УДК 517.91/93

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Ю. В. Теплинский (Каменец-Подол. пед. ин-т)

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

We study the problems of existence and uniqueness for invariant toroidal manifolds of countable systems of linear discrete equations given on an infinite-dimensional torus.

Вивчено питання існування та єдиності інваріантних тороїдальних многовидів зчисленних систем лінійних дискретних рівнянь, що визначені на нескінченновимірному торі.

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ, посвященных теории инвариантных тороидальных многообразий и смежным вопросам дискретных систем уравнений в конечномерном векторном пространстве R^n (см., например, [1 – 7]).

Естественный интерес представляет изучение этих систем в предельном случае, когда размерность пространства неограниченно возрастает $(n \to \infty)$, что приводит к необходимости исследования дискретных уравнений и их систем в пространствах числовых последовательностей. Такие системы уравнений принято называть счетными. Из работ, посвященных исследованиям в этой области, выделим [8 – 11].

В последние годы авторами данной статьи предложена методика исследования инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений [12 – 15]. Ее использование позволяет привести в этой работе новый результат, редуцирующий задачу построения инвариантного тора линейной счетной системы дискретных уравнений к аналогичной задаче для последовательности конечномерных систем дискретных уравнений растущей размерности.

Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega, \qquad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p})x_n + c(\varphi_n + \omega), \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots)$, $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots)$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots)$ принадлежат пространству $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_i \left\{ \left| x^i \right|, i = 1, 2, 3, \ldots \right\}$, бесконечная матрица $P(\varphi)$ и функция $c(\varphi) = \left(c_1(\varphi), c_2(\varphi), c_3(\varphi), \ldots \right)$ вещественны и периодичны по φ^i, $i = 1, 2, 3 \ldots$, с периодом 2π, n принадлежит множеству Z целых чисел, p — целочисленный параметр.

Решение первого уравнения системы (1) обозначим через

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_0) = \varphi(n, \varphi_0),$$

где $\varphi(n, \varphi_0)$ — дискретная функция такая, что $\varphi(0, \varphi_0) = \varphi_0$, а точка φ_0 принадлежит бесконечномерному тору $\mathcal{T}_\infty$.

Для любого $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ существует единственное решение $\varphi_n = \varphi(n, \varphi_0)$, причем при всех $n \in Z$ $\varphi(n, \varphi) \in \mathfrak{M}$.

Подставив $\varphi_n = \varphi_n(\varphi)$ во второе уравнение системы (1), получим уравнение

$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}(\varphi))x_n + c(\varphi_{n+1}(\varphi)). \tag{2}$$

Через $x_n(p) = x_n(p, \varphi, x_k)$ обозначим решение уравнения (2) такое, что $x_k(p, \varphi, x_k) = x_k \in \mathfrak{M}$, $k \in Z$. Норму матрицы $P = \left[p_{ij}\right]_{i,j=1}^{\infty}$, согласованную с векторной нормой пространства $\mathfrak{M}$, определим равенством $\| P \| = \sup\limits_i \sum_{j=1}^{\infty} | p_{ij} |$.

В дальнейшем будем предполагать, что при всех $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$

$$\| P(\varphi) \| \le P^0 = \text{const} < \infty, \qquad \| c(\varphi) \| \le C = \text{const} < \infty$$

и матрица $P(\varphi)$ обратима, причем $\| P^{-1}(\varphi) \| \le P_1 = \text{const} < \infty$. Тогда для любых $x_k \in \mathfrak{M}$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $p \in Z$ такое решение существует, единственно и принадлежит $\mathfrak{M}$ при всех $n \in Z$.

Определение. *Инвариантным тором системы уравнений* (1) *назовем поверхность* $\mathcal{T}(p)$: $x = u(p, \varphi) = (u_1(p, \varphi), u_2(p, \varphi), \ldots)$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, *если* $u(p, \varphi)$ — 2π-*периодическая по* φ^i, $i = 1, 2, 3 \ldots$, *функция, ограниченная по норме* $\| \cdot \|$ *при любом* $p \in Z$, *и для любых* $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ *и* $n, p \in Z$

$$u(p, \varphi_{n+1}(\varphi)) = P(\varphi_{n+p}(\varphi)) u(p, \varphi_n(\varphi)) + c(\varphi_{n+1}(\varphi)). \tag{3}$$

Равенство (3) означает, что функция $u(p, \varphi_n(\varphi))$ есть ограниченное решение системы уравнений (1) с начальными значениями $x_0 = u(p, \varphi)$, т. е. $x_n(p, \varphi, u(p, \varphi)) = u(p, \varphi_n(\varphi))$.

Следуя [9], матрицант однородного уравнения

$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}(\varphi)) x_n \tag{4}$$

представим в виде

$$\Omega_l^n(\varphi, p) = \begin{cases} \prod\limits_{i=n+p-1}^{l+p} P(\varphi_i(\varphi)) & \text{при } n > l; \\ E & \text{при } n = l; \\ \prod\limits_{i=n+p}^{l+p-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi)) & \text{при } n < l, \end{cases} \tag{5}$$

где E — единичная бесконечная матрица. Легко видеть, что матрица $\Omega_l^n(\varphi, p)$ обратима и $\left(\Omega_l^n(\varphi, p)\right)^{-1} = \Omega_n^l(\varphi, p)$.

Пусть для любого $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ пространство $\mathfrak{M}$ разлагается в прямую сумму подпространств $E_1(\varphi)$ и $E_2(\varphi)$ так, что решение $x_n(p, \varphi, x_0)$ уравнения (4), принимающее при $n = 0$ значение $x_0 \in E_1(\varphi)$, удовлетворяет оценке

$$\| x_n(p, \varphi, x_0) \| \le K \lambda^n \| x_0 \|, \qquad p, n \in Z, \ n \ge 0,$$

а принимающее значение $x_0 \in E_2(\varphi)$ — оценке

$$\| x_n(p, \varphi, x_0) \| \le K \lambda^{-n} \| x_0 \|, \qquad p, n \in Z, \ n \le 0,$$

где K и λ — положительные постоянные, не зависящие от φ, p, причем $\lambda < 1$. Если при этом существует 2π-периодическая по φ^i, $i = 1, 2, 3 \ldots$, ограниченная по норме при всех $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ матрица $C_1(\varphi)$, проектирующая пространство $\mathfrak{M}$ на $E_1(\varphi)$ с помощью умножения матрицы на вектор, то уравнение (4) будем называть Z-дихотомичным на $\mathcal{T}_\infty$.

Учитывая, что операция умножения ограниченной бесконечной матрицы на вектор из $\mathfrak{M}$ определяет на этом множестве линейный ограниченный оператор, норма которого совпадает с матричной нормой этой матрицы [12, с. 56], нетрудно проверить, что для Z-дихотомичного на $\mathcal{T}_\infty$ уравнения (4) существует функция Грина – Самойленко вида

$$G_0(l, \varphi, p) = \begin{cases} \Omega_l^0(\varphi, p)C_1(\varphi_l(\varphi)) & \text{при } l \le 0; \\ \Omega_l^0(\varphi, p)[C_1(\varphi_l(\varphi)) - E] & \text{при } l > 0, \end{cases}$$

равномерно по $p \in Z$ и $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ удовлетворяющая неравенству

$$\| G_0(l, \varphi, p)\| \le M\lambda^{|l|}, \quad l \in Z,$$

где M и λ — положительные постоянные, причем $\lambda < 1$.

В таком случае система уравнений (1) имеет единственный инвариантный тор $\mathcal{T}(p)$, который определяется функцией

$$u(p, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_0(l, \varphi, p)c(\varphi_l(\varphi)).$$

Сформулируем теперь критерий Z-дихотомичности уравнения (4) на $\mathcal{T}_\infty$.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (4) *было Z-дихотомичным на $\mathcal{T}_\infty$, необходимо и достаточно существование ограниченной по норме при всех $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, 2π-периодической по φ^i, $i = 1, 2, 3 \ldots$, матрицы $C_1(\varphi)$, удовлетворяющей равенствам*

$$C_1(\varphi_n(\varphi)) = \Omega_0^n(\varphi, p)C_1(\varphi)\Omega_n^0(\varphi, p), \tag{6}$$

$$C_1^2(\varphi) = C_1(\varphi), \tag{7}$$

и положительных постоянных $T \in Z$, $d < 1$ таких, что

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{T}_\infty \\ p \in Z}} \left\{ \left\| \Omega_0^T(\varphi, p)C_1(\varphi)\right\|, \left\|\Omega_0^{-T}(\varphi, p)(C_1(\varphi) - E)\right\| \right\} \le d. \tag{8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку уравнение (4) имеет единственную функцию Грина – Самойленко, определенную матричным проектором $C_1(\varphi)$, то последний удовлетворяет равенствам (6), (7). Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 1 из [16, с. 137].

Из оценок

$$\left\|\Omega_0^n(\varphi, p)C_1(\varphi)\right\| \le M\lambda^n, \quad n \ge 0, \ n \in Z,$$

$$\left\|\Omega_0^n(\varphi, p)[C_1(\varphi) - E]\right\| \le M\lambda^{-n}, \quad n < 0, \ n \in Z,$$

следует существование постоянных $T \in Z$ и $d < 1$, при которых выполняется неравенство (8).

Достаточность. Пусть $n \ge 0$. Тогда существуют такие $t, k \in N$, $t \in [0, T]$, что $n = kT + t$. Учитывая, что для любых $l, n, p, k \in Z$ справедливо равенство

$$\Omega_{l+k}^{n+k}(\varphi, p) = \Omega_l^n(\varphi_k(\varphi), p),$$

и принимая во внимание условия (6), (7) и оценку (8), приходим к неравенствам

$$\left\|\Omega_0^n(\varphi, p)C_1(\varphi)\right\| \le \left\|\Omega_0^t(\varphi_{kT}(\varphi), p)d^{-t/T}\right\|d^{n/T} \le K_0\lambda^n, \tag{9}$$

где

$$\lambda = d^{1/T} < 1, \quad K_0 = \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ p\in Z,\,\varphi\in\mathcal{T}_\infty}} \left\|\Omega_0^t(\varphi, p)d^{-t/T}\right\|.$$

Предположим теперь, что $n < 0$, и представим его в виде $n = -kT + t$. Учитывая, что матрица $C_2(\varphi) = E - C_1(\varphi)$ также удовлетворяет условиям (6), (7), получаем оценку

$$\left\|\Omega_0^n(\varphi, p)C_2(\varphi)\right\| \le \left\|\Omega_0^t(\varphi_{-kT}(\varphi), p)d^{t/T}\right\|d^{-n/T} \le K_0\lambda^{-n}. \tag{10}$$

Оценки (9) и (10) доказывают Z-дихотомичность уравнения (4) на $\mathcal{T}_\infty$.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\overset{(m)}{\varphi}_{n+1} = \overset{(m)}{\varphi}_n + \overset{(m)}{\omega}, \qquad \overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_{n+p}\right)\overset{(s)}{x}_n + \overset{(s)}{c}\left(\overset{(m)}{\varphi}_{n+1}\right), \tag{11}$$

полученную из системы (1) укорочением по φ до m-го и по x до s-го порядков, т. е. $\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$,

$$\overset{(m)}{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m), \qquad \overset{(s)}{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^s),$$

$$\overset{(s)}{c}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right) = \left(c_1\left(\overset{(m)}{\varphi}, 0, 0, \ldots\right), c_2\left(\overset{(m)}{\varphi}, 0, 0, \ldots\right), \ldots, c_s\left(\overset{(m)}{\varphi}, 0, 0, \ldots\right)\right),$$

$$\overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right) = \left[p_{ij}\left(\overset{(m)}{\varphi}, 0, 0, \ldots\right)\right]_{i,j=1}^{s}.$$

Если $m = \infty$, то система (1) укорочена лишь по x, при $s = \infty$ — лишь по φ, при $m = \infty$ и $s = \infty$ (1) и (11) совпадают ($\varphi = \overset{(\infty)}{\varphi}$, $x = \overset{(\infty)}{x}$).

Матрицант уравнения

$$\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_{n+p}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right)\overset{(s)}{x}_n, \tag{12}$$

соответствующего уравнению (4), обозначим через $\Omega_l^n\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s$, а инвариантный тор системы (11) — через $\mathcal{T}_{sm}(\varphi)$: $\overset{(s)}{x} = u_s\left(p, \overset{(m)}{\varphi}\right)$, $\overset{(m)}{\varphi} \in \mathcal{T}_m$.

Приведем условия, при которых

$$u(p, \varphi) = \lim_{s\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_s\left(p, \overset{(m)}{\varphi}\right), \tag{13}$$

где $u(p, \varphi)$ — функция, определяющая инвариантный тор $\mathcal{T}(p)$ системы уравнений (1).

Лемма 1. *Положим в* (11) $m = \infty$. *Если выполняется оценка*

$$\left\|\Omega_l^0(\varphi, p)\right\| \le K\lambda^{-l}, \quad l \le 0, \tag{14}$$

где K *и* $\lambda < 1$ *— положительные постоянные, не зависящие от* $s \in N$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $p \in Z$, *то*

$$\lim_{s\to\infty} u_s(p,\varphi) = u(p,\varphi), \tag{15}$$

где сходимость понимается в слабом смысле (покоординатно).

Доказательство. Из справедливости оценки (14) при произвольном $p_0 \in Z$ следует ее справедливость при любом $p \in Z$. Положим

$$x_l = \left(x_l^1, x_l^2, x_l^3, \dots\right) \in \mathfrak{M}, \qquad \overset{(s)}{x}_l = \left(x_l^1, x_l^2, \dots, x_l^s\right)$$

и через $\overset{(s)}{x}_n$ обозначим решение $\overset{(s)}{x}_n\left(p,\varphi,\overset{(s)}{x}_l\right)$ уравнения (12) такое, что $\overset{(s)}{x}_l\left(p,\varphi,\overset{(s)}{x}_l\right) = \overset{(s)}{x}_l$.

Покажем сначала, что в слабом смысле равномерно по $p \in Z$

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}_n = \overset{(\infty)}{x}_n, \qquad n \ge l, \tag{16}$$

где $\overset{(\infty)}{x}_n = x_n(p,\varphi,x_l)$ — решение уравнения (4). При $n = l$ соотношение (16) очевидно, при $n = l+1$ для r-х координат выполняется равенство

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}^r_{l+1} = \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} p_{ri}\left(\varphi_{l+p}(\varphi)\right) x_l^i = \overset{(\infty)}{x}{}^r_{l+1}, \qquad r = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Пусть $n = l+2$. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}^r_{l+2} = \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} p_{ri}\left(\varphi_{l+p+1}(\varphi)\right) \overset{(s)}{x}{}^i_{l+1}, \qquad r = 1, 2, \dots ,$$

где $\overset{(s)}{x}{}^i_{l+1} = 0$ при $i > s$. Последний ряд сходится равномерно относительно $s \in N$, что позволяет перейти к пределу при $s \to \infty$ под знаком егосуммы и, учитывая (17), доказать равенство (16) для $n = l+2$.

Методом полной математической индукции убеждаемся в справедливости этого равенства при всех $n > l$. Отсюда следует, что в слабом смысле равномерно по $p \in Z$

$$\lim_{s\to\infty} \Omega_l^0(\varphi,p)_s = \Omega_l^0(\varphi,p), \qquad l \le 0,$$

и

$$\left\|\Omega_l^0(\varphi,p)\right\| \le K\lambda^{-l}, \qquad l \le 0.$$

Функции $\Omega_l^n(\varphi,p)c(\varphi_l(\varphi))$ и $\Omega_l^n(\varphi,p)_s \overset{(s)}{c}(\varphi_l(\varphi))$ являются решениями уравнений (4) и (12) соответственно, принимающими при $n = l$ значения $\{c_1(\varphi_l(\varphi)), c_2(\varphi_l(\varphi)), \dots\}$ и $\{c_1(\varphi_l(\varphi)), \dots, c_s(\varphi_l(\varphi))\}$. Тогда, согласно (16), в слабом смысле имеет место предельный переход

$$\lim_{s\to\infty} \Omega_l^0(\varphi,p)_s \overset{(s)}{c}(\varphi_l(\varphi)) = \Omega_l^0(\varphi,p)_s c(\varphi_l(\varphi)).$$

Отсюда при учете оценки (14) следует (15).

Говорят, что функция $f(\varphi)$ удовлетворяет усиленным условиям Коши – Липшица на $\mathcal{T}_\infty$ с коэффициентом $\varepsilon(m)$, если

$$\| f(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots) - f(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \overline{\varphi}_{m+1}, \overline{\varphi}_{m+2}, \dots)\| \le$$

$$\leq \varepsilon(m) \sup \left\{ |\overline{\varphi}_{m+1} - \varphi_{m+1}|, |\overline{\varphi}_{m+2} - \varphi_{m+2}|, \ldots \right\},$$

где $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$, а $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots)$ и $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi}_{m+1}, \overline{\varphi}_{m+2}, \ldots)$ — произвольные точки тора $\mathcal{T}_\infty$, первые m координат которых совпадают.

Через $L(\mathcal{T}_\infty)$ обозначим множество функций и матриц, которые удовлетворяют усиленным условиям Коши – Липшица на $\mathcal{T}_\infty$.

Лемма 2. *Если матрица* $P(\varphi) \in L(\mathcal{T}_\infty)$ *с коэффициентом* $\varepsilon(m)$, *то равномерно по* $s \in N$ *выполняется оценка*

$$\left\| \Omega_l^0(\varphi, p)_s - \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \right\| \leq$$

$$\leq -l(P^0)^{-(l+1)}\left(\left\|\varphi_{l+p}(\varphi)\right\| + \|\omega\|\right)\varepsilon(m) \tag{18}$$

при всех $l < 0$, $l \in Z$.

Доказательство проведем методом полной математической индукции. Учитывая (5), левую часть неравенства (18) представим в виде

$$I(l, p, s) = \left\| \prod_{i=p-1}^{l+p} \overset{(s)}{P}(\varphi_i(\varphi)) - \prod_{i=p-1}^{l+p} \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_i\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) \right\|, \quad l < 0, \tag{19}$$

и отметим, что

$$\varphi_i(\varphi) = \left(\varphi_i^1(\varphi), \varphi_i^2(\varphi), \ldots\right), \qquad \overset{(m)}{\varphi}_i\left(\overset{(m)}{\varphi}\right) = \left(\overset{(m)}{\varphi}{}_i^1\left(\overset{(m)}{\varphi}\right), \ldots, \overset{(m)}{\varphi}{}_i^m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right), 0, 0, \ldots\right),$$

где $\overset{(m)}{\varphi}{}_i^g\left(\overset{(m)}{\varphi}\right) = \varphi_i^g(\varphi)$ при всех $g \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Кроме того, равномерно по $s \in N$

$$\left\| \overset{(s)}{P}(\varphi_i(\varphi)) - \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_i\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) \right\| \leq \varepsilon(m) \sup \left\{ \left|\varphi_i^{m+1}(\varphi)\right|, \left|\varphi_i^{m+2}(\varphi)\right|, \ldots \right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon(m) \|\varphi_i(\varphi)\|. \tag{20}$$

Пусть $l = -1$. Из соотношений (19), (20) непосредственно следует неравенство

$$I(-1, p, s) \leq \varepsilon(m) \|\varphi_{p-1}(\varphi)\|,$$

подтверждающее оценку (18).

Предположим, чро неравенство (18) справедливо при $l = -k$, $k \in N$, и докажем его справедливость при $l = -(k+1)$. Положим

$$\prod_{i=p-1}^{-k+p} \overset{(s)}{P}(\varphi_i(\varphi)) = Z_k(\varphi), \qquad \prod_{i=p-1}^{-k+p} \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_i\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) = Z_k\left(\overset{(m)}{\varphi}\right).$$

Тогда

$$I(-(k+1), p, s) = \left\| Z_k(\varphi) \overset{(s)}{P}\left(\varphi_{-(k+1)+p}(\varphi)\right) - Z_k\left(\overset{(m)}{\varphi}\right) \overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}_{-(k+1)+p}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) \right\| \leq$$

$$\leq k(P^0)^{-(-k+1)}\left(\left\|\varphi_{-k+p}(\varphi)\right\| + \|\omega\|\right)\varepsilon(m)P^0 + (P^0)^k \varepsilon(m) \left\|\varphi_{-(k+1)+p}(\varphi)\right\| \leq$$

$$\leq (k+1)(P^0)^k\left(\left\|\varphi_{-(k+1)+p}(\varphi)\right\| + \|\omega\|\right)\varepsilon(m),$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть* $P(\varphi)$, $c(\varphi) \in L(\mathcal{T}_\infty)$ *и для всех целых* $l \le 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, 0\right)_s \right\| \le K\lambda^{-l}, \tag{21}$$

гда K *и* $\lambda < \min\left\{1; \frac{1}{P^0}\right\}$ *— положительные постоянные, не зависящие от* $\varphi \in \in \mathcal{T}_\infty$; $s, m \in N$. *Тогда имеет место представление* (13), *в котором внутренний предельный переход понимается в смысле нормы, а внешний — в слабом смысле.*

Доказательство. Из оценок (21) и (18) следует оценка (14), из которой, в силу леммы 1, возникает неравенство $\|\Omega_l^0(\varphi, p)\| \le K\lambda^{-l}$, $l \le 0$. Тогда при любых $m, s \in N$ уравнения (4) и (12) являются Z-дихотомичными на торах $\mathcal{T}_\infty$ и $\mathcal{T}_m$ соответственно.

В таком случае при любых $m, s \in N$ каждая из систем уравнений (1), (11) имеет единственный инвариантный тор $\mathcal{T}(p)$, $\mathcal{T}_{sm}(p)$, определяемый функцией

$$u(p, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{0} \Omega_l^0(\varphi, p) c(\varphi_l(\varphi))$$

и

$$u_s\left(p, \overset{(m)}{\varphi}\right) = \sum_{l=-\infty}^{0} \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \overset{(s)}{c}\left(\overset{(m)}{\varphi}_l\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right)$$

соответственно.

На основании леммы 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sigma_m(s, p, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{0} \left\| \Omega_l^0(\varphi, p)_s \overset{(s)}{c}(\varphi_l(\varphi)) - \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \overset{(s)}{c}\left(\overset{(m)}{\varphi}_l\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) \right\| \to 0$$

при $m \to \infty$. Предположим, что $c(\varphi) \in L(\mathcal{T}_\infty)$ с коэффициентом $\delta(m)$, и под $\varphi_n(\varphi)$ $(n \in Z)$ будем понимать траекторию на торе, т. е. $\|\varphi_n(\varphi)\| \le 2\pi$, $n \in Z$.

При всех целых $l \le 0$ из леммы 2 вытекает оценка

$$\left\| \Omega_l^0(\varphi, p)_s - \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \right\| \le \left(2K\varepsilon(m)\xi\lambda^{-l}\right)^{1/2},$$

где $\xi = (-l)(P^0)^{-(l+1)}(2\pi + \|\omega\|)$, что позволяет записать цепочку неравенств

$$\sigma_m(s, p, \varphi) \le \sum_{l=-\infty}^{0} \left\{ \left\| \Omega_l^0(\varphi, p)_s - \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \right\| \left\| \overset{(s)}{c}(\varphi_l(\varphi)) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \Omega_l^0\left(\overset{(m)}{\varphi}, p\right)_s \right\| \left\| \overset{(s)}{c}(\varphi_l(\varphi)) - \overset{(s)}{c}\left(\overset{(m)}{\varphi}_l\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right) \right\| \right\} \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{0} \left\{ C(2K\varepsilon(m)\xi\lambda^{-l})^{1/2} + K\lambda^{-l}\delta(m)2\pi \right\} \le$$

$$\le C(2K\varepsilon(m))^{1/2} \sum_{l=-\infty}^{0} (\xi\lambda^{-l})^{1/2} + \frac{2\pi K}{1-\lambda}\delta(m).$$

При $\lambda P^0 < 1$ ряд $\sum_{l=-\infty}^{0} (\xi\lambda^{-l})^{1/2}$ сходится к некоторому положительному числу Ф. Тогда

$$\sigma_m(s, p, \varphi) \leq \sqrt{2K}\, C\Phi\sqrt{\varepsilon(m)} + \frac{2\pi K}{1-\lambda}\delta(m),$$

и соотношение (22) выполняется равномерно по всем $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $s \in N$ и $p \in Z$. Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что в условиях теоремы 2 повторный предел (13) имеет свойство коммутативности.

Замечание. Для доказательства теоремы 1 достаточно существования матрицанта уравнения (4) и не обязательно его представление в виде (5), т. е. можно обойтись без условия обратимости матрицы $P(\varphi)$. Вероятно, что теорема 2 справедлива без этого ограничения, однако последнее утверждение требует дополнительного обоснования.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 214 с.
2. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости разностных уравнений на торе // Вычислит. и прикл. математика. – 1975. – Вып. 26. – С. 42 – 48.
3. *Мартынюк Д. И., Данилов В. Я., Паньков В. Г.* Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 4. – С. 464 – 475.
4. *Мартынюк Д. И.* Исследование окрестности гладкого инвариантного тороидального многообразия системы разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11,** № 8. – С. 1474–1484.
5. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений // Там же. – 1973. – **9,** № 10. – С. 1904–1910.
6. *Самойленко А. М.* Исследование дискретной динамической системы в окрестности квазипериодической траектории // Укр. мат. журн. – 1992. – **44,** № 12. – С. 1702–1711.
7. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Паньков В. Г.* Свойства инвариантных тороидальных множеств нелинейных систем разностных уравнений. – Киев, 1990. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 90.7).
8. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости счетных систем линейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1995. – **47,** № 11. – С. 1533–1541.
9. *Теплинский Ю. В., Самойленко М. В.* О периодических решениях счетных систем линейных и квазилинейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Там же. – 1996. – **48,** № 8. – С. 1144–1152.
10. *Теплинский Ю. В., Теплинский А. Ю.* О периодических решениях счетных систем квазилинейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами в резонансном случае // Доп. НАН України. – 1996. – № 1. – С. 13–15.
11. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость нелинейных почти-периодических систем разностных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46,** № 9. – С. 1216–1223.
12. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
13. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Метод урезания в построении инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30,** № 2. – С. 204–212.
14. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространствах ограниченных числовых последовательностей // Там же. – 1985. – **21,** № 8. – С. 1353–1361.
15. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О гладкости инвариантного тора счетного линейного расширения динамической системы на m-мерном торе // Там же. – 1994. – **30,** № 5. – С. 781–790.
16. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Получено 12.06.97