УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук (Укр. акад. водн. хоз-ва, Ривнэ)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМИ РЕШЕНИЯМИ

We establish the conditions of asymptotic stability of all solutions of equation $\frac{dx}{dt} = A(x)x,\ t \geq 0$ in the Banach space E in the case where $\sigma(A(x)) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ $\forall\, x \in E$. We consider an example of equation with unstable solutions.

Встановлені умови асимптотичної стійкості всіх розв'язків рівняння $\frac{dx}{dt} = A(x)x,\ t \geq 0$, у банаховому просторі E у випадку $\sigma(A(x)) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ $\forall\, x \in E$. Наведено приклад рівняння з нестійкими розв'язками.

Пусть E — бесконечномерное банахово пространство, $L(E)$ — алгебра всех линейных непрерывных операторов, действующих в E, с единицей I.

Известно [1], что решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad t \geq 0,$$

где $A \in L(E)$, асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда для спектра $\sigma(A)$ оператора A справедливо включение

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}.$$

Для нелинейного автономного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

где $A(x)$ — непрерывная и ограниченная на E $L(E)$-значная функция, выполнение соотношения

$$\sigma(A(x)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\} \qquad \forall\, x \in E \tag{2}$$

(в этом случае оператор $A(x)$ будем называть устойчивым) не гарантирует асимптотическую устойчивость всех решений уравнения (1) даже в случае конечномерного E. Уравнение (1) может иметь неустойчивые решения (пример такой системы приводится ниже).

Поэтому интересным является нахождение дополнительных ограничений на $A(x)$, которые вместе с условием (2) обеспечивали бы асимптотическую устойчивость всех решений уравнения (1). В статье показывается, что такими дополнительными ограничениями на $A(x)$ являются условия малого изменения $A(x)$ на отрезках $[x, x + A(x)x] = \{tx + (1-t)(x + A(x)x) : 0 \leq t \leq 1\}$, $x \in E$.

1. Пример уравнения (1) с устойчивым $A(x)$ и бесконечным числом неустойчивых решений. Рассмотрим матричную функцию

$$Q(x_1, x_2) = \begin{cases} P(x_1, x_2), & \text{если } x_1^2 + x_2^2 > 0; \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

где $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ и

$$P(x_1, x_2) = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2)^{-1} \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 & (x_1 + x_2)^2 \\ -(x_1 - x_2)^2 & x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

если $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Легко проверить, что $P^2(x_1, x_2) = 0$, т. е. $P(x_1, x_2)$ — нильпотентная матрица для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Тогда для каждого отображения $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ матрица $\mu(x_1, x_2) P(x_1, x_2)$ также является нильпотентной. Поэтому матрица $-I + \beta(x_1, x_2) Q(x_1, x_2)$ (I — единичная матрица) удовлетворяет соотношению (2) для каждого отображения $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-I + \beta(x_1, x_2) Q(x_1, x_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Найдем $\dfrac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt}$ в силу системы (4). Учитывая (3), получаем

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = 2\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \right) =$$

$$= 2x_1 \left[-x_1 + \beta(x_1, x_2) \left(\frac{(x_1^2 - x_2^2) x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{(x_1 + x_2)^2 x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \right) \right] +$$

$$+ 2x_2 \left[-x_2 + \beta(x_1, x_2) \left(\frac{-(x_1 - x_2)^2 x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{(x_2^2 - x_1^2) x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \right) \right] =$$

$$= (\beta(x_1, x_2) - 2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Итак,

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = (\beta(x_1, x_2) - 2)(x_1^2 + x_2^2). \tag{5}$$

Пусть

$$\beta(x_1, x_2) = \begin{cases} \gamma \sin^2 (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2; \\[2ex] \gamma, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 \geq \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2, \end{cases} \tag{6}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда для $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, для которых $x_1^2 + x_2^2 \geq \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, соотношение (5) принимает вид

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = (\gamma - 2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Отсюда следует, что если $\gamma \geq 2$, то каждое решение $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ системы (4), для которого $x_1^2(0) + x_2^2(0) \geq \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, удовлетворяет соотношению

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = e^{(\gamma - 2)t} (x_1^2(0) + x_2^2(0)) \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tag{7}$$

для всех $t \geq 0$.

Заметим, что для системы (4) нулевое решение является асимптотически устойчивым в силу теоремы об устойчивости по первому приближению [1]. Поэтому на основании (7) множество неустойчивых решений системы (4) непусто, хотя матрица $-I + \beta(x_1, x_2)\, Q(x_1, x_2)$ удовлетворяет соотношению (2).

Свойство неустойчивости согласно (6) имеет каждое решение системы (4), для которого $\gamma \sin^2 (x_1^2(0) + x_2^2(0))^{1/2} = 2$ и $\gamma > 2$ или $x_1^2(0) + x_2^2(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ и $\gamma = 2$. Таких решений бесконечно много.

2. Вспомогательные утверждения. Приведем ряд утверждений, которые потребуются для исследования асимптотической устойчивости решений уравнения (1).

Лемма 1. *Пусть для* $A(x)$ *выполняется соотношение* (2) *и множество* $\{A(x)\colon x \in E\}$ *компактно. Тогда* $\sigma = \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda\colon \lambda \in \bigcup_{x\in E} \sigma(A(x))\right\} < 0$ *и для каждого числа* $\alpha \in (0, -\sigma)$ *найдется число* $M \geq 1$ *такое, что*

$$\| e^{tA(x)} \| \leq M e^{-\alpha t}$$

для всех $t \geq 0$ *и* $x \in E$.

Доказательство. Заметим, что множество $\mathfrak{A}_1 = \bigcup_{x\in E} \sigma(A(x))$ компактно, поскольку аналогичное свойство имеет множество $\mathfrak{A}_2 = \{A(x)\colon x \in E\}$. Поэтому в силу (2)

$$\mathfrak{A}_1 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$$

и, следовательно (на основании компактности $\mathfrak{A}_1$),

$$\sigma = \max\{\operatorname{Re}\lambda\colon \lambda \in \mathfrak{A}_1\} < 0.$$

Рассмотрим произвольное число $\alpha \in (0, -\sigma)$ и спрямляемую простую замкнутую кривую Γ с положительной ориентацией, охватывающую $\mathfrak{A}_1$, для которой

$$\Gamma \subset (\mathbb{C} \setminus \mathfrak{A}_1) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -\alpha\}.$$

Тогда множество $\Gamma \times \mathfrak{A}_2$ компактно и поэтому резольвента $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, как непрерывная на $\Gamma \times \mathfrak{A}_2$ функция двух переменных, ограничена на этом множестве (см., например, [2]). Пусть

$$\gamma = \max_{(\lambda, A)\in\Gamma\times\mathfrak{A}_2} \|R(\lambda, A)\|.$$

Поскольку для каждого $A \in \mathfrak{A}_2$

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda$$

(см. [1]), то для всех $A \in \mathfrak{A}_2$ и $t \geq 0$

$$\| e^{At} \| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma e^{\operatorname{Re}\lambda t} \|R(\lambda, A)\| |d\lambda| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha t} \gamma l = \frac{\gamma l}{2\pi} e^{-\alpha t},$$

где l — длина кривой Γ.

Лемма 1 даказана.

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) = F(x(t)), \qquad t \geq 0, \tag{8}$$

где отображение $F\colon E \to E$ удовлетворяет условиям:

1) для некоторых положительных чисел a и b $\| F(x)\| \leq a\|x\| + b$ для всех $x \in E$;

2) для некоторой монотонной функции $L(r)$, определенной на $(0,+\infty)$, со значениями в $(0,+\infty)$

$$\|F(x)-F(y)\| \leq L(r)\|x-y\|,$$

если $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$. Зафиксируем произвольный вектор $x_0 \in E$ и обозначим через $x(t, x_0)$ решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$x(0, x_0) = x_0.$$

Такое решение существует и является единственным в силу ограничений на F (см. [1]).

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 + \int_0^{[nt]/n} F(y(\tau))d\tau, \qquad t \geq 0, \tag{9}$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $[nt]$ — целая часть числа nt. Легко убедиться в том, что уравнение (9) имеет единственное решение $x_n(t, x_0)$, для которого

$$x_n(t, x_0) = \begin{cases} x_0, & \text{если } t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right); \\ x_n\left(\dfrac{k}{n}, x_0\right), & \text{если } t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right) \text{ и } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{10}$$

и

$$x_n(t, x_0) = x_n\left(t-\frac{1}{n}, x_0\right) + \frac{1}{n}F\left(x_n\left(t-\frac{1}{n}, x_0\right)\right) \tag{11}$$

для всех $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *Для каждого* $x_0 \in E$ *и* $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t, x_0) - x_n(t, x_0)\| = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $T > 0$. Из ограничений на F, очевидного соотношения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t F(x(\tau, x_0))d\tau, \qquad t \geq 0, \tag{12}$$

и неравенства Гронуолла [3, с. 11] следует, что

$$\|x(t, x_0)\| \leq e^{Ta}(\|x_0\| + Tb) \tag{13}$$

для всех $t \in [0, T]$, а из (10) и (11) —

$$\|x_n(t, x_0)\| \leq \left\|x_n\left(t-\frac{1}{n}, x_0\right)\right\| + \frac{1}{n}\left(a\left\|x_n\left(t-\frac{1}{n}, x_0\right)\right\| + b\right) =$$

$$= \left(1+\frac{a}{n}\right)\left\|x_n\left(t-\frac{1}{n}, x_0\right)\right\| + \frac{b}{n}$$

для всех $t \geq \dfrac{1}{n}$ и $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\|x_n(t, x_0)\| \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{[nt]}\left(\|x_0\| + \frac{1}{n}[nt]b\right) \leq$$

$$\leq e^{a[nt]/n}(\|x_0\| + tb) \leq e^{Ta}(\|x_0\| + Tb) \tag{14}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, T]$ (здесь учтено то, что $[nt]/n \leq t$ для всех $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$).

Поскольку

$$x_n(t, x_0) = x_0 + \int_0^{[nt]/n} F(x_n(\tau, x_0))d\tau \tag{15}$$

для всех $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, найдется число $M > 0$ такое, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| F(x(t, x_0)) \| \leq M$$

(на основании непрерывности $F(x(t, x_0))$ на $[0, T]$), и

$$0 \leq t - \frac{1}{n}[nt] < \frac{1}{n}$$

для всех $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то для функции

$$z_n(t) = \| x(t, x_0) - x_n(t, x_0) \|$$

в силу ограничений на F и соотношений (12)–(15) выполняются соотношения

$$z_n(t) \leq \int_0^{[nt]/n} \|F(x(\tau, x_0)) - F(x_n(\tau, x_0))\| d\tau + \int_{[nt]/n}^{t} \|F(x(\tau, x_0))\| d\tau \leq$$

$$\leq L(r) \int_0^{[nt]/n} z_n(\tau)d\tau + \frac{M}{n} \leq L(r) \int_0^t z_n(\tau)d\tau + \frac{M}{n}$$

для всех $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, где $r = e^{Ta}(\| x_0 \| + Tb)$. Отсюда получаем

$$z_n(t) \leq \frac{M}{n} e^{L(r)t} \leq \frac{M}{n} e^{L(r)T}$$

для всех $t \in [0, T]$ и $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} z_n(t) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Далее будем предполагать, что для уравнения (1) выполняется соотношение

$$\| A(x) - A(y) \| \leq L(r) \| x - y \| \quad (\| x \| \leq r, \quad \| y \| \leq r) \tag{16}$$

для произвольного $r > 0$, где $L(r)$ — определенная на $(0, +\infty)$ со значениями в $(0, +\infty)$ монотонная функция. Это соотношение и ограниченность $A(x)$ на E гарантируют для каждого $x_0 \in E$ существование и единственность решения $x(t, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $x(0, x_0) = x_0$, поскольку для отображения $G\colon E \to E$, определенного равенством

$$G(x) = A(x)x, \qquad x \in E,$$

выполняются требования, что и для рассмотренного выше отображения F.

Для решений уравнения (1) справедливо следующее основное вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $a = \sup_{x \in E} \| A(x) \|$ *и*

$$\|A(x + hA(x)x) - A(x)\| \le h\varepsilon \tag{17}$$

для всех $x \in E$, $h \in (0, 1]$ *и некоторого числа* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\|x(t, x_0)\| \le \|e^{tA(x_0)} x_0\| + e^{ta}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1)\|x_0\| \tag{18}$$

для всех $x_0 \in E$ *и* $t \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 + \int_0^{[nt]/n} A(y(\tau))y(\tau)d\tau, \qquad t \ge 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Решение $x_n(t, x_0)$ этого уравнения на основании леммы 2 удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(t, x_0) - x(t, x_0)\| = 0. \tag{19}$$

Также $x_n(t, x_0)$ удовлетворяет соотношению, аналогичному (11):

$$x_n(t, x_0) = \left(I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{1}{n}, x_0\right)\right)\right) x_n\left(t - \frac{1}{n}, x_0\right), \qquad t \ge 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Учитывая (20) и (10), приходим к выводу, что

$$x_n(t, x_0) = \left(I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{1}{n}, x_0\right)\right)\right)\left(I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{2}{n}, x_0\right)\right)\right) \ldots$$

$$\ldots \left(I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{1}{n}[nt], x_0\right)\right)\right) x_0.$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, [nt]\}$

$$I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{k}{n}, x_0\right)\right) = I + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{1}{n}[nt], x_0\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{l=k}^{[nt]-1}\left(A\left(x_n\left(t - \frac{l}{n}, x_0\right)\right) - A\left(x_n\left(t - \frac{l+1}{n}, x_0\right)\right)\right) =$$

$$= I + \frac{1}{n} A(x_0) + P_n(t, k, x_0), \tag{21}$$

где

$$P_n(t, k, x_0) = \frac{1}{n}\sum_{l=k}^{[nt]-1}\left(A\left(x_n\left(t - \frac{l}{n}, x_0\right)\right) - A\left(x_n\left(t - \frac{l+1}{n}, x_0\right)\right)\right).$$

Поскольку согласно (20)

$$x_n\left(t - \frac{l}{n}, x_0\right) =$$

$$= x_n\left(t - \frac{l+1}{n}, x_0\right) + \frac{1}{n} A\left(x_n\left(t - \frac{l+1}{n}, x_0\right)\right) x_n\left(t - \frac{l+1}{n}, x_0\right),$$

$$l \in \{k, k+1, \ldots, [nt]-1\},$$

то на основании (17)

$$\|P_n(t, k, x_0)\| \le \frac{1}{n}\sum_{l=k}^{[nt]-1} \frac{1}{n}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k) \tag{22}$$

для всех $t \geq 0$, $x_0 \in E$ и $k \in \{1, 2, \ldots, [nt]\}$. Учитывая (21), можно записать

$$x_n(t, x_0) = \left(I + \frac{1}{n}A(x_0) + P_n(t, 1, x_0)\right)\left(I + \frac{1}{n}A(x_0) + P_n(t, 2, x_0)\right) \ldots$$

$$\ldots \left(I + \frac{1}{n}A(x_0) + P_n(t, [nt], x_0)\right) x_0 =$$

$$= \left(I + \frac{1}{n}A(x_0)\right)^{[nt]} x_0 + Q_n, \tag{23}$$

где

$$Q_n = x_n(t, x_0) - \left(I + \frac{1}{n}A(x_0)\right)^{[nt]} x_0.$$

Из (22) и (23) вытекает, что для $\|Q_n\|$ верна оценка

$$\|Q_n\| \leq \gamma_n \|x_0\|,$$

где

$$\gamma_n = \left(\prod_{k=1}^{[nt]-1}\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k)\right)\right) - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{[nt]}.$$

Найдем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \gamma_n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}[nt] = t$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{[nt]} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^{[nt]/n} = e^{at},$$

а так как

$$\ln \prod_{k=1}^{[nt]-1}\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k)\right) \in (\alpha_n, \beta_n),$$

где

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{[nt]-1}\left(\frac{a}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k)\right),$$

$$\alpha_n = \beta_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{[nt]-1}\left(\frac{a}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k)\right)^2,$$

и, очевидно,

$$\beta_n = \frac{a}{n}([nt] - 1) + \frac{\varepsilon}{n^2}\frac{[nt]([nt] - 1)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = at + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[nt]-1}\left(\frac{a}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}([nt] - k)\right)^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = e^{at+\varepsilon t^2/2} - e^{at} = e^{at}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1).$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|Q_n\| \le e^{at}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1)\|x_0\|. \tag{24}$$

А поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}A(x_0)\right)^{[nt]} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(I + \frac{1}{n}A(x_0)\right)^{n}\right)^{[nt]/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(I + \frac{1}{n}A(x_0)\right)^{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}[nt]/n} = e^{tA(x_0)},$$

то отсюда с учетом соотношений (23), (24) и (19) следует соотношение (18).

Лемма 3 доказана.

Приведем еще одно утверждение.

Лемма 4. *Пусть* M, a, α — *произвольные положительные числа, причем* $M \ge 1$, *и* Ω — *множество пар* (ε, t) *чисел* $\varepsilon > 0$ *и* $t > 0$, *которые удовлетворяют соотношению*

$$Me^{-\alpha t} + e^{ta}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1) < 1. \tag{25}$$

Тогда

$$\sup_{(\varepsilon,t)\in\Omega} \varepsilon = \sup_{t>\ln M/\alpha} \frac{2}{t^2}\ln\left(1 + e^{-at}(1 - Me^{-\alpha t})\right) > 0.$$

Доказательство. На множестве Ω неравенство (25) равносильно неравенству

$$\varepsilon < \frac{2}{t^2}\ln\left(1 + e^{-at}(1 - Me^{-\alpha t})\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости всех решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть*:

1) *выполняется соотношение* (16);
2) *найдутся числа* $M \ge 1$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\|e^{tA(x_0)}\| \le Me^{-\alpha t}$$

для всех $t \ge 0$ *и* $x_0 \in E$;

3) $\|A(x + hA(x)x) - A(x)\| \le h\varepsilon$ *для всех* $x \in E$ *и* $h \in (0, 1]$, *где* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$,

$$\varepsilon^* = \sup_{t>\ln M/\alpha} \frac{2}{t^2}\ln\left(1 + e^{-at}(1 - Me^{-\alpha t})\right).$$

Тогда каждое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольный вектор пространства E и $x(t, x_0)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $x(t, x_0) = x_0$. Тогда согласно лемме 3

$$\|x(t, x_0)\| \le \|e^{tA(x_0)}x_0\| + e^{ta}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1)\|x_0\|, \quad t \ge 0,$$

а согласно второму условию теоремы

$$\| x(t, x_0) \| \le \left(Me^{-\alpha t} + e^{ta}(e^{\varepsilon t^2/2} - 1) \right) \| x_0 \|, \qquad t \ge 0.$$

Из третьего условия теоремы и леммы 4 вытекает

$$q = Me^{-\alpha\tau} + e^{\tau a}(e^{\varepsilon\tau^2/2} - 1) < 1$$

для некоторого числа $\tau > 0$. Поэтому

$$\| x(t, x_0) \| < q \| x_0 \|,$$

$$\| x(n\tau, x_0) \| \le q^n \| x_0 \|, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \| x(n\tau, x_0) \| = 0. \tag{26}$$

Заметим, что на основании теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению (см. [1]) и последнего соотношения нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Пусть δ — произвольное положительное число. В силу автономности уравнения (1) и асимптотической устойчивости нулевого решения этого уравнения найдется число $\mu > 0$ такое, что если $\| x(s, x_0) \| < \mu$ для некоторого $s \ge 0$, то $\| x(t, x_0) \| < \delta$ для всех $t \ge s$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} \| x(t, x_0) \| = 0$. Пусть $\| x(\tau n_0, x_0) \| < \mu$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ (это возможно в силу (26)). В силу непрерывной зависимости решения $x(t, x_0)$ от x_0 на отрезке $[0, \tau n_0]$ найдется число $\mu_1 > 0$ такое, что если $y_0 \in E$, $\| y_0 - x_0 \| < \mu_1$, то $\| x(t, x_0) - x(t, y_0) \| < \delta$ для всех $t \in [0, \tau n_0]$ и $\| x(\tau n_0, y_0) \| < \delta$.

Итак, для каждого числа $\delta > 0$ найдется такое число $\mu_1 > 0$, что если $\| x_0 - y_0 \| < \mu_1$, то $\| x(t, x_0) - x(t, y_0) \| < \delta$ для всех $t \ge 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \| x(t, x_0) - x(t, y_0) \| = 0$, т. е. в силу произвольности $\delta > 0$ решение $x(t, x_0)$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть*:

1) *для* $A(x)$ *выполняется соотношение* (2) *и множество* $\{A(x) \colon x \in E\}$ *компактно*;

2) *выполняется соотношение* (16) *и* $\sup\limits_{x \in E} \| A(x) \| < \infty$;

3) $\| A(x + hA(x)x) - A(x) \| \le h\varepsilon$ *для всех* $x \in E$ *и* $h \in (0, 1]$ $(\varepsilon \in (0, +\infty))$.

Тогда найдется число $\delta > 0$ *такое, что если* $\varepsilon < \delta$, *то каждое решение уравнения* (1) *будет асимптотически устойчивым.*

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и леммы 1.

4. Достаточные условия выполнения соотношения (17). В теоремах 1, 2 и лемме 3 интервал $(0, 1]$ можно заменить на интервал $(0, h_0]$, где $h_0 \in (0, 1)$. Если $h_0 \le q/a$, $q \in (0, 1)$, $a = \sup\limits_{x \in E} \| A(x) \| \ge 1$, то в случае C^1-отображения $A(\cdot) \colon E \to L(E)$ в этих утверждениях проверка выполнения соотношения (17) может быть заменена проверкой выполнения более простого соотношения

$$\| A'(x) \| \le \frac{(1 - q)\varepsilon}{a(\| x \| + 1)}, \qquad x \in E, \tag{27}$$

где $A'(x)$ — производная Фреше $A(x)$ в точке x (в этих соотношениях число ε одно и то же).

Действительно, в силу неравенства, заменяющего в общем случае формулу конечных приращений [4, с. 639], для произвольных $y \in E$ и $h \in (0, q/a]$

$$\|A(y + hA(y)y) - A(y)\| \le \sup_{x \in [y, y + hA(y)y]} \|A'(x)\| \, h \, \|A(y)y\| \le$$

$$\le ha \sup_{x \in [y, y + hA(y)y]} \|A'(x)\| \, \|y\|.$$

А так как $x \in [y, y + hA(y)y] \subset \bigcup_{\|z\| \le 1} [y, y + qz] = M$, то

$$(1 - q)\|y\| \le \|x\| \le (1 + q)\|y\|$$

и поэтому на основании соотношения (27)

$$ha \sup_{x \in [y, y + hA(y)y]} \|A'(x)\| \, \|y\| \le ha \sup_{x \in M} \frac{(1-q)\varepsilon}{a(\|x\| + 1)} \|y\| \le$$

$$\le \frac{h\varepsilon(1-q)\|y\|}{(1-q)\|y\| + 1} < h\varepsilon.$$

Итак, если для $A(x)$ выполняется соотношение (27), то также выполняется соотношение

$$\|A(x + hA(x)x) - A(x)\| < h\varepsilon$$

для всех $x \in E$ и $h \in (0, q/a]$.

Замечание. Другие методы исследования глобальной устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений можно найти в [5] (в случае $E = R^n$).

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
3. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. *Вербицкий В. И., Горбань А. Н.* Об одном подходе к анализу устойчивости нелинейных систем // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 5. – С. 900–903.

Получено 13.02.96