УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. II*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, the application to second-order differential equations is analyzed.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком у 1965 р., до диференціальних рівнянь другого порядку.

Настоящая статья является второй частью работы [1], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем, лемм, формул и т. д.

3. Применение модификаций численно-аналитического метода к исследованию различных краевых задач. Как уже отмечалось [1], численно-аналитический метод (который для простоты в дальнейшем будем называть одним словом — метод) был предложен для исследования T-периодических решений систем дифференциальных уравнений первого порядка. Впоследствии был опубликован ряд статей, в которых схема метода распространена на новые классы задач. Анализу этих работ и посвящена данная часть обзора.

Численно-аналитические алгоритмы для краевых задач более общих, чем периодические, будут рассмотрены в последующих частях этой работы.

3.1. Уравнения второго порядка. В приложениях часто возникает необходимость исследовать T-периодическую краевую задачу для скалярного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad x \in R. \tag{33}$$

Уравнение (33) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x + \frac{1}{\omega} f(t, x, y, \omega). \end{aligned} \tag{34}$$

Непосредственное применение схемы метода к системе (34) показывает, что частота ω не может быть очень большой. Например, даже если $f(t, x, y) \equiv 0$, то должно выполняться неравенство

$$\frac{\omega T}{q} < 1, \tag{35}$$

где значение q приведено в п. 1.2.1 [1]. Это препятствие можно устранить, выполнив следующую замену переменных, предложенную еще Ван-дер-Полем:

$$\begin{aligned} x &= z_1 \sin\tilde{\omega}t + z_2 \cos\tilde{\omega}t, \\ y &= z_1 \cos\tilde{\omega}t - z_2 \sin\tilde{\omega}t, \end{aligned}$$

где $|\omega - \tilde{\omega}|$ достаточно мало.

Полученную систему уравнений можно исследовать численно-аналитичес-

---

*Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект № 1.4/269), а также гранта ОТКА Т 019095.

ким методом, так как ограничение вида (35) (когда $f(t, x, y) \equiv 0$) переходит в ограничение вида

$$\frac{|\omega - \tilde{\omega}|T}{q} < 1.$$

Однако при ω, близких к нулю (или когда $\omega = 0$), в этой замене переменных нет необходимости. Такую систему мы имеем, например, рассматривая крутильные гармонические колебания вала, состоящего из двух масс с большими моментами инерции, соединенных с помощью нелинейной упругой связи, на один из которых действует синусоидальный крутящий момент [2, 3].

В частности, если $f(t, x, y)$ удовлетворяет условию Липшица Н 3.2, приводимому ниже, то в результате несложных вычислений получаем следующие условия сходимости итерационного процесса вида (7) из [1] для системы (34):

$$\begin{gathered} K_2 < \frac{2q}{T}, \\ \frac{T^2 K_1}{4q^2} + \frac{K_2 T}{4q} < 1. \end{gathered} \tag{36}$$

Согласно (12) из [1], определяющее уравнение будет нелинейной системой двух уравнений с двумя неизвестными $(x_0, y_0) = (z_1, z_2)$.

С целью избежать неудобства, связанного с двумерностью задачи, А. М. Самойленко [4] разработал модификацию метода непосредственно для уравнения второго порядка (33) при $\omega = 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad x \in R. \tag{37}$$

В результате мы получаем возможность работать со скалярными уравнениями (итерационными и определяющими), что весьма существенно. Однако, как мы увидим далее (см. условие Н 3.4), при этом условия сходимости по сравнению с (36) значительно ухудшаются.

Предположим, что уравнение (37) определено в области

$$(t, x, y) \in R^1 \times D = R^1 \times I_1 \times I_2; \quad t \in R^1, \quad x \in [a, b] = I_1, \quad y \in [c, d] = I_2$$

и функция $f(t, x, y)$ является непрерывной по переменным (t, x, y), периодической по t с периодом T и удовлетворяющей следующим условиям:

Н 3.1: $|f(t, x, y)| \le M$, $M > 0$;

Н 3.2: $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \le K_1 |x_1 - x_2| - K_2 |y_1 - y_2|$; $K_1, K_2 > 0$;

Н 3.3: $b - a > \dfrac{T^2 M}{2}$; $c \le -\dfrac{5}{6}TM < \dfrac{5}{6}TM \le d$;

Н 3.4: $\dfrac{T^2}{4}K_1 + \dfrac{5}{6}TK_2 < 1$.

Пусть оператор $L: C[0, T] \to CP_T = CP_T(R)$, переводящий непрерывные функции $f(t)$ в непрерывные T-периодические, определен формулой

$$(Lf)(t) = \int_0^t [\, f(\tau) - Sf \,] d\tau,$$

где интегральное среднее

$$Sf = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Очевидно, что функции $x_{m+1}(t,z)$, задаваемые рекуррентным соотношением

$$x_{m+1}(t,z) = z + \left(L^2\left(f\left(t, x_m(t,z), \frac{dx_m(t,z)}{dt}\right)\right)\right)(t), \tag{38}$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \; z(t,z) = z,$$

где $(L^2 f)(t) = (L(Lf))(t)$, дважды непрерывно дифференцируемы и T-периодические, т. е. $x_{m+1}(t,z) = C^2 P_T$.

Достаточные условия сходимости последовательности $x_{m+1}(t,z)$ в пространстве $C^1 P_T$ таковы.

Теорема 11. *Пусть для дифференциального уравнения* (37) *выполнены условия* Н 3.1 – Н 3.4.

Тогда последовательность функций $x_{m+1}(t,z)$, *определяемая формулой* (38), *сходится в* $C^1 P_T$ *к функции* $x^*(t,z)$, *удовлетворяющей уравнению*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) - \Delta(z), \tag{39}$$

где

$$\Delta(z) = Sf\left(t, x^*(t,z), \frac{dx^*(t,z)}{dt}\right). \tag{40}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} \left| x^*(t,z) - x_m(t,z) \right| \\ \left| \dfrac{dx^*(t,z)}{dt} - \dfrac{dx_m(t,z)}{dt} \right| \end{pmatrix} \le Q^m (E-Q)^{-1} z_1^0,$$

где

$$Q = \frac{T}{2}\begin{pmatrix} \frac{T}{2}K_1 & \frac{T}{2}K_2 \\ \frac{5}{3}K_1 & \frac{5}{3}K_2 \end{pmatrix},$$

$$z_1^0 = \begin{pmatrix} |x_1(t,z) - x_0(t,z)|_0 \\ \left| \dfrac{dx_1(t,z)}{dt} - \dfrac{dx_0(t,z)}{dt} \right|_0 \end{pmatrix} \le \frac{T}{2} M \begin{pmatrix} \frac{T}{2} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$|x(t,z) - y(t,z)|_0$ *означает* $\sup_t |x(t,z) - y(t,z)|$. *Кроме того, на множестве* $I_1^1 = \left[a + \dfrac{T^2 M}{4}, b - \dfrac{T^2 M}{4} \right]$ *определены и непрерывны функция* $\Delta(z)$ *вида* (40) *и ее „приближение"*

$$\Delta_m(z) = Sf\left(t, x_m(t,z), \frac{dx_m(t,z)}{dt}\right), \tag{41}$$

причем

$$|\Delta(t,z) - \Delta_m(t,z)| \le K_1 \left| x^*(t,z) - x_m(t,z) \right|_0 +$$
$$+ K_2 \left| \frac{dx^*(t,z)}{dt} - \frac{dx_m(t,z)}{dt} \right| \le \left\langle \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, Q^m (E-Q)^{-1} z_1^0 \right\rangle = d_m,$$

где $\langle\,,\rangle$ — *символы обычного скалярного произведения в пространстве* R^2.

Следствие 3. *Нули* $z = z^*$ *скалярного уравнения* $\Delta(z) = 0$ *определяют начальные значения*

$$x(0) = z^*, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = -S\int_0^t f\left(s, x^*(s, z^*), \frac{dx^*(s, z^*)}{ds}\right)ds$$

T-периодического решения $x = x(t)$ *уравнения* (37).

Следствие 4. *Если при выполнении условий теоремы* 11 *функция* $\Delta_m(z)$, *определяемая согласно формуле* (41), *для некоторого* $m \geq 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{z\in I_1^1} \Delta_m(z) \leq -d_m, \qquad \min_{z\in I_1^1} \Delta_m(z) \geq d_m,$$

то уравнение (37) *имеет* T-*периодическое решение* $x = x(t)$, *для которого* $\left(x(t), \dfrac{dx(t)}{dt}\right) \in D$ *при* $t \in R^1$, *а его начальные значения таковы, что*

$$x(0) \in I_1^1, \qquad \left|\frac{dx(0)}{dt}\right| \leq \frac{5TM}{6}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (37).

Предположим, что правая часть уравнения (37) полиномиальна по переменным x, y, т. е. имеет вид

$$f(t, x, y) = \sum_{i,j} p_{ij}(t)x^i y^j, \tag{42}$$

где функции $p_{ij}(t)$ суммируемы и ограничены на $[0, T]$. Для таких $f(t, x, y)$ справедливо утверждение.

Следствие 5. *При выполнении условий* Н 3.1 – Н 3.4, *если* $f(t, x, y)$ *задана конечным выражением* (42), *начальные данные*

$$x(0) = z \in I_1^1 = \left[a + \frac{T^2M}{4}, b - \frac{T^2M}{4}\right],$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = S\int_0^t f\left(s, x^*(s, z), \frac{dx^*(s, z)}{dt}\right)ds \in \left[c + \frac{5TM}{6}, d - \frac{5TM}{6}\right] = I_2^1$$

T-периодических решений уравнения (37) *либо все изолированы, либо полностью заполняют отрезок* I_1^1.

Очевидно, что в первом случае начальные данные T-периодических решений являются изолированными точками прямоугольника $D_1 = I_1^1 \times I_2^1$, а во втором — заполняют некоторую кривую, лежащую в D_1.

Последнее утверждение хорошо согласуется с известным свойством периодических решений, доказанных для автономных, аналитических дифференциальных систем на плоскости (см. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович [5]).

Следствие 6. *Пусть для уравнения* (37) *выполняются условия* Н 3.1 – Н 3.4 *и, кроме того, для всех* $(t, x, y) \in R^1 \times D$ *функция* $f(t, x, y)$ *нечетна по* t *и* x, *т. е.*

$$f(-t, -x, y) = -f(t, x, y). \tag{43}$$

Тогда дифференциальное уравнение (37) *имеет единственное* T-*периодическое нечетное решение* $x = x(t)$. *Это решение имеет вид*

$$x(t) = x^*(t, z) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, z),$$

где $x_m(t, z)$ *задается формулой* (38), *и его начальные данные равны*

$$x(0) = 0,$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = -S\int_0^t f\left(s, x^*(s, 0), \frac{dx^*(s, 0)}{ds}\right)ds.$$

Заметим, что периодическое решение, определяемое следствием 6, не всегда тривиально.

Кроме того, следствие 6 дополняет некоторые результаты В. А. Плисса [6] и Дж. Хайнбокела, Р. А. Страбла [7], относящиеся к изучению периодических решений систем, имеющих определенную симметрию.

***Задача* 3.** Ослабить условия Н 3.1 – Н 3.4 так, чтобы условие нечетности (43) все же гарантировало существование T-периодического решения уравнения (37).

Легко проверить, что оператор $(L^2 f)(t)$ можно записать в виде

$$(L^2 f)(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{t}{T}\int_0^T f(\tau)\left(\frac{t+T}{2} - \tau\right)d\tau. \tag{44}$$

Используя представление (44) В. З. Чорный [8, 9] ослабил Н 3.3 и Н 3.4:

Н 3.3*: $b - a \geq \dfrac{T^2 M}{8}, \quad c \leq -\dfrac{MT}{4} \leq \dfrac{MT}{4} \leq d;$

Н 3.4*: $\dfrac{T^2 K_1}{16} + \dfrac{TK_2}{4} < 1.$

Последние соотношения вносят соответствующие уточния в формулировку теоремы 11 и ее следствий.

Заметим, что условие Н 3.4* все же ограничительнее, чем соотношения (36), достаточные для применения метода к эквивалентной (37) системе двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Сравнение следствия 6 с примером 1.11 из [1] показывает, что достаточно небольшое уменьшение константы Липшица с (36) до Н 3.4 позволило отбросить определяющее уравнение (21) из [1].

***Пример* 2.** Анализ периодического решения уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \sin \lambda t \tag{45}$$

указывает на тот факт, что это уменьшение константы Липшица существенно с точки зрения реализации метода, и, кроме того, подтверждает, что оценка Н 3.4 достаточно точна.

Действительно, уравнение (45) имеет единственное T-периодическое решение с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ для всех

$$\omega T < 2\pi. \tag{46}$$

При $\omega T = 2\pi$ все решения уравнения (45) неограничены.

С другой стороны, условия (36) и Н 3.4* для этой системы имеют соответственно вид

$$\begin{gathered} \omega T < 2q = 6{,}42\ldots, \\ \omega T < 4. \end{gathered} \tag{47}$$

(Можно проверить, что условие Н 3.3*в этом случае также приводит к условию (47)).

Как видим, определяющее уравнение (21), фигурирующее в примере 1 из [1], отбросить нельзя.

***Замечание* 3.** Как показывает уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

следствие 6 доказывает существование и единственность лишь T-периодического нечетного решения. Кроме этого могут существовать и другие решения.

Покажем, что каждое из условий Н 3.3 и Н 3.4, взятое в отдельности, само по себе обеспечивает существование, по крайней мере, одного нечетного T-периодического решения. При доказательстве соответствующих утверждений используются соответственно теорему Шаудера о неподвижной точке и принцип Лере – Шаудера.

Пусть κ есть supremum функционала

$$J(f) = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t (t-u)f(u)du + t\int_0^1 f(u)u\,du\right| \tag{48}$$

на множестве всех нечетных непрерывных 1-периодических функций $f(u)$ таких, что $|f(u)| \le 1$. Заметим, что знак модуля в этом функционале можно опустить (ибо в случае необходимости всегда можно заменить $f(u)$ на $-f(u)$).

Поскольку функция

$$\phi(t) = (L^2 f)(t)$$

является 1-периодической, то максимум $\phi(t)$ достигается на интервале $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ в некоторой точке $t = t^*$. Тогда

$$\frac{d\phi(t^*)}{dt} = \int_0^{t^*} f(u)du + \int_0^1 f(u)u\,du = 0,$$

и поэтому

$$\phi(t^*) = t^*\int_0^{t^*} f(u)du - \int_0^{t^*} uf(u)du + t^*\int_0^1 f(u)u\,du = -\int_0^{t^*} uf(u)du.$$

Следовательно,

$$\kappa \le |\phi(t^*)| \le \int_0^{1/2} u\,du = \frac{1}{8}.$$

Используя оценку из работы [9], можно показать, что

$$\kappa \le \frac{1}{16}.$$

Поскольку число κ важно при исследовании конкретных уравнений, найдем его точное значение.

В дальнейшем символами $COP_T(R)[\,CEP_T(R)\,]$ будем обозначать банаховы пространства всех нечетных [четных] T-периодических непрерывных на R функций с supremum нормой. Кроме того, положим

$$(Af)(t) = \int_0^t (t-u)f(u)du + \frac{t}{T}\int_0^T uf(u)du, \tag{49}$$

$$(Bf)(t) = \int_0^t f(u)du + \frac{1}{T}\int_0^T uf(u)du. \tag{50}$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}(Af)(t) = (Bf)(t)$$

и оператор A совпадает с сужением оператора L^2 на подпространство $COP_T(R) \subset CP_T(R)$, где $CP_T(R)$ — банахово пространство всех T-периодических непрерывных функций.

Лемма 1. *Для всех* $f(t) \in COP_T(R)$ *выполняются оценки*

$$\begin{gathered} |(Af)(t)| \le \frac{T^2}{32}|f(t)|_0, \\ |(Bf)(t)| \le \frac{T}{4}|f(t)|_0, \end{gathered} \tag{51}$$

причем константы $\frac{T^2}{32}$ *и* $\frac{T}{4}$ *неулучшаемы. Кроме того,*

$$Af(-t) = -(Af)(t), \qquad \frac{d^2}{dt^2}(Af)(t) = f(t),$$

$$(Af)(0) = (Af)\left(\frac{T}{2}\right) = (Af)(T) = 0,$$

$$Bf(-t) = Bf(t).$$

Доказательство. Учитывая нечетность $f(t)$, непосредственной подстановкой в (49) $t=0$ и $t=T$ получаем

$$(Af)(0) = (Af)(T) = 0.$$

Кроме того,

$$Af(-t) = \int_0^{-t} (-t-u)f(u)du - \frac{t}{T}\int_0^T uf(u)du.$$

Выполняя в первом интеграле замену $u=-v$, имеем

$$Af(-t) = \int_0^{-t} (-t+v)f(v)dv - \frac{t}{T}\int_0^T uf(u)du = -(Af)(t).$$

Далее,

$$\frac{d^2}{dt^2}(Af)(t) = f(t)$$

и

$$(Af)\left(\frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} \left(\frac{T}{2}-u\right)f(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T uf(u)du. \tag{52}$$

Так как

$$\int_0^T u f(u) du = \int_0^{T/2} u f(u) du + \int_{T/2}^T u f(u) du,$$

то, полагая во втором интеграле $u = v + T$, находим

$$\int_0^T u f(u) du = \int_0^{T/2} u f(u) du + \int_{-T/2}^0 (v+T) f(v+T) dv =$$

$$= \int_0^{T/2} u f(u) du + \int_{-T/2}^0 v f(v+T) dv + T \int_{-T/2}^0 f(v+T) dv =$$

$$= 2 \int_0^{T/2} u f(u) du + T \int_{-T/2}^0 f(v+T) dv. \tag{53}$$

Поэтому

$$(Af)\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2} \int_0^{T/2} f(u) du - \int_0^{T/2} u f(u) du +$$

$$+ \int_0^{T/2} u f(u) du + \frac{T}{2} \int_{-T/2}^0 f(v+T) dv = \frac{T}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(v+T) dv = 0.$$

Оценим норму

$$(Af)(t) = \phi(t).$$

Предположим, что $|\phi(t)|$ достигает максимального значения в точке $t = t^*$. В силу нечетной симметрии $\phi(t)$ можно положить, что $t^* \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. Рассмотрим два случая:

$$t^* \in \left[0, \frac{T}{4}\right]$$

и

$$t^* \in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right].$$

С учетом того, что $(Bf)(t^*) = 0$ и, следовательно, $\int_0^{t^*} f(u) du = -\frac{1}{T}\int_0^T u f(u) du$, в первом случае находим

$$\phi(t^*) = \int_0^{t^*} (t^* - u) f(u) du + \frac{t^*}{T} \int_0^T u f(u) du = -\int_0^{t^*} u f(u) du,$$

и поэтому

$$|\phi(t^*)| \le \int_0^{T/4} u |f(u)|_0 du \le |f(u)|_0 \frac{T^2}{32}.$$

Во втором случае

$$t^* = \left(t^* - \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2} = \tilde{t} + \frac{T}{2},$$

где $\tilde{t} \in \left[-\frac{T}{4}, 0\right]$ и $\phi(t^*) = \phi\left(\tilde{t} + \frac{T}{2}\right)$.

Подсчитаем величину

$$\Psi(t) = \phi\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Имеем

$$\Psi(t) = \int_0^{t+T/2} \left(t + \frac{T}{2} - u\right) f(u)\,du + \frac{t+T/2}{T} \int_0^T u f(u)\,du =$$

$$= \frac{t}{T}\int_0^T u f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_0^T u f(u)\,du + \int_0^{T/2}\left(t + \frac{T}{2} - u\right) f(u)\,du +$$

$$+ \int_{T/2}^{t+T/2}\left(t + \frac{T}{2} - u\right) f(u)\,du.$$

После замены $u = v + \frac{T}{2}$ в последнем интеграле получаем

$$\Psi(t) = \left[\frac{1}{2}\int_0^T u f(u)\,du + \int_0^{T/2}\left(\frac{T}{2} - u\right) f(u)\,du\right] +$$

$$+ t\int_0^{T/2} f(u)\,du + \frac{t}{T}\int_0^T u f(u)\,du + \int_0^T (t - v) f\left(v + \frac{T}{2}\right)dv.$$

Согласно (52) выражение в квадратных скобках равно нулю, следовательно,

$$\Psi(t) = t\left[\int_0^{T/2} f(u)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T u f(u)\,du\right] + \int_0^t (t - v) f\left(v + \frac{T}{2}\right)dv.$$

Так как $\frac{d\Psi}{dt}(\tilde{t}) = 0$, то

$$\int_0^{T/2} f(u)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T u f(u)\,du + \int_0^{\tilde{t}} f\left(v + \frac{T}{2}\right)dv = 0-.$$

Поэтому

$$\phi(t^*) = \Psi(\tilde{t}) = -\int_0^{\tilde{t}} v f\left(v + \frac{T}{2}\right)dv$$

и

$$|\phi(t^*)| \le \frac{MT^2}{32} |f(t)|_0.$$

Покажем теперь, что константа $\frac{T^2}{32}$ в оценке (51) неулучшаема. Выберем функцию

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} M, & t \in \left(0, \frac{T}{2}\right]; \\ -M, & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right), \end{cases} \tag{54}$$

и продолжим ее на R T-периодично и нечетно. Тогда

$$\int_0^T u f(u)\,du = \int_0^{T/2} Mu\,du - \int_{T/2}^T Mu\,du =$$

$$= M\left[\frac{T^2}{8} - \left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{8}\right)\right] = -\frac{MT^2}{4}.$$

Поэтому при $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$

$$\tilde{\phi}(t) = \left(A\tilde{f}\right)(t) = \int_0^t M(t-u) - \frac{t}{T}\frac{MT^2}{4} =$$

$$= -M\int_t^0 v\,dv - t\frac{MT}{4} = \frac{Mt^2}{4} - \frac{MT}{4}t = \frac{M}{4}t(2t-T).$$

Функция $\phi(t)$ максимальное по модулю значение принимает в точке $t = \frac{T}{4}$, поэтому

$$\left|\left(A\tilde{f}\right)\left(\frac{T}{4}\right)\right| = \frac{M}{4}\frac{T}{4}\frac{T}{2} = \frac{MT^2}{32}.$$

Далее, из (50) имеем

$$(Bf)(-t) = \int_0^{-t} f(u)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T uf(u)\,du.$$

Выполняя в первом интеграле замену $u = -v$, находим

$$(Bf)(-t) = \int_0^t f(v)\,dv + \frac{1}{T}\int_0^T uf(u)\,du = (Bf)(t).$$

Заметим, что экстремальное значение $(Bf)(t)$ достигается на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$. С учетом формулы (53) из (50) получаем

$$(Bf)(t) = \int_0^t f(u)\,du + \int_{-T/2}^0 f(u)\,du + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u f(u)\,du =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u f(u)\,du - \int_t^{T/2} f(u)\,du = \frac{2}{T}\int_0^t u f(u)\,du + \int_t^{T/2}\left(\frac{2u}{T} - 1\right)f(u)\,du.$$

Поэтому для всех $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$

$$|(Bf)(t)| \le \frac{2}{T}M\frac{t^2}{2} + M\int_t^{T/2}\left(1 - \frac{2u}{T}\right)du =$$

$$= \frac{Mt^2}{T} + M\left[\frac{T}{2} - t - \frac{1}{T}\left(\frac{T^2}{4} - t^2\right)\right] =$$

$$= \frac{2Mt^2}{T} + M\frac{T}{4} - Mt = \frac{MT}{2}\left(\frac{2t}{T}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{MT}{8} \le$$
$$\le \frac{MT}{8} + \frac{MT}{8} = \frac{MT}{4} \qquad \forall\, t \in \left[0, \frac{T}{2}\right).$$

Кроме того, тот же пример функции $\tilde{f}(t)$ вида (54) показывает, что константа $\frac{T}{4}$ в (51) неулучшаема, поскольку

$$(B\tilde{f})(0) = -\frac{MT}{4},$$

что и завершает доказательство леммы.

***Следствие* 7.** *На множестве всех нечетных непрерывных* 1*-периодических функций* $f(u)$ *таких, что* $|f(u)| \le 1$, supremum *функционала* (48) *равен* $\kappa = \frac{1}{32}$.

Теорема 12. *Пусть в области*

$$|x| \le a, \quad |y| \le b, \quad t \in R$$

непрерывная, периодическая по t *с периодом* T *функция* $f(t, x, y)$ *ограничена по модулю числом* M.

Тогда если выполнены неравенства

$$a \ge \frac{T^2 M}{32}, \qquad \frac{TM}{4} \le b,$$

то при условии симметрии (43) *дифференциальное уравнение* (37) *имеет хотя бы одно нечетное* T*-периодическое решение* $x(t)$. *Более того,* $x(0) = x\left(\frac{T}{2}\right) = x(T) = 0$.

Доказательство. В силу леммы 1 любое решение $x(t) \in COP_T$ интегрального уравнения

$$x = Af\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{55}$$

будет искомым.

Очевидно, (55) эквивалентно системе двух интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} x &= Af(t, x, y), \\ y &= Bf(t, x, y). \end{aligned} \tag{56}$$

В прямом произведении

$$W = COP_T(R) \times CEP_T(R)$$

рассмотрим замкнутое выпуклое множество

$$Z_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \in W : |x(t)| \le \alpha, \ |y(t)| \le \beta \ \ \forall\, t \in R\}.$$

Согласно лемме 1 для компактного оператора $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ верно

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} : W \to W,$$

и если

$$\sup_{(x,y)\in Z_{\alpha,\beta}} |Af(t,x,y)| \le \alpha,$$
$$\sup_{(x,y)\in Z_{\alpha,\beta}} |Bf(t,x,y)| \le \beta, \tag{57}$$

то по теореме Шаудера [10, с. 411] о неподвижной точке существует, по крайней мере, одно решение системы (56).

Поскольку для любых $(x(t), y(t)) \in Z_{\alpha,\beta}$

$$|f(t, x(t), y(t))| \le M,$$

то согласно лемме 1 для выполнения условия (57) достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{T^2 M}{32} \le a, \quad b \ge \frac{MT}{4},$$

что и завершает доказательство.

Рассмотрим некоторые примеры.

***Пример* 3.** Прежде всего заметим, что для системы вида

$$\frac{d^\alpha x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + g(t) \tag{58}$$

с нечетной по x функцией $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ и нечетной $g(t)$ условия теоремы 12 могут быть упрощены.

Так, неравенство $\alpha \ge \frac{T^2 M}{32}$ можно заменить на

$$\alpha \ge \frac{T^2 \max\limits_{|x|\le\alpha, |y|\le\beta} |f(x,y)|}{32} + \max_{t\in[0,T]} |(Ag)(t)|,$$

а $\frac{TM}{4} \ge b$ переходит в соотношение

$$\beta \ge \frac{T \max\limits_{|x|\le\alpha, |y|\le\beta} |f(x,y)|}{4} + \max_{t\in[0,T]} |(Bg)(t)|.$$

***Следствие* 8.** *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = g(t) \tag{59}$$

с нечетными $f(x)$ *и* $g(t)$, $g(t) \in COP_T$, *имеет, по крайней мере, одно* T-*периодическое нечетное решение* $x(t)$ *такое, что* $x(0) = x\left(\frac{T}{2}\right) = x(T) = 0$, *если только существует* $\alpha \ge 0$, *для которого*

$$\alpha \ge \frac{T^2 \max\limits_{|x|\le\alpha} |f(x)|}{32} + \max_{t\in[0,T]} |(Ag)(t)|. \tag{60}$$

***Пример* 4.** Применим неравенство (60) для исследования существования периодического решения уравнения (45). Убеждаемся, что существует, по крайней мере, одно T-периодическое решение, если найдется такое α, что

$$\frac{T^2\omega^2}{32} + \frac{1}{\pi^2} \leq \alpha, \qquad \frac{T^2\omega^2\alpha}{32} + \frac{T^2}{4\pi^2} \leq \alpha,$$

т. е. если $T^2\omega^2 < 32$, $T\omega < 4\sqrt{2} \approx 5{,}656$. Последняя оценка хорошо согласуется с неулучшаемым неравенством (46).

***Пример* 5.** Используем (60) для анализа 2π-периодического решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^2 = \varepsilon \sin t. \tag{61}$$

Неравенство $\dfrac{T^2\alpha^3}{32} + \varepsilon \leq \alpha$ имеет решение, если функция $\mu(\alpha) = \dfrac{T^2\alpha^3}{32} - \alpha + \varepsilon$ имеет положительный корень. Для этого достаточно, чтобы

$$\mu(\alpha_{\min}) < 0.$$

Тогда $\mu'(\alpha_{\min}) = \dfrac{3T^2\alpha_{\min}^2}{32} - 1 = 0$, откуда $\alpha_{\min} = \sqrt{\dfrac{32}{3T^2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{T\sqrt{3}}$. Поэтому

$$\mu(\alpha_{\min}) = \frac{T^2}{32}\frac{32}{3T^2}\frac{4\sqrt{2}}{T\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{2}}{T\sqrt{3}} + \varepsilon = -\frac{8\sqrt{2}}{3T\sqrt{3}} + \varepsilon \leq 0.$$

Последнее неравенство выполняется, если

$$\varepsilon \leq \frac{8\sqrt{2}}{3T\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}3465319.$$

Т. е. при указанных значениях ε уравнение (61) всегда имеет хотя бы одно нечетное 2π-периодическое решение $x(t)$, для которого

$$x(0) = x(\pi) = x(2\pi) = 0.$$

Заметим, что уравнение (61) при $\varepsilon = 1$ исследовалось в работе L. Cesari [11], где приведено непростое доказательство существования нечетного 2π-периодического решения.

***Задача* 4.** Проверить, сохраняет ли оператор L^2 свойство симметрии III рода, т. е. когда нечетная функция $f(t)$ такова, что

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t).$$

Доказать, что уравнение (61) имеет 2π-периодическое решение, имеющее симметрию III рода.

Покажем теперь, что оценка типа Н 3.4 сама по себе обеспечивает существование T-периодического решения уравнения (37). На самом деле будем требовать выполнение более слабого условия, чем липшицевость функции $f(t, x, y)$, а именно, предположим ее подлинейный рост

$$|f(t, x, y)| \leq p|x| + q|y| + r(t) \tag{62}$$

для всех $t, x, y \in R$.

Для установления существования T-периодического решения уравнения (37) применим принцип Лере – Шаудера продолжения по параметру $\varepsilon \in [0, 1]$ к системе

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon L^2 f(t, x, y), \\ y &= \varepsilon B f(t, x, y). \end{aligned} \tag{63}$$

При $\varepsilon = 0$ эта система имеет тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$. Затем получим необходимые в дальнейшем априорные оценки для решения $(x(t, a), y(t, a))$ системы (63), которые являются равномерными по $\varepsilon \in [0, 1]$.

Имеем

$$|x(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon |L^2| (p|x(t, \varepsilon)| + q|y(t, \varepsilon)|) + |A| r(t),$$
$$|y(t, \varepsilon)| \leq |B| (p|x(t, \varepsilon)| + q|y(t, \varepsilon)|) + |B| r(t),$$

где

$$|L^2| z(t) = \int_0^t \left| \frac{t}{2} - u + \frac{tu}{T} - \frac{t^2}{2T} \right| z(u)\,du + \frac{t}{T} \int_t^T \left| \frac{t+T}{2} - u \right| z(u)\,du,$$

$$|B| z(t) = \frac{2}{T} \int_0^t u z(u)\,du + \int_t^{T/2} \left(-\frac{2u}{T} + 1 \right) z(u)\,du.$$

Элементарные, хотя и трудоемкие выкладки (которые здесь не приводятся), показывают, что

$$|L^2| 1(t) = \frac{T^2}{16} - \frac{1}{4}\left(t - \frac{T}{2} \right)^2, \qquad t \in [0, T].$$

Поэтому

$$||L^2| z(t)| \leq \frac{T^2}{16} |z(t)|_0.$$

Аналогично при $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ можно вычислить, что

$$|B| 1(t) = \frac{2t^2}{T} + \frac{T}{4} - t, \qquad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right].$$

Следовательно,

$$||B| z(t)| \leq \frac{T}{4} |z(t)|_0, \qquad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right].$$

(Заметим, что в силу свойств симметрии $z(t)$ и $y(t)$ нам достаточно получить оценки на интервале $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.)

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} |x(t, \varepsilon)|_0 \\ |y(t, \varepsilon)|_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{T^2}{16} p & \frac{T^2}{16} q \\ \frac{T}{4} p & \frac{T}{4} q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x(t, \varepsilon)|_0 \\ |y(t, \varepsilon)|_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

где r_1, $r_2 > 0$.

Стандартные рассуждения показывают, что в случае, когда наибольшее собственное значение

$$\lambda_{\max} = \frac{T^2}{16} p + \frac{T}{4} q < 1, \tag{64}$$

величины $|x(t, \varepsilon)|_0$, $|x(t, \varepsilon)|_0$ ограничены числом, зависящим лишь от T, p, q, $r(t)$ и не зависящим от ε. Если выполняется (64), то применение принципа Лере – Шаудера обеспечивает существование, по крайней мере, одного T-периодического решения уравнения (37).

Задача 5. Рассмотреть случай, когда в соотношении (62) $p = p(t)$, $q = q(t)$, и использовать интегральные априорные оценки при исследовании системы (63).

Заметим, что более сильные утверждения можно получить для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x). \tag{65}$$

Система (63) в этом случае эквивалентна уравнению

$$x(t) + \int_0^T K(t, u) f[u, x(u)]\, du = 0,$$

где

$$K(t, u) = \begin{cases} u\left(1 - \dfrac{t}{T}\right), & 0 \le u \le t \le T; \\ t\left(1 - \dfrac{u}{T}\right), & 0 \le t \le u \le T, \end{cases} \tag{66}$$

поскольку

$$Ax(t) = -\int_0^T K(t, u) x(u)\, du.$$

Очевидно,

$$K(t, u) = K(u, t) \ge 0.$$

Найдем собственные значения оператора $-A$:

$$-Ax = \frac{1}{\lambda} x,$$

следовательно,

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x,$$

$$x(0) = x(T) = x\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$$

Несложно убедиться, что $\lambda > 0$, и собственные функции имеют вид

$$x_n(t) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, t.$$

Из краевых условий находим, что собственные значения

$$\lambda_n \in \left\{\frac{4\pi^2}{T^2} n^2,\ n \in N\right\}.$$

Поэтому все собственные значения оператора $-A$ положительны и

$$\lambda_{\max} = \frac{T^2}{4\pi^2}.$$

Согласно теореме существования Гаммерштейна (см. Ф. Трикоми [12, с. 266]), при $p < \dfrac{4\pi^2}{T^2}$, что эквивалентно условию $\dfrac{pT^2}{4\pi^2} < 1$, нелинейное интегральное уравнение (66) имеет, по крайней мере, одно непрерывное решение.

Если, кроме того,

$$|f(t, x)| \le p|x|,$$

то, согласно теореме единственности IV из [12, с. 27], это решение единственно.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 13. *Пусть* $f(-t, -x) = -f(t, x)$ *и выполнены условия*

$$|f(t, x)| \le p|x| + r, \tag{67}$$

$$\frac{pT^2}{4\pi^2} < 1.$$

Тогда дифференциальное уравнение (65) *имеет не менее одного* T*-периодического решения.*

Если $r = 0$, *то это решение единственно* $(x(t) \equiv 0)$.

***Замечание* 4.** Пример дифференциального уравнения (45) указывает на оптимальность оценок теоремы 13. Действительно, $\dfrac{\omega^2 T^2}{4\pi^2} < 1$, откуда $T < \dfrac{2\pi}{\omega}$.

***Замечание* 5.** Условие (67) может быть несколько ослаблено (см. таблицу в [12, с. 269]).

***Задача* 6.** Получить более острые условия сходимости итерационного процесса (38), подсчитав спектральный радиус линейного оператора, ассоциированного с этой схемой (см. теорему 1 в работе Е. П. Трофимчук [13], лемму 17 в препринте M . Ronto, S. I. Trofimchuk [14], лемму 3.2 в работе M. Ronto, A. N. Ronto, S. I. Trofimchuk [15]).

Заметим, что основные положения численно-аналитического метода перенесены на случай исследования периодических решений систем дифференциальных уравнений второго порядка в работах Т. Г. Стрижак [16], А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [17].

Различные модификации метода применялись также к T-периодической краевой задаче для уравнения (33) в случае, когда $\omega \ne 0$.

Так, в монографии Ю. А. Митропольского, Г. П. Хомы, М. И. Громяка [18] такие видоизменения метода использовались для доказательства теорем существования T-периодических решений уравнения (33) как в резонансном, так и в нерезонансном случае.

В нерезонансном случае, помимо ограничений типа Н 3.1 – Н 3.4, достаточных для сходимости итерационного процесса

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{qT} Q(\tau) f\left(\tau, x_m(\tau), \frac{dx_m(\tau)}{d\tau}\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau,$$

$$m = 0, 1, \ldots, \qquad x_0(t) = v(t), \qquad |v(t)| \le \frac{1}{2\omega}MTq, \qquad \left|\frac{dv(t)}{dt}\right| \le \frac{M}{2}Tq,$$

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le t; \\ -1, & t < \tau \le qT, \end{cases}$$

налагались достаточно жесткие арифметические условия $\omega Tq = (2p-1)\pi$, $(2p-1, \omega q) = 1$ (для T-систем первого класса по терминологии авторов); $\omega Tq = r\pi$, $r = 2k$, $q = 2s-1$, $(\omega q, r) = 1$ (для $2T$-систем первого класса), где p, q, r, k — некоторые натуральные числа, а выражение $(m, n) = 1$ означает, что натуральные числа m и n взаимно простые. (Эти условия, в частности, имеют смысл только для натуральных чисел ω!)

В резонансном случае (T-системы второго класса) $T = \dfrac{2\pi n_0}{\omega}$, n_0 — фиксированное натуральное число, при условиях

$$a \geq \frac{1}{\omega} MT, \quad b \geq MT, \quad T\left(\frac{K_1}{\omega} + K_2\right) < 1$$

была доказана сходимость итерационного процесса

$$x_{m+1}(t, c, \phi) =$$

$$= x_0(t, c, \phi) + \frac{1}{\omega} \int_0^T Q_1(\tau) f\left(\tau, x_m(\tau, c, \phi), \frac{dx_m(\tau, c, \phi)}{d\tau}\right) \sin \omega(t - \tau)\, d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$Q_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{T}, & 0 \leq \tau \leq t; \\ -\dfrac{t}{T}, & t < \tau \leq T, \end{cases}$$

где

$$x_0(t, c, \phi) = c \cos(\omega t + \phi) = y(t),$$

$$|y(t)| \leq a - \frac{1}{\omega}, \quad \left|\frac{dy(t)}{dt}\right| \leq b - MT.$$

Последние два соотношения эквивалентны неравенству

$$c \leq \min\left\{\frac{a\omega - MT}{\omega}, \frac{b - MT}{\omega}\right\}.$$

В нерезонансных случаях итерации сходятся прямо к искомому решению (не требуется решать определяющие уравнения), а в резонансном — вопрос существования $\dfrac{2\pi n_0}{\omega}$-периодических решений однозначно связан с вопросом существования нулей уравнения

$$\Delta(c, \phi) = \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x^*(\tau, c, \phi), \frac{dx^*(\tau, c, \phi)}{d\tau}\right) \sin \omega(t - \tau)\, d\tau = 0,$$

где $c^*(t, c, \phi) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, c, \phi)$.

Теорема существования и единственности для T-периодической краевой задачи в случае, когда $x \in (R^n, \|\cdot\|)$ в нерезонансном уравнении (33), доказана в работах [8, 9] при предположениях

$$\gamma T = (K_1 + \omega K_2) < 1, \quad \gamma = \frac{1}{2\omega \sin \dfrac{\omega T}{2}}$$

и

$$\| f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2') \| \leq K_1 \| x_1 - x_2 \| + K_2 \| x_1' - x_2' \|.$$

В статье M. Perestyuk, A. Ronto [19] для систем и дифференциальных уравнений второго порядка вида (33) при $\omega \neq 0$ была предложена новая схема численно-аналитического метода, которая может применяться независимо от значений констант (операторов) Липшица K_1 и K_2. Согласно этой схеме T-периодические последовательные приближения предлагается строить в виде

$$x_{m+1}(t, \xi) = A(t)\xi + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - s) f\left(s, x_m(s, \xi), \frac{dx_m(s, \xi)}{ds}\right) ds -$$

$$-\frac{1}{\omega}\Psi_1(t)\int_0^T \sin\omega(T-s)f\left(s, x_m(s,\xi), \frac{dx_m(s,\xi)}{ds}\right)ds -$$

$$-\Psi_2(t)\int_0^T \cos\omega(T-s)f\left(s, x_m(s,\xi), \frac{dx_m(s,\xi)}{ds}\right)ds; \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{68}$$

где дифференцируемая $(n \times 2n)$-матрица $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t))$ составлена из n-мерных блоков, удовлетворяющих соотношениям

$$\Psi_1(T) = I_n + \Psi_1(0), \qquad \Psi_2(T) = \Psi_2(0),$$

$$\Psi_1'(T) = \Psi_1'(0), \qquad \Psi_2'(T) = I_n + \Psi_2'(0),$$

а

$$A(t) = \left(I_n \cos\omega t, \frac{1}{\omega} I_n \sin\omega t\right) - \Psi(t)\,[\Phi(\omega, T) - I_{2n}],$$

$$\Phi(\omega, T) = \begin{pmatrix} I_n \cos\omega T & \frac{1}{\omega} I_n \sin\omega T \\ -\omega I_n \sin\omega T & I_n \cos\omega T \end{pmatrix},$$

где I_n — n-мерная единичная матрица.

Показано, что при наличии глобального условия типа Н 3.2, всегда существует („достаточно малая" в среднем) матрица $\Psi(t)$, для которой указанные последовательные приближения заведомо сходятся к дифференцируемой T-периодической функции $x^*(t, \xi)$. Предельная функция будет решением системы вида (33) $(x \in R^n)$ тогда и только тогда, когда параметр $\xi \in R^{2n}$ удовлетворяет определяющему уравнению

$$[I_{2n} - \Phi(\omega, T)]\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^T \sin\omega(T-s)f\left(s, x^*(s,\xi), \frac{dx^*(s,\xi)}{ds}\right)ds \\ \int_0^T \cos\omega(T-s)f\left(s, x^*(s,\xi), \frac{dx^*(s,\xi)}{ds}\right)ds \end{pmatrix}.$$

Заметим, что дифференциальные уравнения второго порядка различных типов с помощью метода изучались также в работах Ю. Д. Шлапака [20, 21], А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка [22], Р. И. Собковича [23, 24], В. Н. Шовкопляса [25, 26], Н. И. Ронто, О. М. Мартынюк [27], О. М. Мартынюк [28, 29], О. М. Мартынюк, С. В. Мартынюка [30], И. И. Король [31, 32], M. Ronto, S. I. Trofimchuk [14].

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50,** № 1. – С. 102–117.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
4. *Самойленко А. М.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1967. – **3,** № 11. – С. 1903–1912.
5. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 486 с.
6. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.; Л.: Наука, 1964. – 368 с.
7. *Хайнбокел Дж., Страбл Р. А.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, обладающих симметрией // Механика. – 1966. – № 1. – С. 3–17.

8. *Чорный В. З.* Периодические решения волновых интегро-дифференциальных и разностных уравнений второго порядка. – Киев, 1991. – 30 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 91.46).
9. *Чорный В. З.* Исследование периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка: Автореф. дис. ... канд. физ. мат. наук. – Киев, 1992. – 10 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
11. *Cesari L.* Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations. – Wiley and Sons, 1963. – P. 149–187.
12. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1960. – 299 с.
13. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механики. – 1990. – Вып. 13. – С. 31–36.
14. *Ronto M., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for nonlinear differential equations. – Miskolc, 1996. – 19 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 90-01).
15. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially Banach space, and some applications. – Miskolc, 1996. – 38 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 90-02).
16. *Стрижак Т. Г.* О периодических решениях систем нелинейных уравнений второго порядка // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 35–46.
17. *Samoilenko A. M., Ronto N. I.* Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. – M.: Mir, 1980. – 183 p.
18. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
19. *Perestyuk M., Ronto A.* Numerical-analytic method for the equation of non-linear oscillator // Publ. Univ. Miskolc, Ser. D, Natur. Sci. Math. – 1996. – **36,** № 2. – P. 115–124.
20. *Шлапак Ю. Д.* О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Укр. мат. журн. – 1974. – **26,** № 6. – С. 850–854.
21. *Шлапак Ю. Д.* Исследования колебаний некоторых видов систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1974. – 12 с.
22. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для дифференциальных уравнений второго порядка с импульсами // Укр. мат. журн. – 1974. – **26,** № 3. – С. 441–448.
23. *Собкович Р. И.* Численно-аналитический метод исследования краевых задач с управлениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1983. – 17 с.
24. *Собкович Р. И.* О периодической задаче управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Аналитические методы нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 125–133.
25. *Шовкопляс В. Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех. – 1978. – № 20. – С. 131–140.
26. *Шовкопляс В. Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1979. – 15 с.
27. *Ронто Н. И., Мартынюк О. М.* Исследование периодических решений счетных систем второго порядка // Укр. мат. журн. – 1991. – **44,** № 1. – С. 83–93.
28. *Мартынюк О. М.* О численно-аналитическом методе для счетных периодических систем второго порядка // Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 49–59.
29. *Мартинюк О. М.* Дослідження розв'язків крайових задач для зліченних систем нелінійних диференціальних рівнянь: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Київ, 1993. – 15 с.
30. *Мартынюк О. М., Мартынюк С. В.* Исследование периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений второго порядка // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 88–90.
31. *Король І. І.* Про дослідження двоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з параметрами // Доп. НАН України. – 1995. – № 9. – С. 6–12.
32. *Король І. І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1996. – 16 с.

Получено 31.10.97