УДК 517.9

В. П. Яковець (Ніжин. пед. ін-т)

ПРО СТРУКТУРУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We establish sufficient conditions for the existence of general Cauchy-type solution and conditions of solvability of the Cauchy problem for a system of second-order differential equations.

Знайдено достатні умови існування загального розв'язку типу Коші та умови розв'язності задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо систему рівнянь

$$A(t)\frac{d^2x}{dt^2} + B(t)\frac{dx}{dt} + C(t)x = f(t), \qquad t \in [a;b], \tag{1}$$

де $A(t), B(t), C(t)$ — дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n-го порядку, $f(t)$ — n-вимірний вектор.

Будемо вважати, що

$$\det A(t) = 0 \qquad \forall\, t \in [a;b].$$

Дослідження, які проводяться в даній роботі, є логічним розвиненням результатів, опублікованих у роботах [1, 2], де розглядається система диференціальних рівнянь першого порядку

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{2}$$

в якій $B(t)$ — тотожно вироджена матриця на заданому відрізку $[a;b]$. Можливість зведення системи диференціальних рівнянь вищих порядків до системи першого порядку і проведені в [1, 2] дослідження структури загального розв'язку системи (2) дозволяють одержати деякі результати і щодо структури загального розв'язку системи (1). Причому відповідні твердження формулюються в термінах матриць $A(t), B(t), C(t)$ вихідної системи (1), а не еквівалентної їй системи першого порядку, що особливо важливо як для теорії, так і з точки зору практичних застосувань.

Позначимо через

$$L_1(t) = B(t) + 2A(t)\frac{d}{dt}, \qquad L_2(t) = C(t) + B(t)\frac{d}{dt} + A(t)\frac{d^2}{dt^2}$$

оператори, що діють в унітарному просторі U^n n-вимірних вектор-функцій класу $C^k[a;b]$, $k \ge 2$.

Означення. *Будемо говорити, що матриця $A(t)$ має на відрізку $[a;b]$ жорданів ланцюжок векторів довжини s відносно операторів $L_1(t)$, $L_2(t)$, якщо існують ненульові вектори $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t) \in U^n$ такі, що при всіх $t \in [a;b]$ виконуються співвідношення*

$$A(t)\varphi_1(t) = 0, \qquad A(t)\varphi_i(t) + L_1(t)\varphi_{i-1}(t) + L_2(t)\varphi_{i-2}(t) = 0, \qquad i = \overline{2,s},$$

а рівняння

$$A(t)z + L_1(t)\varphi_s(t) + L_2(t)\varphi_{s-1}(t) = 0$$

не має розв'язку в жодній точці відрізка $[a;b]$.

Якщо матриця $A(t)$ має кілька жорданових ланцюжків відносно операторів

$L_1(t)$, $L_2(t)$, то вектори, які їх утворюють, будемо називати жордановим набором матриці $A(t)$ відносно операторів $L_1(t)$, $L_2(t)$.

Нехай жорданів набір матриці $A(t)$ відносно операторів $L_1(t)$, $L_2(t)$ складається з векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, які утворюють r ланцюжків довжини s_i, $i = \overline{1, r}$. Згідно з означенням ці вектори при всіх $t \in [a; b]$ задовольняють співвідношення

$$A(t)\varphi_i^{(j)}(t) + L_1(t)\varphi_i^{(j-1)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(j-2)}(t) = 0, \quad j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, r} \tag{3}$$

(де за означенням покладемо $\varphi_i^{(j)} = 0$ при $j \le 0$). Позначимо через $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, базисні елементи нуль-простору матриці $A^*(t)$. Тоді на підставі сумісності рівнянь (3) вірні рівності

$$\left(L_1(t)\varphi_i^{(j)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(j-1)}(t), \psi_k(t)\right) = 0 \quad \forall\, t \in [a; b],$$
$$j = \overline{1, s_i - 1}, \quad i, k = \overline{1, r}, \tag{4}$$

а r-вимірні вектори, елементами яких є скалярні добутки

$$\left(L_1(t)\varphi_i^{(s_i)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(s_i-1)}(t), \psi_j(t)\right), \quad j = \overline{1, r},$$

не дорівнюють нулю в жодній точці відрізка $[a; b]$. Якщо при цьому

$$\det\left\|\left(L_1(t)\varphi_i^{(s_i)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(s_i-1)}(t), \psi_j(t)\right)\right\|_1^r \ne 0 \quad \forall\, t \in [a; b], \tag{5}$$

то даний жорданів набір будемо називати повним.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай*

$$A(t),\ B(t),\ C(t) \in C^{3m-2}[a; b],$$
$$f(t) \in C^{m-1}[a; b], \quad \operatorname{rang} A(t) = n - r = \mathrm{const}$$

і матриця $A(t)$ на відрізку $[a; b]$ має повний жорданів набір векторів відносно операторів $L_1(t)$, $L_2(t)$, який складається з r ланцюжків довжини $s_1, \ldots, s_r$, де $\max_i s_i = m$. Тоді загальний розв'язок системи (1) *зображується у вигляді*

$$x(t) = X_{2n-s}(t)c + \tilde{x}(t), \tag{6}$$

де $X_{2n-s}(t)$ — прямокутна матриця розмірності $n \times (2n - s)$, складена з $2n - s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи, $s = s_1 + \ldots + s_r$, c — довільний сталий $(2n - s)$-вимірний вектор, $\tilde{x}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідної системи (1).

Доведення. Здійснивши заміну

$$x = y_1, \quad \frac{dx}{dt} = y_2 \tag{7}$$

і позначивши $y = \operatorname{col}(y_1, y_2)$, зведемо систему (1) до еквівалентної системи першого порядку

$$\tilde{B}(t)\frac{dy}{dt} = \tilde{A}(t)y + \tilde{f}(t), \tag{8}$$

де $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ — квадратні матриці $2n$-го порядку, $\tilde{f}(t)$ — $2n$-вимірний вектор, які зображуються у такому вигляді:

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -C(t) & -B(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Покажемо, що умови теореми 1 забезпечують виконання умов теореми 2 із [2] по відношенню до системи (8), що дасть можливість встановити структуру загального розв'язку цієї системи, а отже, і еквівалентної їй системи (1).

Очевидно, що $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $\tilde{f}(t) \in C^{m-1}[a;b]$ і $\operatorname{rang} \tilde{B}(t) = 2n - r$. Знайдемо жорданів набір матриці $\tilde{B}(t)$ відносно оператора $L(t) = \tilde{A}(t) - \tilde{B}(t)\dfrac{d}{dt}$ у просторі U^{2n} достатньо гладких $2n$-вимірних вектор-функцій. Нехай $g_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, — власні вектори матриці $\tilde{B}(t)$. Подамо їх у вигляді $g_i^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left(g_{i1}^{(1)}(t), g_{i2}^{(1)}(t)\right)$, де $g_{i1}^{(1)}(t), g_{i2}^{(1)}(t)$ — n-вимірні вектори. Тоді у відповідності зі структурою матриці $\tilde{B}(t)$ маємо $g_{i1}^{(1)}(t) = 0$, $A(t)\, g_{i2}^{(1)}(t) = 0$, $i = \overline{1,r}$, звідки випливає $g_{i2}^{(1)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r}$. Отже,

$$g_i^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left(0, \varphi_i^{(1)}(t)\right), \quad i = \overline{1,r}. \tag{10}$$

Зафіксуємо один з цих власних векторів і будемо шукати відповідні йому приєднані вектори. Перший з них позначимо через $g_i^{(2)}(t)$ і подамо у вигляді $g_i^{(2)}(t) = \operatorname{col}\left(g_{i1}^{(2)}(t), g_{i2}^{(2)}(t)\right)$. У відповідності зі структурою матриць $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ для визначення векторів $g_{i1}^{(2)}(t), g_{i2}^{(2)}(t)$ одержимо систему рівнянь

$$g_{i1}^{(2)} - g_{i2}^{(1)} + \frac{dg_{i1}^{(1)}}{dt} = 0,$$

$$A(t)g_{i2}^{(2)} + C(t)g_{i1}^{(1)} + B(t)g_{i2}^{(1)} + A(t)\frac{dg_{i2}^{(1)}}{dt} = 0,$$

яка з урахуванням (10) запишеться у вигляді

$$g_{i1}^{(2)} = \varphi_i^{(1)},$$

$$A(t)\left(g_{i2}^{(2)} - \frac{d\varphi_i^{(1)}}{dt}\right) + L_1(t)\varphi_i^{(1)} = 0.$$

Згідно з (3), (4) ця система сумісна, а її розв'язком буде

$$g_{i1}^{(2)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t), \qquad g_{i2}^{(2)}(t) = \varphi_i^{(2)}(t) + \frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}.$$

Далі застосуємо метод математичної індукції. Припустимо, що існують приєднані вектори $g_i^{(j)}(t) = \operatorname{col}\left(g_{i1}^{(j)}(t), g_{i2}^{(j)}(t)\right)$, $j < k \le s_i$, які виражаються через вектори $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j < k < s_i$, за формулами

$$g_i^{(j)}(t) = \operatorname{col}\left(\varphi_i^{(j-1)}(t), \varphi_i^{(j)}(t) + \frac{d\varphi_i^{(j-1)}(t)}{dt}\right). \tag{11}$$

Тоді для визначення вектора $g_i^{(k)}(t) = \operatorname{col}\left(g_{i1}^{(k)}(t), g_{i2}^{(k)}(t)\right)$ маємо систему рівнянь

$$g_{i1}^{(k)} - g_{i2}^{(k-1)} + \frac{dg_{i1}^{(k-1)}}{dt} = 0,$$

$$A(t)g_{i2}^{(k)} + C(t)g_{i1}^{(k-1)} + B(t)g_{i2}^{(k-1)} + A(t)\frac{dg_{i2}^{(k-1)}}{dt} = 0,$$

яка з урахуванням (11) записується у вигляді

$$g_{i1}^{(k)} = \varphi_i^{(k-1)},$$

$$A(t)\left(g_{i2}^{(k)} - \frac{d\varphi_i^{(k-1)}}{dt}\right) + L_1(t)\varphi_i^{(k-1)} + L_2(t)\varphi_i^{(k-2)} = 0.$$

Згідно з (3) – (5) ця система сумісна при $k \le s_i$ і несумісна при $k = s_i + 1$. При цьому вектор $g_i^{(k)}(t)$ визначатиметься за формулою (11), якщо в ній покласти $j = k$.

Таким чином, кожному власному вектору $g_i^{(1)}(t)$ матриці $\tilde{B}(t)$ відповідають $s_i - 1$ приєднаних векторів відносно оператора $L(t)$, які визначаються за формулами (11). Отже, матриця $\tilde{B}(t)$ має відносно оператора $L(t)$ жорданів набір векторів, який складається з r жорданових ланцюжків довжини $s_1, \dots, s_r$. Неважко переконатися, що цей жорданів набір є повним.

Отже, для системи (8) виконуються всі умови теореми 2 із [2]. Тоді згідно з цією теоремою загальний розв'язок системи (8) має вигляд

$$y(t) = Y_{2n-s}(t)c + \tilde{y}(t), \tag{12}$$

де $Y_{2n-s}(t)$ — $2n \times (2n-s)$-матриця, стовпцями якої є $2n - s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи, c — довільний сталий $(2n - - s)$-вимірний вектор, $\tilde{y}(t)$ — частинний розв'язок системи (8). У відповідності з (7) перші n координат вектора (12) складають розв'язок вихідної системи (1), а n останніх координат утворюють його похідну. Тому n-вимірні вектори $x_i(t)$, $i = \overline{1, 2n-s}$, складені з перших n елементів стовпців матриці $Y_{2n-s}(t)$, є лінійно незалежними розв'язками системи

$$A(t)\frac{d^2x}{dt^2} + B(t)\frac{dx}{dt} + C(t)x = 0.$$

Склавши з цих векторів $(n \times (2n-s))$-матрицю $X_{2n-s}(t)$ і позначивши через $\tilde{x}(t)$ частинний розв'язок системи (1), складений з перших координат вектора $\tilde{y}(t)$, для загального розв'язку системи (1) дістанемо формулу (6). Теорему доведено.

Як випливає з доведення теореми 1, при виконанні її умов матриця $\tilde{B}(t)$ має повний жорданів набір відносно оператора $L(t)$, що складається з r ланцюжків довжини s_i, $i = \overline{1, r}$. Тоді згідно з лемою 2 із [2] матриця $\tilde{B}^*(t)$, спряжена з $\tilde{B}(t)$, має жорданів набір аналогічної структури відносно оператора $L^*(t) = = \tilde{A}^*(t) + \frac{d}{dt}\tilde{B}^*(t)$. Це дає можливість довести таке твердження.

Лема. *Якщо* $\operatorname{rang} A(t) = n - r = \text{const}$ *і матриця* $A(t)$ *має на відрізку* $[a; b]$ *повний жорданів набір векторів відносно операторів* $L_1(t)$, $L_2(t)$, *який складається з* r *жорданових ланцюжків довжини* s_i, $i = \overline{1, r}$, *то спряжена матриця* $A^*(t)$ *на даному відрізку має повний жорданів набір векторів відносно операторів*

$$L_1^*(t) = B^*(t) - 2\frac{d}{dt}A^*(t), \qquad L_2^*(t) = C^*(t) - \frac{d}{dt}B^*(t) + \frac{d^2}{dt^2}A^*(t),$$

який складається з r *жорданових ланцюжків такої ж довжини.*

Доведення. Позначимо через $h_i^{(j)}(t) = \operatorname{col}\left(h_{i1}^{(j)}(t), h_{i2}^{(j)}(t)\right)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, вектори, що утворюють жорданові ланцюжки матриці $\tilde{B}^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$. Нехай i — фіксоване. Як відмічалось, $h_i^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left(0, \psi_i^{(1)}(t)\right)$, де $\psi_i^{(1)}(t)$ — власний вектор матриці $A^*(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню. Тоді у відповідності зі структурою матриць $A^*(t)$, $B^*(t)$ n-вимірні вектори $h_{i1}^{(2)}(t), h_{i2}^{(2)}(t)$ задовольняють співвідношення

$$h_{i1}^{(2)}(t) = -C^*(t)\psi_i^{(1)}(t), \qquad A^*(t)h_{i2}^{(2)}(t) + \left(B^*(t) - \frac{d}{dt}A^*(t)\right)\psi_i^{(1)}(t) = 0. \quad (13)$$

Оскільки $A^*\psi_i^{(1)} = 0$, то друге з цих співвідношень можна записати у вигляді $A^*(t)\,h_{i2}^{(2)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0$, звідки випливає, що вектор $h_{i2}^{(2)}(t)$ є першим приєднаним вектором матриці $A^*(t)$ відносно операторів $L_1^*(t)$, $L_2^*(t)$. Позначивши $h_{i2}^{(2)}(t) = \psi_i^{(2)}(t)$, маємо

$$h_{i1}^{(2)}(t) = -C^*(t)\psi_i^{(1)}(t), \qquad h_{i2}^{(2)}(t) = \psi_i^{(2)}(t). \quad (14)$$

З урахуванням (14) відповідні співвідношення для векторів $h_{i1}^{(3)}(t)$, $h_{i2}^{(3)}(t)$ записуються у вигляді

$$h_{i1}^{(3)}(t) = -C^*(t)\psi_i^{(2)}(t) - \frac{d}{dt}C^*(t)\psi_i^{(1)}(t),$$
$$A^*(t)\,h_{i2}^{(3)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t) + C^*(t)\psi_i^{(1)}(t) + \frac{d}{dt}A^*(t)\psi_i^{(2)}(t) = 0. \quad (15)$$

Згідно з (13), (14)

$$\frac{d}{dt}A^*(t)\psi_i^{(2)}(t) = -\frac{d}{dt}\left(B^*(t) - \frac{d}{dt}A^*(t)\right)\psi_i^{(1)}(t).$$

Підставивши цей вираз у другу з рівностей (15), одержуємо

$$A^*(t)\,h_{i2}^{(3)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t) + L_2^*(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0,$$

звідки випливає, що існує другий приєднаний вектор матриці $A^*(t)$ відносно операторів $L_1^*(t)$, $L_2^*(t)$: $\psi_i^{(3)}(t) = h_{i2}^{(3)}(t)$.

Застосувавши метод математичної індукції, встановимо, що матриця $A^*(t)$ має r жорданових ланцюжків довжини s_i, $i = \overline{1, r}$, відносно операторів $L_1^*(t)$, $L_2^*(t)$, вектори $\psi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, яких пов'язані з векторами $h_{i1}^{(j)}(t)$, $h_{i2}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, співвідношеннями

$$h_{i1}^{(j)}(t) = -\sum_{k=0}^{j-2}\frac{d^k}{dt^k}C^*(t)\psi_i^{(j-1-k)}(t); \quad h_{i2}^{(j)}(t) = \psi_i^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, s_i}, \; i = \overline{1, r}. \quad (16)$$

Легко переконатись також, що даний жорданів набір є повним.

Лему доведено.

Розглянемо тепер для системи (1) задачу Коші з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0', \qquad t_0 \in [a; b]. \quad (17)$$

Щоб знайти умови існування розв'язку задачі (1), (17), розглянемо відповідну задачу Коші для системи (8) з початковою умовою $y(t_0) = y_0$, де $y_0 = \mathrm{col}(x_0, x_0')$. Згідно з теоремою 4 із [2] для існування розв'язку останньої задачі необхідно і достатньо, щоб вектор y_0 задовольняв співвідношення

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i}\left(\tilde{A}(t_0)y_0 + \tilde{f}(t_0), h_j^{(k-i)}(t_0)\right) = 0, \quad j = \overline{1, r},\ k = \overline{1, s_j}. \tag{18}$$

Виразимо цю умову через коефіцієнти вихідної системи (1), вектори $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_j}$, $i = \overline{1, r}$, і початкові вектори x_0, x_0'. Скориставшись формулами (9), (16), дістанемо

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-i-2} \frac{d^{s+i}}{dt^{s+i}} \left(C(t_0)x_0', \psi_j^{(k-i-1-s)}(t_0)\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i}\left(C(t_0)x_0 + B(t_0)x_0' - f(t_0), \psi_j^{(k-i)}(t_0)\right) = 0, \quad j = \overline{1, r},\ k = \overline{1, s_j}.$$

Виконавши в першому доданку останньої рівності заміну індексів s на $s + i = i_1$ і змінивши порядок підсумовування, остаточно маємо

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\frac{d^i}{dt^i}\left(C(t_0)x_0', \psi_j^{(k-1-i)}(t_0)\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i}\left(C(t_0)x_0 + B(t_0)x_0' - f(t_0), \psi_j^{(k-i)}(t_0)\right) = 0, \quad k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, r}. \tag{19}$$

В результаті доведено таку теорему.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для того, щоб задача Коші* (1), (17) *мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початкові вектори* x_0, x_0' *задовольняли співвідношення* (19), *де* $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, *— вектори, що утворюють жорданів набір матриці* $A^*(t)$ *відносно операторів* $L_1^*(t)$, $L_2^*(t)$. *При виконанні умови* (19) *розв'язок задачі* (1), (17) *буде єдиним.*

Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1' + x_3' + c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + c_{13}(t)x_3 &= f_1(t); \\ x_2'' + x_2' + c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + c_{23}(t)x_3 &= f_2(t); \\ x_1' + c_{31}(t)x_1 + c_{32}(t)x_2 + c_{33}(t)x_3 &= f_3(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Позначивши

$$x(t) = \mathrm{col}(x_1, x_2, x_3), \quad f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

зобразимо цю систему у вигляді (1).

Якщо $c_{33}(t) \neq 0$, то, як показують нескладні розрахунки, матриця A має жорданів ланцюжок векторів довжини 2 відносно операторів $L_1(t)$, $L_2(t)$, який складається з векторів

$$\varphi_1 = \mathrm{col}(0; 0; 1), \quad \varphi_2 = \mathrm{col}(-1; 0; 0). \tag{21}$$

Тому згідно з теоремою 1 загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x(t) = X_4(t)c + \tilde{x}(t),$$

де $X_4(t)$ — прямокутна матриця розмірності 3×4, складена з чотирьох лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи, $\tilde{x}(t)$ — деякий частинний розв'язок неоднорідної системи.

Неважко переконатися, що вектори (21) утворюють також жорданів ланцюжок матриці A^* відносно операторів $L_1^*(t)$, $L_2^*(t)$: $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_2$. Умова (19) розв'язності задачі Коші для даної системи з початковою умовою (17) записується у вигляді

$$(C(t_0)x_0 + B(t_0)x_0' - f(t_0), \psi_1) = 0,$$

$$(C(t_0)x_0', \psi_1) + \sum_{i=0}^{1} \frac{d^i}{dt^i}(C(t_0)x_0 + B(t_0)x_0' - f(t_0), \psi_{2-i}) = 0,$$

звідки, зробивши необхідні розрахунки, одержуємо

$$c_{31}(t_0)x_1 + c_{32}(t_0)x_2 + c_{33}(t_0)x_3 + x_1' - f_3(t_0) = 0,$$

$$c_{31}(t_0)x_1' + c_{32}(t_0)x_2' + c_{33}(t_0)x_3' + c_{31}'(t_0)x_1 + c_{32}'(t_0)x_2 +$$

$$+ c_{33}'(t_0)x_3 - c_{11}(t_0)x_1 - c_{12}(t_0)x_2 - c_{13}(t_0)x_3 - x_1' - x_3' - f_1(t_0) - f_3'(t_0) = 0,$$

де x_i, x_i', $i = \overline{1,3}$, — координати векторів x_0 та x_0' відповідно.

1. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О проводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. НАН Украины. – 1993. – № 4. – С. 10–15.
2. *Яковець В. П.* Деякі питання загальної теорії вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278–1296.

Одержано 09.09.97