УДК 517. 5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ $\bar{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ (НЕБОЛЬШАЯ ГЛАДКОСТЬ). I

The rate of convergence of the Fourier series is investigated on the classes $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ in uniform and integral metrics. The results obtained are extended to the case where the classes $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ are classes of convolutions of functions from $\mathfrak{N}$ with kernels whose coefficients are slowly decreasing. In particular, asymptotic equalities are obtained for the upper bounds of deviations of the Fourier sums on sets $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ which are solutions of the Kolmogorov – Nikol'skii problem. In addition, an analog of the well-known Lebesgue inequality is found.

Вивчається швидкість збіжності рядів Фур'є на класах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ в рівномірній та інтегральній метриках. Результати роботи поширюються на випадок, коли класи $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ є класами згорток функцій із $\mathfrak{N}$ з ядрами, коефіцієнти яких є повільно спадними. В цьому напрямі, зокрема, одержані асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень сум Фур'є на множинах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$, які є розв'язками задачі Колмогорова – Нікольського, а також знайдено аналог відомої нерівності Лебега.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть L — пространство 2π-периодических интегрируемых по Лебегу функций,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f \in L$, $S_n(f; x)$ — частная сумма порядка n этого ряда и $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$.

В работе исследуется поведение величин $\rho_n(f; \cdot)$ при $n \to \infty$ на множествах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ функций из L, которые определяются следующим образом (см. [1], §1).

Определение 1. *Пусть* $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *— пара произвольных систем чисел* $\psi_1(k)$ *и* $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$. *Отправляясь от ряда Фурье функции* $\varphi \in L$, *рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k) A_k(\varphi; x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(\varphi; x), \tag{2}$$

$$\tilde{A}_k(\varphi; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (2) *для данной функции* $\varphi(\cdot)$ *и пары* $\bar{\psi}$ *является рядом Фурье некоторой функции* $f \in L$, *то* f *назовем интегралом функции* φ, *порожденным парой* $\bar{\psi}$, *или просто* $\bar{\psi}$*-интегралом функции* φ, *и условимся писать* $f(\cdot) = I^{\bar{\psi}}(\varphi; \cdot)$.

Множество $\bar{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\bar{\psi}}$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\bar{\psi}$-интегралов функций из $\mathfrak{N}$.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

C — подмножество непрерывных функций из L с равномерной нормой $\|\cdot\|_C = \max|\cdot|$; $C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N} \cap C$; M — подмножество функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_M$, где $\|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup}|\varphi|$; H_ω — класс функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)-f(x')| \leq \omega(|x-x'|), \tag{3}$$

где $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\omega(0)=0$ и $\omega(t_1+t_2) \leq \omega(t_1)+\omega(t_2)$ $\forall\, t_1, t_2 \in (0,\infty)$; $\mathfrak{N}^0$ — подмножество функций $f \in \mathfrak{N}$, ортогональных константе:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0, \tag{4}$$

$\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности последовательностей:

$$\mathfrak{M} = \{\lambda_k = \lambda(k) : \Delta^2\lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots,\ \lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0\}; \tag{5}$$

$\mathfrak{M}'$ — подмножество последовательностей λ_k из $\mathfrak{M}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k/k < \infty. \tag{6}$$

Последовательности $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$, входящие в определение множеств $L^{\overline{\psi}}$, в этой работе выбираются так, что $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'$.

В этом случае, как хорошо известно, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k)\cos kx,\ \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k)\sin kx \tag{7}$$

являются рядами Фурье и, как легко проверить, для каждой $\varphi \in L$ ее $\overline{\psi}$-интеграл существует и почти всюду

$$I^{\overline{\psi}}(\varphi; x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)dt = \frac{a_0}{2} + (\varphi * \Psi)(x), \tag{8}$$

где

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt). \tag{9}$$

Таким образом, элементы множества $L^{\overline{\psi}}$ — это функции, представимые свертками функций $\varphi \in L$ с ядрами (9).

Системы чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k \in \mathcal{N}$, удобно рассматривать как сужения на множестве $\mathcal{N}$ непрерывных функций $\psi_1(v)$ и $\psi_2(v)$ непрерывного аргумента v. Чтобы не вводить новых обозначений, в дальнейшем через $\mathfrak{M}$ обозначаем также множество функций $\psi(\cdot)$, для которых функции $|\psi(v)|$ являются выпуклыми при всех $v \geq 1$ и

$$\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0; \tag{10}$$

через $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, подчиненных еще условию

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t} dt < \infty. \tag{11}$$

Ясно, что если $\psi \in \mathfrak{M}'$, то значения $|\psi(k)|$ удовлетворяют соотношению (6).

Заметим, что в силу выпуклости и условия (10) функции $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$ всегда сохраняют свой знак.

Несимметричность условий для функций $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ объясняется тем, что, как хорошо известно, условие $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы второй ряд в (7) был рядом Фурье, в то время как первый из этих рядов есть ряд Фурье при любом $\psi_1 \in \mathfrak{M}$.

Функцию $\varphi(\cdot)$ в равенстве (8) иногда удобно называть $\overline{\psi}$-производной функции $f(\cdot) = I^{\overline{\psi}}(\varphi; \cdot)$. При этом используются обозначения $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f; \cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

В общем случае понятие $\overline{\psi}$-производной вводится следующим образом (см. [1], §1).

Определение 2. *Пусть $f \in L$, (1) — ее ряд Фурье и пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \qquad k \in \mathcal{N}. \tag{12}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\psi}^2(k)} \left(\psi_1(k) A_k(f;x) - \psi_2(k) \tilde{A}_k(f;x) \right) \tag{13}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то φ назовем $\overline{\psi}$-производной функции f и будем писать $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f; x) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in L$, которые имеют $\overline{\psi}$-производные, обозначим через $\overline{L}^{\overline{\psi}}$. Если $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ и при этом $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} \subset L$, то полагаем $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

В [1](§1) показано, что для любых пар $\overline{\psi}$, удовлетворяющих условию (12), справедливо равенство

$$\overline{L}^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} L^0. \tag{14}$$

Таким образом, если выполнено (12), то множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L^0$ совпадает с множеством функций, имеющих $\overline{\psi}$-производные, и состоит из $\overline{\psi}$-интегралов от их $\overline{\psi}$-производных.

Условие (12) заведомо выполняется, если $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$. Поэтому в рассматриваемом случае в силу (14) и (8) для каждой функции $f \in L^{\overline{\psi}}$ почти всюду справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t) \Psi(t)\, dt = \frac{a_0}{2} + \left(f^{\overline{\psi}} * \Psi \right)(x), \tag{15}$$

в котором a_0 — свободный член разложения Фурье функции $f(\cdot)$.

Понятие $\overline{\psi}$-производной совпадает с понятием $(\psi, \overline{\beta})$-производной, введенной автором в [2, с. 33] в том смысле, что любая $\overline{\psi}$-производная совпадает с $(\psi, \overline{\beta})$-производной, если определяющие их параметры связаны соотношением

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

или, что то же самое,

$$\psi(k) = \overline{\psi}(k), \qquad \cos \beta_k \frac{\pi}{2} = \psi_1(x)/\overline{\psi}(k), \qquad \sin \beta_k \frac{\pi}{2} = \psi_2(x)/\overline{\psi}(k). \tag{16$'$}$$

При этом выполняются равенства

$$L^{\overline{\psi}} = L^{\psi}_{\beta}, \qquad L^{\overline{\psi}}\,\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\,\mathfrak{N} \quad \forall\ \mathfrak{N} \in L^0. \tag{17}$$

Заметим также, что в силу (16) любая (ψ,β)-производная $(\beta_k \equiv \beta)$ является и $\overline{\psi}$-производной, если

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\,\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\,\frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

В частности, известная r-я $(r > 0)$ производная $f_r^r(\cdot)$ в смысле Вейля функции $f(\cdot)$ является (ψ,β)-производной при $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$. Следовательно, согласно (16′) $f_r^r(\cdot)$ будет совпадать с $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, если положить

$$\psi_1(k) = k^{-r}\cos r\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = k^{-r}\sin r\frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

В настоящей работе устанавливаются асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}) = \sup\left\{|\rho_n(f;x)|:\ f \in C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}\right\} \tag{20}$$

в случае, когда $\mathfrak{N}$ есть либо единичный шар S_M в пространстве M, $S_M = \{\varphi: \|\varphi\|_M \le 1\}$, либо класс H_ω, а также находятся оценки величин $|\rho_n(f;x)|$ для каждой индивидуальной функции $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$, выраженные через наилучшие приближения ее $\overline{\psi}$-производной. Эти оценки точные как по порядку, так и в смысле констант при главных членах их представлений. Для формулировки основных результатов необходимо еще одно определение.

Определение 3. *Для каждой функции* $\psi \in \mathfrak{M}$ определим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right) \quad \text{и} \quad \mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \ge 1.$$

Тогда через $\mathfrak{M}_0$ *обозначается подмножество функций* $\psi(\cdot)$ *из* $\mathfrak{M}$, *у которых величина* $\mu(t)$ *является ограниченной при всех* $t \ge 1$, *т. е.*

$$\mathfrak{M}_0 = \{\ \psi \in \mathfrak{M}:\ 0 < \mu(\psi;t) \le K\ \}, \tag{21}$$

где K *— некоторая постоянная (которая, возможно, зависит от* ψ*).*

В [2, с. 95] показано, что если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то при произвольном $t \ge 1$

$$t\,|\psi'(t)| \le K\,|\psi(t)|. \tag{22}$$

Записывая это неравенство в виде $\psi'(t)/\psi(t) \le Kt^{-1}$ и интегрируя последнее соотношение по промежутку $[t_0, t]$, $t_0, t \ge 1$, приходим к выводу, что существуют такие положительные числа K и α, что при всех $t \ge 1$

$$|\psi(t)| \ge Kt^{-\alpha}. \tag{23}$$

Это означает, что функции $\psi \in \mathfrak{M}_0$ не могут стремиться к нулю быстрее некоторой отрицательной степени t. Множеству $\mathfrak{M}_0$ принадлежат функции t^{-r} при любом $r > 0$ и все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые стремятся к нулю медленнее, чем t^{-r}, как, например, функции $t^{-r}\ln^{\alpha}(t+e)$, $r, \alpha > 0$, $\ln^{-\alpha}(t+e)$, $\alpha > 0$ и др. В то же время функция $\exp(-\alpha t^r)$ не принадлежит $\mathfrak{M}_0$ ни при каких α, $r > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0$. *Тогда величина*

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}}_\infty) = \sup\left\{\left|f(x) - S_{n-1}(f;x)\right|:\ f \in C^{\overline{\psi}}_\infty\right\}, \quad C^{\overline{\psi}}_\infty = C^{\psi}_\infty S^0_M \tag{24}$$

не зависит от значения x и при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n), \tag{25}$$

в котором $\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}$, *а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

Во многих случаях утверждение этой теоремы является известным. Отметим некоторые из наиболее важных таких случаев. Положим

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M},\ 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 < \infty,\ t \ge 1\}, \tag{26}$$

где K_1 и K_2 — постоянные, которые могут зависеть от функции ψ.

Ясно, что $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$. Если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то, как показано в [2, с. 95], найдутся положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что

$$K_1 t|\psi'(t)| \le |\psi(t)| \le K_2 t|\psi'(t)|. \tag{27}$$

Поэтому, если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt \le K_2\left|\int_n^\infty \psi_2'(t)\,dt\right| = K_2|\psi_2(n)| \tag{28}$$

и, следовательно, если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, то равенство (25) принимает вид

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) = \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\overline{\psi}(n). \tag{25$'$}$$

Пусть теперь функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ выбраны согласно равенствам (18) при условиях, что $\psi \in \mathfrak{M}_C$, а β — произвольное положительное число. Тогда $C_\infty^{\overline{\psi}} = C_{\beta,\infty}^{\psi} = L_\beta^\psi S_M \cap C$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$. Поэтому согласно (25′) из теоремы 1 следует

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^{\psi}) = \frac{4}{\pi^2}|\psi(n)|\ln n + O(1)|\psi(n)|,\ \psi \in \mathfrak{M},\ \beta \in R^1. \tag{29}$$

Это равенство впервые получено автором (см., например, [2, с. 121]).

Если $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, $r > 0$, то в этом случае $\psi \in \mathfrak{M}_C$, и множество $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ совпадает с известным классом W^r функций $f(\cdot)$, r-е производные которых в смысле Вейля почти всюду ограничены единицей. Поэтому согласно (29)

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \frac{4\ln n}{\pi^2 n^r} + O(1)n^{-r}, \quad r > 0. \tag{30}$$

Если $r \in \mathcal{N}$, то (30) — известное равенство А.Н. Колмогорова [3], положившее начало целому направлению в теории рядов Фурье и в теории приближения функций, связанному с получением асимптотических равенств для верхних граней уклонений приближающих агрегатов на заданных классах функций. (Более подробно о величинах $\mathcal{E}_n(C_\beta^\psi, \infty)$ и, в частности, о величинах $\mathcal{E}_n(W^r)$ см., например, [2, с. 262; 4, с. 151].) Здесь же еще отметим, что равенство (25) доказано А.С. Теляковским [5] в случае, когда выполнены соотношения (18) при условии, что $\psi \in \mathfrak{M}_0'$, и автором [2, с. 135] для каждого $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ при условии, что $\psi_2(k) \equiv 0$.

Аналогом теоремы 1 для классов $C^{\overline{\psi}}H_\omega^0$ является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. *Тогда величина*

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\Psi}} H^0_\omega) = \sup\left\{\left|f(x) - S_{n-1}(f;x)\right| : f \in C^{\overline{\Psi}} H^0_\omega\right\} \tag{31}$$

не зависит от значения x *и при* $n \to \infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\Psi}} H^0_\omega) = \theta_\omega \left(\frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vt\, dv\, dt \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2} \overline{\Psi}(n) \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt \right) + O(1)\, \overline{\Psi}(n)\, \omega(1/n), \tag{32}$$

в котором $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности и* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Утверждение этой теоремы известно в ряде важных случаев. В ч. II будет показано (см. доказательство соотношения (102)), что для каждого $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \int_1^\infty \psi_2(nv) \sin vt\, dv\, dt \right| = O(1)\, \omega(1/n) \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt. \tag{33}$$

Поэтому если $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, а $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то вследствие соотношений (28) и (33) из (32) получаем

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\Psi}} H^0_\omega) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} \overline{\Psi}(n) \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + O(1)\, \overline{\Psi}(n)\, \omega(1/n). \tag{32$'$}$$

Это равенство для любой $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ при условии, что $\psi_2(k) \equiv 0$, получено в [2, с. 135].

Если функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ выбраны по формулам (18) при условиях, что $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, то $C^{\overline{\Psi}} H^0_\omega = C^\psi_\beta H^0_\omega$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_C$. Следовательно, из теоремы 2 в силу равенства (32′) имеем

$$\mathscr{E}_n(C^\psi_\beta H^0_\omega) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2} |\psi(n)| \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + O(1)\, |\psi(n)|\, \omega(1/n). \tag{32$''$}$$

Это равенство доказано автором (см., например, [6, с. 135] или [2, с. 117]). В случае, когда $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, $r > 0$, равенство (32″) было получено С.М. Никольским [7], а для любых $\beta \in R$ — А.В. Ефимовым [8].

Наконец, в настоящей работе доказывается утверждение, которое нам представляется аналогом для классов $C^{\overline{\Psi}} C^0$ известного неравенства Лебега:

$$\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)\right) E_n(f) \qquad \forall\, f \in C, \tag{34}$$

где

$$E_n(f) = \inf\left\{ \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C : t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1} \right\}, \tag{35}$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ — множество тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Теорема 3. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. *Тогда для каждой функции* $f \in C^{\overline{\Psi}} C^0$ *при любом* $n \in \mathcal{N}$

$$\|f(x)-S_{n-1}(f;x)\|_C \le \left(\frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n)\right) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right) =$$

$$= \left(\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}}) + O(1)\,\overline{\psi}(n)\right) E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right), \tag{36}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathcal{N}$ *и по* $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$.

Для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$ *при каждом* $n \in \mathcal{N}$ *в пространстве* $C^{\overline{\psi}} C^0$ *найдется функция* $F(x) = F(f; n; x)$ *такая, что* $E_n\left(F^{\overline{\psi}}\right) = E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)$, *и для нее соотношение (36) превращается в равенство.*

Вторая часть теоремы 3 показывает, в частности, что неравенство (36) асимптотически точное на всем пространстве $C^{\overline{\psi}} C^0$. Это неравенство асимптотически точное и на некоторых важных подмножествах из $C^{\overline{\psi}} C^0$. В самом деле, учитывая, что для каждого $\varphi \in C^0$ справедлива оценка $E_n(\varphi) \le 1$ и рассматривая верхние грани обеих частей (36) по классу $C^{\overline{\psi}} C^0$, для каждого $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ имеем

$$\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}} C^0) \le \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\,\overline{\psi}(n). \tag{37}$$

Но, согласно (25), в этом соотношении строгого неравенства быть не может. Следовательно, (37) на самом деле есть равенство и, стало быть, неравенство (36) асимптотически точное на классе $C^{\overline{\psi}} C^0$. В то же время на классе $C^{\overline{\psi}} H_\omega^0$ неравенство (36) может быть и строгим. В этом случае если $\omega(t)$ — выпуклая функция, то (см., например, [9, с. 208])

$$\sup_{\varphi \in H_\omega^0} E_n(\varphi) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{38}$$

Если применить это равенство к правой части (36), получим величину, отличающуюся в общем случае от значения $\mathcal{E}_n(C^{\overline{\psi}} H_\omega^0)$, доставляемого формулой (32).

Обратим внимание на то, что в равенстве (25) (а также и в равенствах (32) и (36)) главным членом правой части может быть первое слагаемое. Например, функция $\psi_\alpha(t) = \left(\ln t \ln^\alpha(\ln t)\right)^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{M}'_0$ при любом $\alpha > 1$ и для нее [10, с. 408]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\psi_\alpha(n)\ln n \Big/ \int\limits_n^\infty \frac{\psi_\alpha(t)}{t}dt\right) = 0. \tag{39}$$

Более того, как показано в [11], в таких случаях величины $\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}})$ будут асимптотически равны точным верхним граням наилучших равномерных приближений тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ на классе $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

В связи с теоремой 3 обратим внимание еще на одно обстоятельство. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$, $n \in \mathcal{N}$, — произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность неотрицательных чисел. Тогда при каждом натуральном n через $C_n(\varepsilon)$ обозначим множество непрерывных функций $\varphi(\cdot)$, для которых при данном n выполняется неравенство $E_n(\varphi) \le \mathcal{E}_n$, через $C^{\overline{\psi}} C_n^0(\varepsilon)$ — множество непрерывных функций, $\overline{\psi}$-производные которых принадлежат $C_n^0(\varepsilon) = C_n(\varepsilon) \cap C^0$. Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3′. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$. *Тогда для любого класса* $C^{\overline{\psi}} C_n^0(\varepsilon)$ *при любом* $n \in \mathcal{N}$

$$\mathscr{E}_n\left(C^{\overline{\psi}} C_n^0(\varepsilon)\right) = \left(\frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + O(1)\right)\mathscr{E}_n, \tag{40}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Действительно, если $f \in C^{\overline{\psi}} C_n^0(\varepsilon)$, то $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ непрерывна и $E_n(f^{\overline{\psi}}) \le \mathscr{E}_n$. Поэтому в силу (36) величина $\|\rho_n(f; x)\|_C$ не превышает правой части (40). В то же время для функции $F(x)$ из теоремы 3, построенной по функции $\varphi \in C_n^0(\varepsilon)$ такой, что $E_n(\varphi) = \mathscr{E}_n$, значение $\|\rho_n(F; x)\|_C$ будет совпадать с правой частью (40), что и доказывает теорему 3′.

Отметим еще, что теоремы 3 и 3′ для классов $C_\beta^\psi C^0$ при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\beta \in R$, а также для классов $C_0^\psi C^0$ при любом $\psi \in \mathfrak{M}_0$ доказаны автором ранее в [10].

2. Вспомогательные утверждения. Отправной точкой при доказательстве теорем $1-3'$, а также приведенных ниже теорем 4 и 5 будет следующее утверждение, установленное в [1, с. 27].

Лемма 1. *Если* $f \in C^{\overline{\psi}} M$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ *и* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *то в каждой точке* $x \in R$ *выполняется равенство*

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta(x,t)\left(I_2(\psi_1;n;t)_0 + I_2(\psi_2;n;t)_1\right)dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Delta(x,t)\left(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt\right)dt, \tag{41}$$

в котором $\Delta(x,t)$ *есть либо* $f^\psi(x-t)$, *либо* $f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)$, *либо* $f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)$, где $t_{n-1}(\cdot)$ — *любой полином из* $\mathcal{T}_{n-1}$, *и*

$$I_2(\psi_1;n;t)_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi_1(v)\cos vt\,dv, \tag{42}$$

$$I_2(\psi_2;n;t)_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi_2(v)\sin vt\,dv. \tag{42′}$$

Если же $f \in L^{\overline{\psi}}$ *и, по-прежнему,* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, *а* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *то равенство* (41) *выполняется почти всюду.*

Задача состоит в том, чтобы упростить правые части в (41), не потеряв при этом их главных значений. Промежуточный результат в этом направлении содержится в следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и a — *произвольное положительное число. Тогда*:

если $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$, *то для произвольного* $n \in \mathcal{N}$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{|t|\le a/n} f^{\overline{\psi}}(x-t)\,I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{a/n\le|t|\le\pi/2} f^{\overline{\psi}}(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt + O(1)\overline{\psi}(n); \tag{43}$$

если $f\in C^{\overline{\psi}}H^0_\omega$, *то для произвольного* $n\in\mathcal{N}$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = \int\limits_{|t|\le a/n}\left(f^{\overline{\psi}}(x-t)-f^{\overline{\psi}}(a)\right)I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{a/n\le|t|\le\pi/2}\left(f^{\overline{\psi}}(x-t)-f^{\overline{\psi}}(x)\right)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt + O(1)\overline{\psi}(n)\omega(1/n). \tag{44}$$

Если же $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$, *то для произвольного* $n\in\mathcal{N}$ *при любом* $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;x) = \int\limits_{|t|\le a/n}\left(f^{\overline{\psi}}(x-t)-t_{n-1}(x-t)\right)I_2(\psi_2;n;t)_1\,dt +$$

$$+\frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{a/n\le|t|\le\pi/2}\left(f^{\overline{\psi}}(x-t)-t_{n-1}(x-t)\right)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt +$$

$$+ O(1)\overline{\psi}(n)\left\| f^{\psi}(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\right\|_C. \tag{45}$$

В равенствах (43) – (45)

$$\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)} \tag{46}$$

и $O(1)$ — *величины, которые не зависят ни от* $n\in\mathcal{N}$, *ни от функций* $f(\cdot)$, *принадлежащих соответствующим рассматриваемым классам.*

Доказательство леммы 2 проведем в несколько этапов. Сначала обозначим через $R_n = R_n(f;\,\overline{\psi};\,x)$ второе слагаемое в правой части (41) и заметим, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\psi_1(n)$ *и* $\psi_2(n)$ — *любые действительные числа. Тогда*:

если $f\in C^{\overline{\psi}}_\infty$, *то для каждого* $n\in\mathcal{N}$

$$\|R_n(f;\,\overline{\psi};\,x)\|_C = O(1)\,\overline{\psi}(n); \tag{47}$$

если $f\in C^{\overline{\psi}}H^0_\omega$, *то для каждого* $n\in\mathcal{N}$

$$\|R_n(f;\,\overline{\psi};\,x)\|_C = O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega(1/n). \tag{47′}$$

Если же $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$, *то для произвольного* $n\in\mathcal{N}$ *при любом* $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}$

$$\|R_n(f;\,\overline{\psi};\,x)\|_C = O(1)\,\overline{\psi}(n)\left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\right\|_C. \tag{47″}$$

Действительно, для каждой функции $f\in C^{\psi}C^0$

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta(x,t)\left(\psi_1(n)\cos nt+\psi_2(n)\sin nt\right)dt\right\| \le$$

$$\le O(1)\|\Delta(x,t)\|_M\left(|\psi_1(n)|+|\psi_2(n)|\right).$$

Отсюда сразу получаем (47″), а полагая в (47′) $t_{n-1}(\cdot)\equiv 0$, — и (47).

В случае, когда $f\in C^{\overline{\psi}}H^0_\omega$, имеем

$$R_n = \frac{\psi_1(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(x-t)\cos nt\,dt + \frac{\psi_2(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{\psi_1(n)}{2}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) + \frac{\psi_2(n)}{2}(\alpha_n \sin nx - \beta_n \cos nx), \tag{48}$$

где α_n и β_n — коэффициенты Фурье функции $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Так как $f^{\overline{\psi}} \in H_\omega^0$, то, как хорошо известно (см., например, [2, с. 72]),

$$|\alpha_n| < \frac{2}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad |\beta_n| < \frac{2}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{49}$$

Поэтому, объединяя (48) и (49), получаем (47′). Таким образом, величина $R_n(f; \overline{\psi}; x)$ всегда имеет порядок остаточных членов в равенствах (43)–(45). Следовательно, главные значения величин $\rho_n(f; x)$ сосредоточены в интегралах

$$R_n^{(1)} = R_n^{(1)}(f; x; \psi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x,t) I_2(\psi_1; n; t)_0\,dt \tag{50}$$

и

$$R_n^{(2)} = R_n^{(2)}(f; x; \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x,t) I_2(\psi_2; n; t)_1\,dt. \tag{51}$$

Эти главные значения определяются в следующих леммах 4 и 5.

Лемма 4. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$. *Тогда для* $a > 0$ *при любом* $n \in \mathcal{N}$ *в каждой точке* x *справедливо равенство*

$$R_n^{(1)} = -\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int_{|t|\ge a/n} \Delta(x,t)\frac{\sin nt}{t}dt + b_n^{\psi_1}(a; f; x). \tag{52}$$

При этом если $f^{\overline{\psi}} \in S_M^0$, *то* $\Delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x-t)$ *и*

$$\left\| b_n^{\psi_1}(a; f; x)\right\|_C = O(1)|\psi_1(n)|; \tag{53}$$

если $f^{\overline{\psi}} \in H_\omega^0$, *то* $\Delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)$ *и*

$$\left\| b_n^{\psi_1}(a; f; x)\right\|_C = O(1)|\psi_1(n)|\omega(1/n). \tag{54}$$

Если же $f^{\overline{\psi}} \in C^0$, то $\Delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)$, *где* $t_{n-1}(\cdot)$ — *произвольный полином из* $\mathcal{T}_{n-1}$ *и*

$$\left\| b_n^{\psi_1}(a; f; x)\right\|_C = O(1)|\psi_1(n)|\left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\right\|_C. \tag{55}$$

Доказательство. Так как

$$I_2(\psi_1; n; t)_0 = -\frac{\psi_1(n)\sin nt}{\pi\ \ t} - \frac{1}{\pi t}\int_n^{\infty} \psi_1'(v)\sin vt\,dv \overset{\text{df}}{=}$$

$$= -\frac{\psi_1(n)\sin nt}{\pi\ \ t} - \frac{1}{\pi}I_3^{(1)}(t), \tag{56}$$

то

$$b_n^{\psi_2}(a, f; x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \le a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, t) I_3^{(1)}(t) dt. \tag{57}$$

Если $f^{\overline{\psi}} \in S_M^0$, то почти при всех x и t $|\Delta(x, t)| \le 1$. Значит, тогда

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \le a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \le 2a \frac{|\psi_1(n)|}{\pi}. \tag{58}$$

Если $f^{\overline{\psi}} \in C^0$, то аналогично получаем

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \le a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \le \frac{|\psi_1(n)|}{\pi} 2a \left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_C. \tag{59}$$

В случае, когда $f^{\overline{\psi}} \in H_\omega^0$, $|\Delta(x, t)| = \left| f^{\overline{\psi}}(x - t) - f^{\overline{\psi}}(x) \right| \le \omega(t)$. Поэтому

$$\left| \frac{\psi_1(n)}{\pi} \int\limits_{|t| \le a/n} \Delta(x, t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \le \frac{2|\psi_1(n)|}{\pi} \omega\left(\frac{a}{n}\right) = O(1)|\psi_1(n)| \omega(1/n). \tag{60}$$

Остается убедиться, что оценки вида (58) – (60) справедливы и для второго слагаемого в (57). Рассмотрим сначала случай, когда $f^{\overline{\psi}} \in C^0$.

Имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\overline{\psi}}(x - t) - t_{n-1}(x - t) \right) I_3^{(1)}(t) dt \right| \le \frac{1}{\pi} \left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| I_3^{(1)}(t) \right| dt. \tag{61}$$

В [2, с. 133] показано, что если $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| I_3^{(1)}(t) \right| dt \le O(1) |\psi(n)|. \tag{62}$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\overline{\psi}}(x - t) - t_{n-1}(x - t) \right) I_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1) |\psi_1(n)| \left\| f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \right\|_C. \tag{63}$$

Ясно, что таким же путем получается и оценка вида (58):

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x - t) I_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1) |\psi_1(n)| \qquad \forall f^{\overline{\psi}} \in S_M^0. \tag{64}$$

Поэтому остается установить, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f^{\overline{\psi}}(x - t) - f^{\overline{\psi}}(x) \right) I_3^{(1)}(t) dt \right| = O(1) |\psi_1(n)| \omega(1/n) \qquad \forall f^{\overline{\psi}} \in H_\omega^0, \tag{65}$$

или же

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^{\overline{\Psi}}(x-t/n)-f^{\overline{\Psi}}(x)\right)\frac{n}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_1(nt)\sin vt\,dv\,dt\right| = O(1)|\psi_1(n)|\,\omega(1/n).$$

Последнее соотношение доказано в [2, с. 133]. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\psi_2\in\mathfrak{M}'_0$. *Тогда для произвольного* $a>0$ *при любом* $n\in\mathcal{N}$ *в каждой точке* x *справедливо равенство*

$$R_n^{(2)} = \int\limits_{|t|\le a/n}\Delta(x,t)\,I_2(\psi_2;n;t)\,dt + \frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a/n}\Delta(x,t)\frac{\cos nt}{t}dt + b_n^{\psi_2}(a;f;x). \quad (66)$$

При этом если $f^{\overline{\Psi}}\in S_M^0$, *то* $\Delta(x,t)=f^{\overline{\Psi}}(x-t)$ *и*

$$\left\|b_n^{\psi_2}(a;f;x)\right\|_C = O(1)|\psi_2(n)|; \quad (67)$$

если $f^{\overline{\Psi}}\in H_\omega^0$, *то* $\Delta(x,t)=f^{\overline{\Psi}}(x-t)-f^{\overline{\Psi}}(x)$ *и*

$$\left\|b_n^{\psi_2}(a;f;x)\right\|_C = O(1)|\psi_2(n)|\omega(1/n). \quad (68)$$

Если же $f^{\overline{\Psi}}\in C^0$, *то* $\Delta(x,t)=f^{\overline{\Psi}}(x-t)-t_{n-1}(x-t)$, *где* $t_{n-1}(\cdot)$ — *произвольный полином из* $\mathcal{T}_{n-1}$ *и*

$$\left\|b_n^{\psi_2}(a;f;x)\right\|_C = O(1)|\psi_2(n)|\left\|f^{\overline{\Psi}}(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\right\|_C. \quad (69)$$

Доказательство. Поскольку

$$I_2(\psi_2;n;t) = \frac{\psi_2(n)}{\pi}\frac{\cos nt}{t} + \frac{1}{\pi t}\int\limits_{n}^{\infty}\psi_2'(v)\cos vt\,dv, \quad (70)$$

то в силу (51) и (66)

$$b_n^{\psi_2}(a;f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a/n}\Delta(x,t)\frac{1}{t}\int\limits_{n}^{\infty}\psi_2'(v)\cos vt\,dv\,dt =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a}\Delta(x,t/n)\,I_3^{(2)}(t)\,dt, \quad (71)$$

где с учетом принятых в [2] обозначений положено

$$I_3^{(2)}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2'(nv)\cos vt\,dv.$$

Если теперь $f^{\overline{\Psi}}\in S_M^0$, то из (71) получаем

$$\left\|b_n^{\psi_2}(a;f;x)\right\| \le \frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a}\left|I_3^{(2)}(t)\right|dt. \quad (72)$$

В [2, с. 60] показано, что для произвольных $\psi\in\mathfrak{M}'$ и $t\ne 0$

$$\frac{n}{\pi}\left|I_3^{(2)}(t)\right| \le \frac{2n|\psi'(n)|}{t^2}. \quad (73)$$

Поэтому с учетом (72) и (22) убеждаемся в справедливости соотношения (67). Аналогично получаем и равенство (69).

Соотношение (68) получается посредством использования следующей леммы [2, с. 73].

Лемма 6. *Пусть* $\varphi(t)$ — *интегрируема на* I *функция* ($\varphi \in L(I)$). *Тогда если* $I = \{x : a \le x \le b\}$ и x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b$, — *некоторый набор точек, для которых*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{74}$$

то для каждой функции $f \in H_\omega(I) = \{f : |f(x) - f(x')| \le \omega(|x - x'|),\ x, x' \in I\}$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt\right| \le \max_{a \le t \le x_1} |f(t)| \int_a^{x_1} |\varphi(t)|\,dt +$$

$$+ \omega(\Delta) \int_{x_1}^{x_m} |\varphi(t)|\,dt + \max_{x_m \le t \le b} |f(t)| \int_{x_m}^{b} |\varphi(t)|\,dt, \quad \Delta = \max_k (x_{k+1} - x_k).$$

Если $I = \{x : x \ge a\}$ *и* x_k, $k = 1, 2, \ldots$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots$, — *опять набор некоторых точек таких, что при произвольном* $k \in \mathcal{N}$ *выполняется* (74), *то для каждой функции* $f \in H_\omega(I)$

$$\left|\int_a^\infty f(t)\varphi(t)\,dt\right| \le \max_{a \le t \le x_1} |f(t)| \int_a^{x_1} |\varphi(t)|\,dt + \omega(\Delta) \int_{x_1}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Функция [2, с. 102 – 105]

$$\Phi(x) = \int_x^\infty I_3^{(2)}(t)\,dt, \quad x > 0,$$

на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, где x_k — нули интегрального косинуса

$$Ci\,x = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

перенумерованные в порядке возрастания, обращается в нуль с переменой знака в некоторой точке $\bar{x}_k$, причем $k\pi < \bar{x}_k < (k+1)\pi + \pi/6$.

Пусть $\bar{x}'_k$ — ближайший справа от точки a такой нуль. Применяя лемму 6, для каждой функции $f \in H_\omega^0$ получаем

$$\left|\int_a^\infty \Delta(x, t/n) I_3^{(2)}(t)\,dt\right| \le \max_{a \le t \le \bar{x}'_k} |\Delta(x, t/n)| \int_a^{\bar{x}'_k} \left|I_3^{(2)}(t)\right| dt +$$

$$+ \omega(\Delta/n) \int_{\bar{x}'_k}^{\infty} \left|I_3^{(2)}(t)\right| dt, \qquad \Delta = \sup_k (x_{k+1} - x_k) < 4\pi. \tag{75}$$

Так как $\Delta(x, 0) = 0$, то

$$\max_{a \le t \le \bar{x}_{k'}} |\Delta(x, t/n)| \le \omega(\bar{x}_{k'}/n) \le \omega\left(\frac{a + 2\pi}{n}\right) = O(1)\omega(1/n). \tag{76}$$

Из (75) и (76) с учетом оценок (73) и (22) заключаем, что

$$\frac{n}{\pi}\left|\int_a^\infty \Delta(x, t/n) I_3^{(2)}(t)\,dt\right| =$$

$$= O(1)\omega(1/n)n\int_a^\infty \left|I_3^{(2)}(t)\right|dt = O(1)\,|\psi_2(n)|\omega(1/n). \tag{77}$$

Вследствие нечетности функции $I_3^{(2)}(t)$ такая же оценка справедлива и для интеграла по промежутку $t < -a$. Отсюда, принимая во внимание равенство (71), убеждаемся в справедливости соотношения (68). Для дальнейшего изложения необходима следующая лемма.

Лемма 7. *Если* $\varphi \in S_M^0$, *то при произвольных* $b > 0$ *и* $\gamma \in R^1$

$$\left|\int_{|t|\geq b} \varphi(x-t)\frac{\sin(nt+\gamma)}{t}\,dt\right| = O(1); \tag{78}$$

если же $\varphi \in H_\omega^0$, *то*

$$\left|\int_{|t|\geq b} (\varphi(x-t) - \varphi(x))\frac{\sin(nt+\gamma)}{t}\,dt\right| = O(1)\omega(1/n). \tag{79}$$

Если же $\varphi \in C^0$, *то при любом* $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$

$$\left|\int_{|t|\geq b} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t))\frac{\sin(nt+\gamma)}{t}\,dt\right| = O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C. \tag{80}$$

В равенствах (78) – (80) $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по всем рассматриваемым параметрам.*

Соотношения (78) и (79) доказаны в [2, с. 110], соотношение (80) —в [11, с. 505].

Если воспользуемся леммой 6, положив в ней $b = \pi/2$, то увидим, что интегралы, взятые по промежуткам $|t| \geq a/n$, в равенствах (52) и (66) можно заменить интегралами, распространенными только на промежутки $a/n \leq |t| \leq \pi/2$, допустив при этом ошибку, которая не будет превышать остаточных членов в этих равенствах.

Поэтому, объединяя утверждения лемм 3 – 7, убеждаемся в справедливости всех утверждений леммы 2.

Число a, фигурирующее в лемме 2, будем выбирать с учетом следующего утверждения.

Лемма 8. *Для любой функции* $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ *существует такое число* $a > 0$, *что при* $n \in \mathcal{N}$ *на промежутке* $(0, a/n)$ *выполняется равенство*

$$\operatorname{sign} I_2(\psi_2; n; t) = \operatorname{sign}\psi_2(n), \quad t \in (0, a/n). \tag{81}$$

Доказательство. Предположим для определенности, что при каждом $n \in \mathcal{N}$ $\psi_2(n) > 0$. Утверждение леммы будет доказано, если убедимся в существовании числа $a > 0$ такого, что

$$I_2(\psi_2; n; t/n) = \frac{n}{\pi}\int_1^\infty \psi_2(nv)\sin vt\,dv > 0 \quad \forall t \in (0, a), \quad n \in \mathcal{N}. \tag{82}$$

Для этого положим

$$\varphi_n(v) = \begin{cases} \psi_2(nv), & v \ge 1; \\ \psi_2(n), & 0 < v \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Функция $\varphi_n(v)$ не возрастает. Поэтому для каждого $t > 0$

$$\int_0^\infty \varphi_n(v) \sin vt \, dv > 0. \tag{83}$$

Но вследствие (16)

$$\int_0^\infty \varphi_n(v) \sin vt \, dv = I_2(\psi_2; n; t/n) + \psi_2(n) \frac{2\sin^2 t/2}{t}.$$

Отсюда с учетом (83) получаем доказываемый факт, ибо

$$\frac{2\psi_2(n)}{t} \sin^2(t/2) < \psi_2(1) t/2.$$

В дальнейшем будем считать, что число a в равенствах (43) – (45) выбрано так, чтобы выполнялось соотношение (81).

Чтобы еще больше упростить правую часть в (41), поступим следующим образом. Имея в виду равенства (43)–(45), положим

$$x_k = (k\pi + \gamma_n)/n, \quad t_k = x_k - \pi/2n, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{84}$$

и обозначим через k_0 то значение k, для которого t_{k_0} — ближайшая справа от точки $(a+\pi)/n$ точка, в которой $\sin(nt - \gamma_n) = 1$, а через k_1 — наибольшее из значений k таких, что $t_k < \pi/2$. Далее, обозначим через k_2 такое число, что точка t_{k_2} является ближайшей слева от точки $-(a+\pi)/n$ среди тех, в которых $\sin(nt + \gamma_n) = -1$, а через k_3 — наименьшее из значений, удовлетворяющих условию $t_k > -\pi/2$, и положим

$$l_n(t) = x_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = k_0, \ldots, k_1 - 1, \quad k = k_3, k_3 + 1, \ldots, k_2 - 1. \tag{85}$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 9. *Пусть a — произвольное положительное число, $\gamma \in R^1$ и $n \in \mathcal{N}$. Тогда:*

если $\varphi \in S_M$, то в каждой точке x

$$\int\limits_{a/n \le |t| \le \pi/2} \varphi(x-t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt = \int\limits_{i_{3,1}} \varphi(t) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt + O(1); \tag{86}$$

если $\varphi \in H_\omega$, то

$$\int\limits_{a/n \le |t| \le \pi/2} (\varphi(x-t) - \varphi(x)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt = \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(t) - \varphi(x)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt +$$

$$+ O(1)\omega(1/n). \tag{87}$$

Если же $\varphi \in C$, то при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке x

$$\int\limits_{a/n \le |t| \le \pi/2} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t} dt =$$

$$= \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(x-t) - t_{n-1}(x-t)) \frac{\sin(nt - \gamma_n)}{l_n(t)} dt +$$

$$+O(1)\,\|\varphi(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C. \tag{88}$$

В равенствах (86) – (88) $i_{3,1}=(t_3,t_2)\cup(t_0,t_1)$ *и* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n и *по функциям* $\varphi(\cdot)$ *из соответствующих рассматриваемых классов.*

Доказательство. Пусть, как и раньше, $\Delta(x,t)$ есть либо $\varphi(x-t)$, либо $\varphi(x-t)-\varphi(x)$, либо $\varphi(x-t)-t_{n-1}(x-t)$. Рассмотрим разность

$$R_n(\varphi,a)_+ \;=\; \int\limits_{a/n}^{\pi/2}\Delta(x,t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt \;-\; \int\limits_{t_{k_0}}^{t_{k_1}}\Delta(x,t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt \;=$$

$$= \int\limits_{(a/n,t_{k_0})\cup(t_{k_1},\pi/2)}\Delta(x,t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}dt+\int\limits_{t_{k_0}}^{t_{k_1}}\Delta(x,t)\frac{l_n(t)-t}{t\,l_n(t)}\sin(nt-\gamma_n)\,dt. \tag{89}$$

Обозначим через $R_n^{(1)}(\varphi;a)$ и $R_n^{(2)}(\varphi;a)$ соответственно первое и второе слагаемое правой части (89). Тогда в силу того, что

$$t_{k_0}-a/n\le 2\pi/n,\quad \text{и}\quad \pi/2-x_1\le 2\pi/n, \tag{90}$$

заключаем, что

$$R_n^{(1)}(\varphi;a)=\begin{cases}O(1), & \text{если}\ \ \varphi\in S_M;\\ O(1)\,\omega(1/n), & \text{если}\ \ \varphi\in H_\omega;\\ O(1)\|\varphi(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если}\ \ \varphi\in C.\end{cases} \tag{91}$$

Покажем, что такое соотношение справедливо и для величины $R_n^{(2)}(\varphi;a)$. С этой целью заметим, что

$$\int\limits_{t_{k_0}}^{t_{k_1}}\left|\frac{l_n(t)-t}{t\,l_n(t)}\right|dt \;=\; O(1). \tag{92}$$

Поэтому

$$R_n^{(2)}(\varphi;a)=\begin{cases}O(1), & \text{если}\ \ \varphi\in S_M;\\ O(1)\|\varphi(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если}\ \ \varphi\in C.\end{cases} \tag{93}$$

Чтобы показать, что при $\varphi\in H_\omega$

$$R_n^{(2)}(\varphi,a)=O(1)\,\omega(1/n), \tag{94}$$

заметим, что функция

$$r_n(t)=\frac{l_n(t)-t}{t\,l_n(t)}\sin nt$$

на промежутках (t_k,t_{k+1}), $k=\overline{k_0,k_1-1}$, сохраняет свой знак, чередуя его с изменением номера k. При этом числа

$$d_k=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}r_n(t)\,dt$$

строго убывают с возрастанием номера k. Отсюда следует, что функция

$$\bar{r}_n(x) = \int\limits_x^{t_{k_1}} r_n(t)\,dt$$

на каждом промежутке (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{k_0, k_1 - 1}$, имеет единственный простой нуль $\bar{x}_k$. Поэтому, применяя лемму 6 и учитывая соотношение (92), получаем (94). Таким образом,

$$R_n(\varphi; a)_+ = \begin{cases} O(1), & \text{если } \varphi \in S_M; \\ O(1)\omega(1/n), & \text{если } \varphi \in H_\omega; \\ O(1)\|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, & \text{если } \varphi \in C. \end{cases} \tag{95}$$

Понятно, что оценку вида (95) аналогично получим и для величины

$$R_n(\varphi; a)_- = \int\limits_{-\pi/2}^{-a/n} \Delta(x,t)\frac{\sin(nt - \gamma_n)}{t}dt - \int\limits_{t_{k_3}}^{t_{k_2}} \Delta(x,t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt,$$

и тем самым убедимся в справедливости всех утверждений леммы 9.

Объединяя утверждения лемм 2 и 9, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и a — произвольное положительное число. Тогда:*

если $f \in C^{\overline{\psi}}_\infty$, то для $n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{|t| \le a/n} f^{\overline{\psi}}(x-t) I_2(\psi_2; n; t)_1\,dt +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}} f^{\overline{\psi}}(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt + O(1)\overline{\psi}(n); \tag{96}$$

если $f \in C^{\overline{\psi}} H^0_\omega$, то для $n \in \mathcal{N}$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{|t| \le a/n} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f(x)\right) I_2(\psi_2; n; t)\,dt +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - f^{\overline{\psi}}(x)\right)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt + O(1)\overline{\psi}(n)\omega(1/n). \tag{97}$$

Если же $f \in C^{\overline{\psi}} C^0$, то для $n \in \mathcal{N}$ при любом $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = \int\limits_{|t| \le a/n} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)\right) I_2(\psi_2; n; t)\,dt +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}} \left(f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)\right)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_n(t)}dt +$$

$$+ O(1)\overline{\psi}(n)\left\|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\right\|_C. \tag{98}$$

В равенствах (96) – (98) $i_{3,1} = (t_{k_3}, t_{k_2}) \cup (t_{k_0}, t_{k_1})$,

$$\overline{\psi}(n) = \left(\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)},$$

и $O(1)$ — *величины, которые не зависят ни от* $n \in \mathcal{N}$, *ни от функций* $f(\cdot)$, *принадлежащих соответствующим рассматриваемым классам.*

Доказательства сформулированных теорем будут приведены во второй части данной работы.

1. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье // Скорость сходимости рядов Фурье на классах сверток. – Киев, 1996. – С. 3 – 62. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Колмогоров А. Н.* Zur Crossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen // Ann. Math. – 1935. – **36.** – S. 521 – 526.
4. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
5. *Теляковский С. А.* О приближении функций заданных классов суммами Фурье // Теория функций и приближений: Тр. III Сарат. зим. шк. (27янв. – 7 фев. 1986 г.): Межвуз. науч. сб. – Саратов: Сарат. ун-т, 1987. – Ч.1. – 156 с.
6. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
7. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15.** – С. 1 – 76.
8. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243 – 296.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
10. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 449 – 510.
11. *Бушев Д. Н., Степанец А. И.* О приближении слабо дифференцируемых периодических функций // Там же. – 1990. – **42**, № 3. – С. 406 – 412.

Получено 05.02.97