УДК 517.9

В. Г. Самойленко (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ),
Ю. М. Сидоренко (Львів. ун-т)

ІЄРАРХІЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ БЮРГЕРСА ТА ІНТЕГРОВНІ РЕДУКЦІЇ В СИСТЕМІ ДЕВІ – СТЮАРДСОНА

We investigate integrable reductions in the Davey–Stewartson model and introduce the hierarchy of the Burgers matrix equations. By using the method of nonlocal reductions in linear problems associated with the hierarchy of the second-type Davey–Stewartson equations, we establish the nontrivial relation of these equations to the system of Burgers matrix equations. We present the explicit forms of reductions of the second-type Davey–Stewartson model which admit the linearization.

Присвячена дослідженню інтегровних редукцій в моделі Деві – Стюардсона. Введено ієрархію матричних рівнянь Бюргерса. За допомогою методу нелокальних редукцій в лінійних задачах, асоційованих з ієрархією рівнянь Деві – Стюардсона-II, встановлено нетривіальний зв'язок цих рівнянь з системою матричних рівнянь Бюргерса. Записано в явному вигляді редукції моделі Деві – Стюардсона-II, що допускають лінеаризацію.

Вступ. Останнім часом великий інтерес викликає дослідження системи рівнянь Деві – Стюардсона (DS) [1]. Це обумовлено широкими фізичними застосуваннями даної моделі, а також можливістю використання для її вивчення апарату методу оберненої задачі теорії розсіювання [2 – 9], що дозволяє дослідити властивості розв'язків даної системи рівнянь та, зокрема, знайти такі розв'язки в явному вигляді.

Прийнято розрізняти дві суттєво відмінні за своєю математичною природою системи рівнянь Деві – Стюардсона: DS-I та DS-II (див. формули (13), (18)). Можливість застосування до них методу оберненої задачі вперше була продемонстрована в роботі [10] (див. також [11, 12]). Досить повний огляд результатів стосовно моделей DS, а також бібліографію з цього питання можна знайти в [13–15]. Зауважимо також, що обернена задача теорії розсіювання для оператора Лакса моделі DS-I вперше була досліджена в [16], а отримані при цьому результати застосовано в [17] при інтегруванні (2 + 1)-вимірного нелінійного рівняння Шредінгера.

Дана стаття присвячена дослідженню інтегровних редукцій в моделі Деві – Стюардсона. У п. I введено позначення та основні об'єкти, що досліджуються в статті. В цьому та в наступних пунктах у вигляді тверджень сформульовано результати, перевірка справедливості яких, на думку авторів, не повинна викликати ускладнень, оскільки має, в основному, технічний характер.

У п. II введена ієрархія матричних рівнянь Бюргерса (див. формулу (27)). Цей об'єкт, на наш погляд, заслуговує подальших окремих досліджень щодо його зв'язку з інтегровними моделями теорії солітонів та їх розв'язками. В кінці п. II сформульовано основні твердження роботи: теореми 1 і 2.

П. III присвячено доведенню теорем 1, 2. За допомогою нелокальної редукції в лінійних задачах, асоційованих з ієрархією рівнянь DS-II, встановлено нетривіальний зв'язок між ними і системою матричних рівнянь Бюргерса. В результаті ми явно виписуємо редукції моделі DS-II, що допускають пряму лінеаризацію. На жаль, брак місця не дозволив зупинитись в цій роботі на питаннях побудови та дослідження широких класів точних розв'язків системи Деві – Стюардсона, базуючись на твердженнях теорем 1, 2. Ці питання планується висвітлити в наступних статтях.

I. Системи рівнянь Деві – Стюардсона. Розглянемо диференціальні (2×2)-матричні оператори B_1, B_2 вигляду

$$B_1 = \beta\sigma_3\partial_x + [\sigma_3, \omega], \tag{1}$$

$$B_2 = I\partial_x^2 + \frac{2}{\beta}\omega_x, \tag{2}$$

де

$$\beta \in \mathbf{C}^1, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}(1, -1), \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}(1, 1),$$

$$\omega = P + D = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{off}(q, r) + \operatorname{diag}(d_1, d_2). \tag{3}$$

Формулою (3) введено скорочення, що часто зустрічаються для спрощення викладок.

Умовою сумісності лінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\alpha I \partial_y - B_1)\Phi &= 0, \\ (\gamma I \partial_t - B_2)\Phi &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де Φ — деяка (2×2)-матрична комплекснозначна функція, $\alpha, \gamma \in \mathbf{C}^1$ — комплексні сталі, є операторне рівняння Лакса вигляду

$$\alpha B_{2y} - \gamma B_{1t} = [B_1, B_2] \equiv B_1 B_2 - B_2 B_1. \tag{5}$$

Рівняння (5) в літературі ще називають рівнянням Захарова – Шабата.

В формулах (1) – (5) і далі символом ∂_ξ позначається оператор частинної похідної по відповідній змінній, тобто

$$\partial_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial_\xi}. \tag{6}$$

***Зауваження* 1.** Необхідно розрізняти дію оператора ∂_ξ на функцію f згідно з формулою

$$\partial_\xi f \equiv \frac{\partial f}{\partial_\xi} \equiv f_\xi \tag{7}$$

та дію оператора ∂_ξ на оператор множення на функцію f згідно з правилом

$$\partial_\xi f = f_\xi + f \partial_\xi. \tag{8}$$

Всі функції (ω, Φ) в формулах (1) – (5), а також ті, що будуть зустрічатись далі, є функціями незалежних змінних x, y, t. Ми не будемо кожен раз акцентувати на цьому увагу, позначаючи функцію $f(x, y, t)$ символом f.

У формулі (5) через $B_{i\xi}$, $i = 1, 2$; $\xi = y, t$, позначено оператор B_i з продиференційованими по змінній ξ коефіцієнтами, тобто

$$\partial_\xi B_i = B_{i\xi} + B_i \partial_\xi. \tag{9}$$

Зокрема,

$$\partial_t B_1 = B_{1t} + B_1 \partial_t = ([\sigma_3, \omega_t]) + (\beta \sigma_3 \partial_x + [\sigma_3, \omega])\partial_t. \tag{10}$$

Надалі, як і формулах (9), (10), ми пропускатимемо оператор множення на одиничну матрицю відповідної розмірності і будемо використовувати запис вигляду

$$I \partial_\xi \Phi \equiv \partial_\xi \Phi.$$

Враховуючи викладене вище, рівняння (5) можна подати в комутаторному вигляді

$$[\alpha \partial_y - B_1, \gamma \partial_t - B_2] = 0. \tag{11}$$

Твердження 1. *Операторне рівняння* (11) *рівносильне системі диферен-*

ціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів операторів B_1, B_2 *такого вигляду:*

$$\gamma P_t = \frac{\alpha}{\beta}\sigma_3 P_{xy} + \frac{2}{\beta}[D_x, P],$$
$$D_x - \frac{\alpha}{\beta}\sigma_3 D_y + \frac{2}{\beta}P^2 = 0. \tag{12}$$

Доведення твердження полягає у простому виконанні операції комутування в (11).

Зауваження 2. Наявність для конкретної динамічної системи комутаторного зображення Лакса вигляду (11) є необхідною, але не достатньою передумовою застосування до неї методу оберненої задачі [2 – 9].

Зауваження 3. Загальна система нелінійних рівнянь (12) у випадку однієї еволюційної (t) та двох просторових (x, y) змінних має важливі фізичні застосування тільки при наявності додаткових обмежень на коефіцієнти операторів B_1, B_2. Ці обмеження прийнято називати *редукціями.*

Найбільш цікавими як з математичної, так і з фізичної точок зору є два типи редукцій, які в кінцевому результаті приводять до відомих за своїми застосуваннями в різних галузях природознавства моделей Деві – Стюардсона (DS) [1, 13 – 15].

1. Редукції першого (гіперболічного) роду. Далі коефіцієнти α, β, γ вважаються дійсними або уявними сталими, тобто $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$.

Твердження 2. *Обмеження вигляду*

$$r = \mu\bar{q}, \quad \gamma \in i\mathbf{R}; \quad \alpha\beta \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

де $\mathbf{R} \ni \mu$ — *постійна зв'язку, сумісні з динамікою системи* (12).

Доведення. Нехай $\varphi = r - \mu\bar{q}$. Для доведення твердження 2 достатньо показати, що похідна φ_t в силу системи (12) тотожно дорівнює 0 після накладання в'язей (13). Розписуючи систему (13) для скалярних комплекснозначних функцій q і r, отримуємо співвідношення

$$-\varphi_t = \left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}r_{xy} + \mu\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}\bar{\gamma}}\bar{q}_{xy}\right) + \left(\frac{2}{\beta\gamma}(d_1 - d_2)_x r + \frac{2\mu}{\bar{\beta}\bar{\gamma}}(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)_x \bar{q}\right), \tag{14}$$

де функції d_1, d_2 задовольняють систему рівнянь вигляду

$$d_{1,x} - \frac{\alpha}{\beta}d_{1,y} = -\frac{2}{\beta}qr,$$
$$d_{2,x} + \frac{\alpha}{\beta}d_{2,y} = -\frac{2}{\beta}qr. \tag{15}$$

З (13) випливає $\alpha/\beta = \bar{\alpha}/\bar{\beta} \in \mathbf{R}$ та $1/\gamma = -1/\bar{\gamma} \in i\mathbf{R}$, а з співвідношень (13) та (15) — $\beta d_1 \in \mathbf{R}$ та $\beta d_2 \in \mathbf{R}$.

Таким чином, при $\mu \in \mathbf{R}$, $\gamma \in i\mathbf{R}$, $\alpha\beta \in \mathbf{R}$ виконується рівність

$$-\varphi_t = \left[\frac{\alpha}{\beta\gamma}(r - \mu\bar{q})_{xy} + \frac{2}{\beta\gamma}(d_1 - d_2)_x(r - \mu\bar{\gamma})\right]\Bigg|_{r = \mu\bar{q}} \equiv 0. \tag{16}$$

Після накладання в'язей (13) система рівнянь (12) редукується до вигляду

$$\gamma q_t = \frac{\alpha}{\beta}q_{xy} + \frac{2}{\beta}(d_1 - d_2)_x q,$$

$$d_{1x} - \frac{\alpha}{\beta} d_{1y} = -\frac{2\mu}{\beta} |q|^2, \tag{17}$$

$$d_{2x} + \frac{\alpha}{\beta} d_{2y} = -\frac{2\mu}{\beta} |q|^2.$$

Вводячи нову функцію $S \equiv (d_1 - d_2)_x$, як диференціальний наслідок системи (17), отримуємо нелінійну модель Деві – Стюардсона (DS-I) вигляду

$$\begin{gathered} \gamma q_t = \frac{\alpha}{\beta} q_{xy} + \frac{2}{\beta} S q, \\ S_{xx} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} S_{yy} + \frac{4\alpha\mu}{\beta^2} |q|^2_{xy} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

2. Редукції другого (еліптичного) роду.

Твердження 3. *Обмеження вигляду*

$$r = \mu \bar{q}, \quad \gamma \in \mathbf{R}; \quad \alpha\beta \in i\mathbf{R}, \tag{19}$$

де $\mathbf{R} \ni \mu$ *— постійна зв'язку, сумісні з динамікою системи* (12).

Доведення твердження 3 аналогічне доведенню твердження 2.

***Зауваження* 4.** Після накладання в'язей (19) система рівнянь (12) формально по вигляду співпадає з (17), а її диференціальний наслідок — нелінійна модель DS-II [18] — з системою (18). Дещо завуальована, але суттєва відмінність полягає в тому, що для моделі DS-I оператор B_1 є гіперболічного, а для DS-II — еліптичного типу. Аналогічне зауваження стосується і другого рівняння системи (18) відносно функції S.

Моделі Деві – Стюардсона в науковій літературі зустрічаються також в дещо відмінній від (18) формі запису [2, 10–12], а саме: якщо замінити оператор B_2 в рівнянні Лакса (11) на оператор $\tilde{B}_2$ вигляду

$$\tilde{B}_2 = \delta\sigma_3 \partial_x^2 + \frac{2\delta}{\beta} \sigma_3 P \partial_x + \frac{\delta}{\beta}\left(\sigma_3 P_x + \frac{\alpha}{\beta} P_y \right) + \operatorname{diag}(S_1, S_2),$$

то аналог системи рівнянь (12) запишеться таким чином:

$$\begin{gathered} \gamma P_t = \frac{\delta}{2} \sigma_3 \left(P_{xx} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} P_{yy} \right) + [D, P], \\ \alpha\sigma_3 D_y - \beta D_x = \frac{2\delta}{\beta} \left[\frac{\alpha}{\beta} (P^2)_y - \sigma_3 (P^2)_x \right], \end{gathered} \tag{20}$$

де $D = \operatorname{diag}(s_1, s_2)$.

Рівняння (20) по аналогії з системою (12) допускають дві якісно відмінні групи редукцій, а саме:

редукції першого роду:

$$\gamma\delta \in i\mathbf{R}, \quad \alpha\beta \in \mathbf{R}, \quad r = \mu \bar{q} \tag{21}$$

та редукції другого роду:

$$\gamma\delta \in i\mathbf{R}, \quad \alpha\beta \in i\mathbf{R}, \quad r = \mu \bar{q}, \tag{22}$$

де $\mathbf{R} \ni \mu$ — стала зв'язку.

Вводячи функцію S за допомогою формули $S = s_1 - s_2$, нескладно отримати редукований вигляд системи рівнянь (20) після накладання на неї в'язей (21) (аналогічно в'язей (22)):

$$\gamma q_t = \frac{\delta}{2}\left(q_{xx} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} q_{yy} \right) + Sq,$$
$$\alpha^2 S_{yy} - \beta^2 S_{xx} = 4\mu\delta\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} |q|^2_{yy} + |q|^2_{xx} \right). \tag{23}$$

Система (23) при обмеженнях на сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ вигляду (21) називається, як і система рівнянь (18), нелінійною моделлю Деві – Стюардсона I (DS-I), а при обмеженнях (22) — моделлю DS-II.

Зауваження 5. Оскільки системи Деві – Стюардсона (18) та (23) є диференціальними наслідками систем рівнянь відповідно (12) та (20), то довільні розв'язки систем рівнянь (18) та (23) після редукцій (13), (19) та (21), (22) відповідно будуть і розв'язками моделей DS-I та DS-II.

II. Матричні рівняння Бюргерса. Нехай (2×2)-матрична комплекснозначна функція T залежить від нескінченної послідовності параметрів $t_0 \equiv x$, $t_1 \equiv y$, $t_2 \equiv t$, $t_3, t_4, \ldots$, тобто

$$T = T(\vec{t}) = T(x, y, t, t_3, t_4, \ldots).$$

Розглянемо нескінченну систему лінійних еволюційних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} T_t &= T_{xx}, \\ T_{t_3} &= T_{xxx}, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ T_{t_n} &= T^{(n)} \equiv \partial_x^n T, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \end{aligned} \tag{24}$$

або скорочено

$$T_{t_n} = T^{(n)}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots . \tag{25}$$

Твердження 4.

а) *Матрична функція* Φ, *визначена співвідношенням*

$$T_x = \Phi T, \tag{26}$$

задовольняє систему нелінійних еволюційних рівнянь

$$\Phi_{t_n} = \Phi^{(n)} + P_n(\Phi^{(n-1)}, \ldots, \Phi), \quad \Phi^{(k)} = \partial_x^k \Phi, \quad k = \overline{0, n}, \quad \mathbf{N} \ni n > 1, \tag{27}$$

де P_n — *многочлен степеня* n *від аргументів, що вказані в дужках;*

б) *потоки* (27) *попарно комутують, тобто система рівнянь* (27) *є сумісною.*

При $n = 2$ рівняння (27) має вигляд

$$\Phi_t = \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi, . \tag{28}$$

а при $n = 3$

$$\Phi_{t_3} = \Phi_{xxx} + 3\Phi_{xx}\Phi + 3\Phi_x^2 + 3\Phi_x \Phi^2. \tag{29}$$

Означення. *Послідовність комутуючих потоків* (27) *називатимемо ієрархією матричних рівнянь Бюргерса.*

Зауваження 6. Коректність введеного нами означення підтверджується тим фактом, що рівняння (28), (29) в скалярному випадку є відповідно нелінійним рівнянням Бюргерса і його вищою симетрією, як і всі потоки вигляду (27) при $n > 3$, що випливає з п. б) твердження 4.

Твердження 5. *Матрична функція* $U = 2\Phi_x$, *де* Φ *— сумісний розв'язок системи рівнянь* (28), (29), *задовольняє рівняння вигляду*

$$U_{t_3} = \frac{1}{4}U_{xxx} + \frac{3}{2}U_xU + \frac{3}{4}\partial^{-1}U_{t_2t_2} - \frac{3}{4}U[U, \partial^{-1}U], \tag{30}$$

де ∂^{-1} *— символ „правого оберненого" до оператора диференціювання* $\partial \equiv \equiv \partial/\partial x$, *тобто*

$$\partial \cdot \partial^{-1} = I, \tag{31}$$

I *— тотожний (одиничний) оператор.*

Доведення твердження проводиться прямими обчисленнями.

Зауваження 7. В скалярному випадку останній доданок в рівнянні (30), очевидно, дорівнює нулеві, а отже, в цьому випадку рівняння (30) співпадає з відомим рівнянням Кадомцева – Петвіашвілі (КП) [2–11]. В зв'язку з цим рівняння (30) називатимемо матричним аналогом рівняння КП.

Вірне таке твердження.

Твердження 6. *Нехай матрична функція* $T(x, t_2, t_3)$ *є розв'язком лінійної системи рівнянь*

$$\begin{aligned} T_{t_2} &= T_{xx}, \\ T_{t_3} &= T_{xxx}, \end{aligned} \tag{32}$$

причому $\det T \neq 0$.

Тоді функція

$$U(x, t_2, t_3) = 2\frac{\partial}{\partial x}(T_xT^{-1}) = 2\left[T_{xx}T^{-1} - (T_xT^{-1})^2\right] \tag{33}$$

є розв'язком рівняння (30).

Справедливість даного твердження випливає з методу побудови рівняння (30).

Зауваження 8. Очевидно, що всі міркування та побудови цього пункту справедливі не тільки для матричної розмірності $(k \times k)$ при $k = 2$, а без жодних змін переносяться на загальний випадок $k = n$, де n — довільне натуральне число.

У випадку $k = 1$ формула (33) для розв'язків рівняння (30) спрощується, а твердженню 6 можна надати вигляду, аналогічного до прийнятого в так званому τ-функціональному підході до скалярної ієрархії КП [19].

Твердження 6*. *Нехай дійсна функція* $\tau = \tau(x, t_2, t_3, \dots)$ *є розв'язком лінійної системи рівнянь*

$$\begin{aligned} \tau_{t_2} &= \tau_{xx}, \\ \tau_{t_n} &= \tau_x^{(n)}, \end{aligned} \tag{34}$$

де $n = 3, 4, \dots$.

Тоді функція

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau$$

є розв'язком n*-го „вищого" рівняння з ієрархії КП. Самому рівнянню КП відповідає значення* $n = 3$.

Зауваження 9. Продемонстрована нами вище наявність матричного аналогу твердження 6^* дає підставу сподіватись на можливість побудови теорії точних розв'язків для ієрархії загальних матричних рівнянь КП по аналогії зі скалярним випадком [19]. Це питання автори відкладають на майбутнє в зв'язку з невідомими на даний момент фізичним змістом і можливостями застосування в природничих галузях рівняння (30) та його вищих симетрій.

III. Про редукції та розв'язки системи DS-II. Сформулюємо та доведемо твердження щодо явного вигляду розв'язків систем рівнянь Деві – Стюардсона, введених в п. I. За браком місця ми обмежимось системою рівнянь DS-II (18) (див. зауваження 4).

Не втрачаючи загальності, ми розглянемо систему (18) з фіксованими сталими (19), коли $\mu = 1$, $\alpha = i$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, тобто розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} iq_t &= -q_{xy} - 4qs, \\ \Delta s &= -2|q|^2_{xy}, \end{aligned} \tag{35}$$

де $s \equiv -\frac{i}{2}S$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Вірні такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* (2×2)*-матрична комплекснозначна функція* T *вигляду*

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \pm\bar\tau_1 & \pm\bar\tau_2 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

де $\tau_k = \tau_k(z, \bar z)$; $k = 1, 2$; $z = x + iy$, $\bar z = x - iy \in \mathbf{C}^1$, $x, y \in \mathbf{R}$, *задовольняє лінійну систему*

$$\begin{aligned} T_y &= -i\sigma_3 T_x, \\ T_t &= T_{xx}, \end{aligned} \tag{37}$$

причому $\det T \neq 0$.

Тоді функції

$$\begin{aligned} q &= \pm\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_{1x} & \tau_{2x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \bar\tau_1 & \bar\tau_2 \end{vmatrix}^{-1}, \\ s &= \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\begin{vmatrix} \tau_{1x} & \tau_{2x} \\ \bar\tau_1 & \bar\tau_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar\tau_{1x} & \bar\tau_{2x} \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}\right]\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \bar\tau_1 & \bar\tau_2 \end{vmatrix}^{-1}\right\}, \end{aligned} \tag{38}$$

задовольняють систему рівнянь DS-II (35).

Знак $\pm$ у формулі (38) означає, що разом з розв'язком q системи (35) функція $-q$ також є її розв'язком. Ця властивість, як неважко бачити, має місце і для довільних розв'язків моделі DS-II (35).

Теорема 2. *Справедливі такі твердження:*

1. *Нелінійна модель* DS-II (35) *допускає редукцію вигляду*

$$s = \operatorname{Im} q_x = \frac{1}{2i}(q - \bar q)_x. \tag{39}$$

2. *Нехай комплекснозначна функція* $\tau = \tau(z, \bar z; t)$ *задовольняє лінійну систему рівнянь вигляду*

$$\tau_y = -i\tau_x,$$
$$\tau_t = \tau_{xx}. \tag{40}$$

Тоді функції

$$q = \frac{1}{2}\frac{\tau_x}{\operatorname{Re}\tau} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\ln(\operatorname{Re}\tau),$$
$$s = \operatorname{Im} q_x \qquad (\tau = \operatorname{Re}\tau + i\operatorname{Im}\tau) \tag{41}$$

задовольняють систему рівнянь DS-II (35).

Доведення цих теорем базується на аналізі введеної нами ієрархії матричних рівнянь Бюргерса (27).

Розглянемо диференціальні (2×2)-матричні оператори B_1, B_2 вигляду

$$B_1 = \sigma_3\partial + [\sigma_3, \omega],$$
$$B_2 = \partial^2 + 2\sigma_x, \tag{42}$$

де

$$\omega = \begin{pmatrix} d_1 & q \\ r & d_2 \end{pmatrix}.$$

Рівняння

$$iB_{2y} - B_{1t} = [B_1, B_2] \tag{43}$$

є умовою сумісності лінійної системи

$$(i\partial_y - B_1)\Phi = 0,$$
$$(i\partial_t - B_2)\Phi = 0, \tag{44}$$

де Φ — деяка (2×2)-матрична комплекснозначна функція.

Наклавши на систему (44) обмеження вигляду

$$\Phi = \omega, \tag{45}$$

отримаємо систему двох нелінійних рівнянь, що мають вигляд

$$i\Phi_y = \sigma_3\Phi_x + [\sigma_3, \Phi]\Phi,$$
$$\Phi_t = \Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi. \tag{46}$$

***Зауваження* 10.** На відміну від редукцій, розглянутих в попередніх пунктах (див. формули (13), (19), (21), (22)), обмеження (45) пов'язують коефіцієнти операторів (42) з власними функціями лінійних задач (44), які є нелокальними функціоналами від цих коефіцієнтів. В зв'язку з цим співвідношення, аналогічне (45), ми називаємо нелокальними редукціями. Теорія нелокальних редукцій для $(2+1)$-мірних інтегровних моделей, запропонована в роботах [20 – 24], успішно застосовувалась як для побудови нових цікавих інтегровних динамічних систем, так і для узагальнення раніше відомих. Ця теорія природним чином узагальнює деякі моменти відомого підходу Гельфанда – Дикого (дробові степені диференціальних операторів і алгебраїзація схеми Адлера – Костанта – Сімса щодо гамільтонової теорії рівнянь Лакса [19] на нелокальний випадок.

Наступне твердження показує коректність редукції (45).

Твердження 7. *Справедливі такі факти:*

1. *Система нелінійних рівнянь* (46) *сумісна.*

2. *Із сумісності системи* (46), *як і з сумісності системи* (44), *випливають рівняння* (12).

Доведення твердження 7 проводиться прямою перевіркою рівності $\Phi_{yt} = \Phi_{ty}$ і справедливості співвідношень (12) в силу рівнянь (46).

Систему рівнянь (46) можна записати в термінах матриць P і D (див. (3)) у вигляді

$$
\begin{aligned}
iD_y &= \sigma_3 D_x + 2\sigma_3 P^2,\\
iP_y &= \sigma_3 P_x + 2\sigma_3 PD,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t &= D_{xx} + 2D_x D + 2P_x P,\\
P_t &= P_{xx} + 2D_x P + 2P_x D.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Як наслідок, з рівнянь (47), (48) випливає

$$
\begin{aligned}
D_t &= i\sigma_3 D_{xy} + 2D_x D - 2PP_x,\\
P_t &= i\sigma_3 P_{xy} + 2[D_x, P].
\end{aligned}
\tag{49}
$$

З співвідношень (47) та (49) можна знайти системи рівнянь для скалярних компонент матриць P та D, що мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
iq_y &= q_x + 2qd_2,\\
ir_y &= -r_x - 2rd_1,\\
id_{1y} &= d_{1x} + 2qr,\\
id_{2y} &= -d_{2x} - 2qr,
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
q_t &= iq_{xy} + 2(d_{1x} - d_{2x})q,\\
r_t &= -ir_{xy} - 2(d_{1x} - d_{2x})r,\\
d_{1t} &= id_{1xy} + 2d_{1x}d_2 - 2qr_x,\\
d_{2t} &= -id_{2xy} + 2d_{2x}d_2 - 2rq_x.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Твердження 8. *Системи рівнянь* (50), (51) *допускають локальні редукції вигляду*

$$q = \bar{r}, \quad d_1 = \bar{d}_2 \equiv d. \tag{52}$$

Твердження 9. *Системи рівнянь* (50), (51) *допускають більш глибокі (ніж* (52)) *редукції вигляду*

$$q = \bar{r} = d_1 = \bar{d}_2. \tag{53}$$

Доведення тверджень 8, 9 аналогічні доведенню твердження 2.

Після редукцій (52) рівняння (50), (51) набувають вигляду

$$
\begin{aligned}
iq_t &= -q_{xy} - 4q(\operatorname{Im} d_x),\\
id_y &= d_x + 2|q|^2,\\
d_t &= id_{xy} + 2dd_x - 2q\bar{q}_x,\\
iq_y &= q_x + 2q\bar{d}\,.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

***Зауваження* 11.** Неважко пересвідчитись, що перше рівняння системи (46) підстановкою (26) лінеаризується, тобто набуває вигляду

$$iT_y = \sigma_3 T_x . \tag{55}$$

Крім того, нескладно переконатись, що рівняння (55) комутує з довільним рівнянням системи (24), звідки випливає сумісність системи рівнянь вигляду

$$\begin{gathered} i\Phi_{t_1} = \sigma_3\Phi_x + [\sigma_3, \Phi]\Phi, \\ \Phi_{t_n} = \Phi^{(n)} + P_n(\Phi^{(n-1)}, \ldots, \Phi), \end{gathered} \tag{56}$$

де $n > 2$ — довільне натуральне число (див. твердження 4).

Розглянемо знову (2×2)-матричну комплекснозначну функцію T вигляду

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Розписуючи рівняння (26) покомпонентно, отримуємо, що редукції вигляду (52), тобто коли

$$\Phi = \omega = \begin{pmatrix} d & q \\ \overline{q} & \overline{d} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

накладають на матрицю T такі обмеження:

$$\tau_3 = \pm\overline{\tau}_1, \quad \tau_4 = \pm\overline{\tau}_2, \tag{59}$$

причому $\Delta = \det T \neq 0$, якщо $\arg\tau_1 \neq \arg\tau_2$.

Розв'язуючи лінійну систему рівнянь (26) відносно функції Φ за допомогою методу Крамера, знаходимо розв'язки системи (54) вигляду

$$\begin{gathered} q = \pm\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_{1x} & \tau_{2x} \end{vmatrix}, \\ d = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \tau_{1x} & \tau_{2x} \\ \overline{\tau}_1 & \overline{\tau}_2 \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{60}$$

З рівності

$$id_y = d_x + 2|q|^2 \tag{61}$$

отримуємо

$$\begin{gathered} d_{yyx} - \overline{d}_{yyx} = -i(d_{xyx} + \overline{d}_{xyx}) - 4i|q|^2_{xy} = \\ = -\left(d_x + 2|q|^2\right)_{xx} + \left(\overline{d}_x + 2|q|^2\right)_{xx} - 4i|q|^2_{xy} = -(d - \overline{d})_{xxx} - 4i|q|_{xy}, \end{gathered} \tag{62}$$

звідки для функції $s = \operatorname{Im} d_x$ маємо рівняння

$$s_{xx} + s_{yy} + 2|q|^2_{xy} = 0. \tag{63}$$

Таким чином, перше рівняння системи (54) і диференціальний наслідок другого рівняння цієї системи — рівняння (63) — співпадають з моделлю DS-II (35). На цьому доведення теореми 1 завершено.

Для доведення теореми 2 зауважимо, що редукції (53) накладають на матричну функцію T обмеження

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \tau \\ \bar{\tau} & \bar{\tau} \end{pmatrix}, \tag{64}$$

а підстановка (26) набуває вигляду

$$\tau_x = 2q \operatorname{Re} \tau . \tag{65}$$

Система рівнянь (50), (51) після редукції (53) записується таким чином:

$$\begin{aligned} iq_t &= -q_{xy} - 4q(\operatorname{Im} q_x), \\ iq_y &= q_x + 2|q|^2, \end{aligned} \tag{66}$$

причому якщо покласти $s = \operatorname{Im} q_x$, то її диференціальним наслідком є модель DS-II (35).

Підстановка (65) лінеаризує систему рівнянь (66), які при цьому набувають вигляду

$$\begin{aligned} i\tau_y &= \tau_x, \\ \tau_t &= \tau_{xx}. \end{aligned} \tag{67}$$

***Зауваження* 12.** Перше рівняння в системі (67) є умовою антиголоморфності комплекснозначної функції $\tau = \tau(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \tau(x, y) + i \operatorname{Im} \tau(x, y)$, яку можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tau_y &= \operatorname{Im} \tau_x, \\ \operatorname{Im} \tau_y &= -\operatorname{Re} \tau_x, \end{aligned} \tag{68}$$

або у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau(z, \bar{z}) = 0. \tag{69}$$

З підстановки (65) і формул (68) випливає справедливість формули (41). Таким чином, теорема 2 доведена.

***Зауваження* 13.** З обмеженнями (53) сумісна також інша редукція (2×2)-матричної функції T, що має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \tau \\ -\bar{\tau} & -\bar{\tau} \end{pmatrix}. \tag{70}$$

При цьому підстановка (26), яка лінеаризує систему (66), записується таким чином:

$$\tau_x = 2iq \operatorname{Im} \tau . \tag{71}$$

Як підсумок теореми 2 та зауважень 12, 13 одержуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай дійснозначна гармонійна стосовно* x, y *функція* $\varphi = \varphi(x, y; t)$ *є розв'язком рівняння теплопровідності*

$$\varphi_t = \varphi_{xx}. \tag{72}$$

Тоді функція

$$q = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \varphi = \frac{1}{2} \frac{\varphi_x + i\varphi_y}{\varphi}$$

є розв'язком системи DS-II (30). *При цьому справджується рівність*

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{xy}}{\varphi} - \frac{\varphi_x \varphi_y}{\varphi^2}\right). \tag{73}$$

1. *Davey A., Stewartson K.* On three dimensional pachets of surface waves // Proc. Roy. Soc. London A. – 1974. – **338.** – P. 101–110.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
4. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. – М.: Мир, 1985. – 469 с.
5. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
6. *Абловиц М., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
7. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: Спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
8. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 324 с.
9. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 286 с.
10. *Ablowitz M. J., Haberman R.* Nonlinear evolution equations — two and three dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1975. – **35 (18).** – P. 1185–1189.
11. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* The inverse scattering transform for multidimensional 2+1 problems // Nonlinear Phenomena / K. B. Wolf, ed. // Lect. Notes Phys. – Berlin: Springer, 1984. – № 189.
12. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane // J. Math. Phys. – 1984. – **25,** № 8. – P. 2494–2505.
13. *Clarcson P. A., Hood S.* New symmetry reductions and exact solutions of the Davey – Stewartson system. I. Reductions to ordinary differential equations // Ibid. – 1994. – **35,** № 1. – P. 255–283.
14. *Kates R. E., Kaup D. J.* Two-dimensional nonlinear Schrödinger equations and their properties // Physica D. – 1994. – **75.** – P. 458–470.
15. *Shivamoggi B. K., Rollons D. K.* The Painleve formulations and exact solutions of the nonlinear evolution equations for modulated gravity wave trains // J. Math. Phys. – 1994. – **35,** № 9. – P. 4779–4798.
16. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. – Киев: Наук. думка, 1973. – 182 с.
17. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ. – 1982. – **16,** вып. 1. – С. 80–82.
18. *Beals R., Coifman R. R.* The *D*-Bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // Physica D. – 1986. – **18.** – P. 242–249.
19. *Dickey L. A.* Soliton equations and Hamiltonian systems // Adv. Ser. in Math. Phys. – 1991. – **12.** – 310 p..
20. *Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strammp W.* (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – **157.** – P. 17–21.
21. *Sidorenko Yu., Strammp W.* Symmetry constraints of the *KP*-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – **7.** – P. L-37 – L-43.
22. *Sidorenko Yu., Strammp W.* Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev – Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34,** № 4. – P. 1429–1446.
23. *Oevel W., Sidorenko Yu., Strammp W.* Hamiltonian structures of the Melnicov system and its Reductions // Inverse Problems. – 1993. – **9.** – P. 737–747.
24. *Oevel W., Strammp W.* Constrained KP hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Communs. Math. Phys. – 1993. – **157.** – P. 51–81.

Одержано 14.10.97