 n\left(r + |\omega|^{1/n}\right)^l, \quad l = 1, \ldots, n,$$

выводим (19).

И наконец, детализируем следствие 4 в важном для приложений случае, когда функции рапределения s-чисел операторов A_l допускают степенную оценку.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия следствия 4. Предположим также, что найдутся такие положительные постоянные β и c_1, для которых*

$$\nu(t; A_l) \le c_1 t^{\beta/l}, \quad l = 1, \dots, n, \quad t \ge 0. \tag{25}$$

Тогда для всех $\omega \in \mathbb{C}$ и $r \ge 0$ справедлива оценка

$$N(\overline{\Phi}_r; L_\omega) \le d\left(r + |\omega|^{1/n}\right)^\beta$$

с постоянной

$$d := \left(\beta \ln \frac{3}{2}\right)^{-1} 2^{5\beta+4} c^{2\beta} c_1 n^{\beta+2}.$$

Доказательство. Учитывая определение (5) усредненной функции распределения s-чисел оператора, условие (25) и предположение о том, что в (19) постоянная $c \ge 1$, имеем

$$\Theta\left(2^{l+4} c^2 n\left(r + |\omega|^{1/n}\right)^l; A_l\right) \le$$

$$\le \frac{c_1 l}{\beta} 2^\beta (2^4 c^2 n)^{\beta/l} \left(r + |\omega|^{1/n}\right)^\beta \le$$

$$\le \frac{c_1}{\beta} 2^{5\beta} c^{2\beta} n^{\beta+1}\left(r + |\omega|^{1/n}\right)^\beta, \quad l = 1, \dots, n.$$

Подставляя эти соотношения в правую часть неравенства (19), выводим утверждение следствия 5.

3. Доказательство основной теоремы использует ряд известных понятий и утверждений, которые приведем в необходимом для дальнейшего виде.

Если F — конечномерный оператор, то он имеет лишь конечное число отличных от нуля собственных значений $\lambda_k(F)$. Поэтому определено число

$$\det(I + F) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k(F)), \tag{26}$$

называемое *определителем оператора* $I + F$. Определитель оператора $I + F$ имеет ряд обычных свойств определителя квадратной матрицы (см., например, гл. XI, § 9 в [13] или гл. IV, § 1 в [14]). Одно из таких свойств сформулировано в следующем утверждении, являющимся частным случаем теоремы 5.1 работы [15].

Лемма 2. *Пусть голоморфная в области Ω оператор-функция F принимает свои значения в множестве конечномерных операторов. Тогда числовая функция*

$$\Delta\colon \lambda \mapsto \det(I + F(\lambda)), \quad \lambda \in \Omega,$$

голоморфна в области Ω. Если к тому же при некотором $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $I + F(\lambda_0)$ обратим, то голоморфная функция Δ не равна тождественно нулю, а ее нули и их кратностями совпадают соответственно с характеристическими значениями и их кратностями у оператор-функции $\lambda \mapsto I + F(\lambda)$.

Далее потребуется также такое утверждение (ср. с леммой 1 работы [16]).

Лемма 3. *Пусть A_l — такие конечномерные операторы, что их отличные* *от нуля s-числа больше, чем r_l^{-1}, где $r_l > 0$, а $l = 1, \ldots, n$. Тогда для любых операторов B_l и D_l справедлива оценка*

$$\ln\left|\det\left(I + \sum_{l=1}^{n} B_l A_l D_l\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{n} \left\{\Theta(r_l; A_l) + \nu(r_l; A_l)\ln\left(1 + r_l^{-1}\| B_l \| \| D_l \|\right)\right\}. \tag{27}$$

Доказательство. Обозначим через Δ определитель из левой части неравенства (27). Тогда согласно формуле (26) и известному неравенству Г. Вейля (см., например, следствие 3.1 из гл. II, § 2 в [14]) справедливы соотношения

$$\ln|\Delta| := \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 + \lambda_k\left(\sum_{l=1}^{n} B_l A_l D_l\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + s_k\left(\sum_{l=1}^{n} B_l A_l D_l\right)\right). \tag{28}$$

В работе [17], в частности, установлено, что для произвольных конечномерных операторов F_l выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + s_k\left(\sum_{l=1}^{n} F_l\right)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} \ln\left(1 + s_k(F_l)\right).$$

Отсюда, из (28) и из хорошо известной оценки $s_k(BAD) \le \| B \| \| D \| s_k(A)$ для s–чисел вполне непрерывного оператора A с учетом условия леммы о том, что все отличные от нуля s-числа операторов A_l больше, чем r_l^{-1}, выводим соотношения

$$\ln|\Delta| \le \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \| B_l \| \| D_l \| s_k(A_l)\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\int_0^{r_l} \ln\left(1 + \| B_l \| \| D_l \| t^{-1}\right) d\nu(t; A_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left\{\int_0^{r_l} \frac{\| B_l \| \| D_l \| \nu(t; A_l)}{t(t + \| B_l \| \| D_l \|)} dt + \nu(r_l; A_l)\ln\left(1 + r_l^{-1}\| B_l \| \| D_l \|\right)\right\},$$

из которых с учетом определения (5) функции $\Theta(\cdot\,; A_l)$ следует оценка (27).

Лемма 4. *Пусть граница области Ω содержит более одной точки, а Δ — голоморфная в области Ω числовая функция и $\Delta(\lambda_0) \ne 0$ для некоторого $\lambda_0 \in \Omega$. Предположим, что*

$$m := \sup\left\{|\Delta(\lambda)| : \lambda \in \Omega\right\} < \infty. \tag{29}$$

Тогда для нулей μ_k функции Δ, занумерованных с учетом их кратностей, выполнена оценка

$$\sum_{k:\,\mu_k\in\Omega} g(\lambda_0,\mu_k;\Omega) \le \ln\frac{m}{|\Delta(\lambda_0)|}. \tag{30}$$

Доказательство. Установим вначале оценку (30) в предположении о том, что область Ω совпадает с единичным кругом $\Phi_1 := \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|<1\}$. Пусть на окружности $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|=\rho\}$ с $|\lambda_0|<\rho<1$ нет нулей функции Δ. Тогда из формулы Пуассона – Иенсена (см., например, гл. 6, § 4 в [3]) с учетом требования $\Delta(\lambda_0)\ne 0$ и условия (29) выводится неравенство

$$\sum_{k:\,|\mu_k|<\rho} \ln\frac{\left|\rho^2-\lambda_0\bar{\mu}_k\right|}{\rho|\lambda_0-\mu_k|} \le \ln\frac{m}{|\Delta(\lambda_0)|}. \tag{31}$$

В левой части этого неравенства все слагаемые положительны, а ρ — произвольное число, для которого $|\lambda_0|<\rho<1$ и на окружности $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|=\rho\}$ нет нулей функции Δ. Отсюда следует справедливость неравенства (31) и при $\rho=1$, т. е.

$$\sum_{k:\,\mu_k\in\Phi_1} \ln\left|\frac{1-\lambda_0\bar{\mu}_k}{\lambda_0-\mu_k}\right| \le \ln\frac{m}{|\Delta(\lambda_0)|}. \tag{32}$$

Принимая во внимание формулу (15), заключаем, что оценка (32) совпадает с утверждением (30) леммы в том случае, когда область Ω совпадает с единичным кругом Φ_1.

Выведем теперь из оценки (32) оценку (30) в случае произвольной области Ω. Пусть α — конформное отображение Ω на единичный круг Φ_1, а α^{-1} — обратная функция к α. Тогда функция $\Delta(\alpha^{-1}(\cdot))$ голоморфна в Φ_1 и удовлетворяет условиям, при которых была доказана оценка (32). Для функции $\Delta(\alpha^{-1}(\cdot))$ числа λ_0 и μ_k, фигурирующие в оценке (32), соответственно равны числам $\alpha(\lambda_0)$ и $\alpha(\mu_k)$, где λ_0 и μ_k взяты из требований леммы 4. Заменяя теперь в (32) λ_0 и μ_k соответственно на $\alpha(\lambda_0)$ и $\alpha(\mu_k)$ и учитывая выражение (2) функции Грина области Ω, а также очевидное равенство $m = \sup\{|\Delta(\alpha^{-1}(z))| : z\in\Phi_1\}$, из оценки (32) получаем оценку (30) в общем случае.

Приведем последнее вспомогательное утверждение, которое потребуется при доказательстве основной теоремы. Оно установлено в § 1, п. 2 работы [15].

Лемма 5. *Пусть V и W — голоморфные в области Ω оператор-функции, причем V принимает свои значения в множестве ограниченно обратимых операторов. Тогда у оператор-функций VW и W все характеристические значения и их кратности совпадают.*

Доказательство теоремы. Из полярного представления операторов A_l (см., например, гл. 1, § 4, п. 1 в [14]) имеем $A_l = U_l C_l$, где U_l — частично изометрические операторы, а $C_l = \left(A_l^* A_l\right)^{1/2} \ge 0$, причем согласно определению s-чисел справедливы равенства $\nu(t; A_l) = \nu(t; C_l)$, $t\ge 0$. Кроме того, $\|B_l(\lambda)\| \ge \|B_l(\lambda)U_l\|$. Поэтому далее, не уменьшая общности, будем считаем, что операторы $A_l \ge 0$, $l=1,\ldots,n$, и все числа m_l из условия (7) теоремы отличны от нуля.

Зафиксируем число $\delta>1$ и обозначим через P_l ортопроектор на линейную оболочку собственных векторов оператора A_l, которые отвечают всем его собственным значениям $\lambda_k(A)$ с $|\lambda_k(A)| > (\delta m_l n)^{-1}$. Тогда

$$\Theta(\delta m_l n; A_l) = \Theta(\delta m_l n; A_l P_l),$$
$$\nu(\delta m_l n; A_l) = \nu(\delta m_l n; A_l P_l), \qquad l = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

а $\| A_l(I - P_l) \| \leq (\delta m_l n)^{-1}$, $l = 1, \ldots, n$. Из последних неравенств и определения чисел m_l следуют оценки

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} B_l(\lambda) A_l (I - P_l) D_l(\lambda) \right\| \leq$$
$$\leq \sum_{l=1}^{n} \| A_l (I - P_l) \| \left(\sup \{ \| B_l(\lambda) \| \| D_l(\lambda) \| : \lambda \in \Omega \} \right) \leq \frac{1}{\delta},$$

а значит, при каждом $\lambda \in \Omega$ оператор

$$V(\lambda) := I + \sum_{l=1}^{n} B_l(\lambda) A_l (I - P_l) D_l(\lambda) \tag{34}$$

ограниченно обратим и

$$\| V^{-1}(\lambda) \| \leq \frac{\delta}{\delta - 1}, \qquad \lambda \in \Omega. \tag{35}$$

Равенством

$$F(\lambda) := V^{-1}(\lambda) \sum_{l=1}^{n} B_l(\lambda) A_l P_l D_l(\lambda) \tag{36}$$

определим оператор-функцию F. Тогда оператор-функция L допускает представление

$$L(\lambda) = V(\lambda)(I + F(\lambda)), \qquad \lambda \in \Omega. \tag{37}$$

Поскольку P_l — конечномерные операторы, то при всех $\lambda \in \Omega$ оператор $F(\lambda)$ принимает свои значения в множестве конечномерных операторов, поэтому определен определитель $\Delta(\lambda)$ оператора $I + F(\lambda)$, т. е.

$$\Delta(\lambda) := \det(I + F(\lambda)). \tag{38}$$

Отметим, что введенные здесь равенствами (34) и (36) оператор-функции V и F голоморфны в области Ω, поскольку голоморфными в этой области являются оператор-функции B_l и D_l. Из голоморфности F следует, согласно первому утверждению леммы 2, голоморфность числовой функции Δ. Отмеченные здесь факты голоморфности функций Δ, F и V будут учтены далее при ссылках на леммы 2, 4 и 5.

Используя лемму 3, оценим сверху модуль определителя Δ. Ортопроектор P_l был выбран так, что все отличные от нуля собственные значения неотрицательного оператора $A_l P_l$ больше, чем $(\delta m_l n)^{-1}$, а в силу неотрицательности $A_l P_l$ все собственные значения $A_l P_l$ совпадают с s-числами этого оператора. Полагая теперь в лемме 3 операторы A_l, B_l и D_l соответственно равными $A_l P_l$, $V^{-1}(\lambda) B_l(\lambda)$ и $D_l(\lambda)$ и учитывая равенства (36), (38), определение чисел m_l из условия (7) теоремы, а также оценку (35), выводим

$$\sup\{\ln|\Delta(\lambda)|:\ \lambda\in\Omega\}\le\sum_{l=1}^{n}\Big\{\Theta(\delta m_l n;A_lP_l)+$$

$$+\ \nu(\delta m_l n;A_lP_l)\ln\left(1+(\delta-1)^{-1}n^{-1}\right)\Big\}. \tag{39}$$

Оценим теперь сверху величину $|\Delta(\lambda)|^{-1}$ при $\lambda=\lambda_0$, считая $L(\lambda_0)$ обратимым оператором. Так как $V(\lambda_0)$ — обратим, то из тождества (37) следует обратимость оператора $I+F(\lambda_0)$, а учитывая еще и формулу (34), получаем

$$(I+F(\lambda_0))^{-1}=L^{-1}(\lambda_0)V(\lambda_0)=$$

$$=L^{-1}(\lambda_0)\left(L(\lambda_0)-\sum_{l=1}^{n}B_l(\lambda_0)A_lP_lD_l(\lambda_0)\right)=$$

$$=I-\sum_{l=1}^{n}L^{-1}(\lambda_0)B_l(\lambda_0)A_lP_lD_l(\lambda_0).$$

Но если оператор F — конечномерен, а оператор $I+F$ — обратим, то

$$(\det(I+F))^{-1}=\det((I+F)^{-1})$$

и поэтому для определителя (38) справедливы представления

$$\ln\frac{1}{|\Delta(\lambda_0)|}=\ln\left|\det\left\{(I+F(\lambda_0))^{-1}\right\}\right|=$$

$$=\ln\left|\det\left\{I-\sum_{l=1}^{n}L^{-1}(\lambda_0)B_l(\lambda_0)A_lP_lD_l(\lambda_0)\right\}\right|.$$

Отсюда, как и при выводе оценки (39) из леммы 3, получаем

$$\ln\frac{1}{|\Delta(\lambda_0)|}\le\sum_{l=1}^{n}\Big\{\Theta(\delta m_l n;A_lP_l)+$$

$$+\ \nu(\delta m_l n;A_lP_l)\ln\left(1+\delta^{-1}n^{-1}\left\|L^{-1}(\lambda_0)\right\|\right)\Big\}.$$

Эта оценка, соотношения (33), (39) и лемма 4 показывают справедливость неравенства

$$\sum_{k:\ \mu_k\in\Omega}g(\lambda_0,\mu_k;\Omega)\le\sum_{l=1}^{n}\left\{2\Theta(\delta m_l n;A_l)+\right.$$

$$\left.+\ \nu(\delta m_l n;A_l)\ln\left[\left(1+\frac{1}{(\delta-1)n}\right)\left(1+\frac{\left\|L^{-1}(\lambda_0)\right\|}{\delta n}\right)\right]\right\}, \tag{40}$$

в котором μ_k — нули функции Δ, занумерованные с учетом их кратностей. Но ввиду леммы 2 эти нули и их кратности совпадают соответственно с характеристическими значениями и их кратностями оператор-функции $\lambda\mapsto I+F(\lambda)$. Отсюда и из равенства (37), принимая во внимание обратимость оператора $V(\lambda)$ при $\lambda\in\Omega$ и лемму 5, заключаем, что неравенство (40) справедливо, если в нем считать μ_k характеристическими значениями, занумерованными с учетом их кратностей, оператор-функции L. Но в этом случае неравенство (40) совпадает с утверждением (8) теоремы; а как уже отмечалось, оценка (9) является следствием оценки (8). Тем самым теорема полностью доказана.

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1951. – **77,** № 1. – С. 11 – 14.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – **26,** вып. 4. – С. 15– 41.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
4. *Маркус А. С., Параска В. И.* Об оценке числа собственных значений линейного оператора // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1965. – № 7. – С. 101 – 104.
5. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 97 – 146.
6. *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* О свойствах волн, связанных с квадратичными операторными пучками // Докл. АН СССР. – 1981. – **256,** № 3. – С. 565– 570.
7. *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* О дисперсионных кривых волноведущих систем, связанных с квадратичными операторными пучками // Там же. – 1981. – **259,** № 6. – С. 1345 – 1349.
8. *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* Спектральная теория регулярных волноводов. – Ленинград: Изд-во Физ.-техн. ин-та им. А. Ф. Иоффе, 1983. – 302 с.
9. *Гомилко А. М.* О спектре, примыкающем к вещественной оси, в одной задаче теории упругости // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – **16,** вып. 1. – С. 70 – 71.
10. *Гомилко А. М.* Оценка сверху числа собственных значений пучка операторов, зависящего от параметра // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1982. – № 4. – С. 19 – 23.
11. *Радзиевский Г. В.* Минимальность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 1990. – **42,** № 2. – С. 195 – 205.
12. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. – 1982. – **37,** вып. 2. – С. 81 – 145.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1966. – 1064 с.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
15. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. – 1971. – **84,** № 4. – С. 607 – 629.
16. *Радзиевский Г. В.* Теорема об оценке резольвенты оператор-функций // Мат. заметки. – 1982. – **32,** вып. 1. – С. 59–70.
17. *Ротфельд С. Ю.* О сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов // Проблемы мат. физики. – Вып. 3. Спектральная теория. – 1968. – С. 81 – 87.

Получено 12.11.97