УДК 517. 9

Я. Й. Бігун (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ З ЗАПІЗНЕННЯМ

An averaging method is justified for systems with delay which, in the process of evolution, pass through the resonance particles. For error of the method, an estimate evidently dependent of a small parameter is obtained.

Обгрунтовано метод усереднення для систем із запізненням, які в процесі еволюції проходять через резонанси. Одержано оцінку похибки методу, яка явно залежить від малого параметру.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\tau, x) + \varepsilon Y(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta), \tag{1}$$

з початковими умовами $x(s) = x^0(s)$, $\varphi(s) = \varphi^0(s)$, $s \le 0$. Тут $x, x_h \in D$, D — обмежена область в R^n, $\varphi, \varphi_\Delta \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, L] = I$, $L = \mathrm{const} > 0$; $x_h(t) = x(h(t))$, $\varphi_\Delta(t) = \varphi(\Delta(t))$.

Передбачається, що для частот виконані умови, які забезпечують незастрявання розв'язку в околі резонансів. У випадку $\omega = \omega(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, і сталого запізнення Δ_0 одержано похибку методу усереднення, яка має порядок $\varepsilon^{1/m}$. Для систем без запізнення з числом частот $m \ge 2$ така оцінка вперше одержана в [1], а результат розвинутий в [2]. Для $m = 2$ і $\omega = \omega(x)$ метод усереднення обгрунтований в [3]. У випадку змінного запізнення $(1 - \theta)t$, $0 < \theta < 1$, одержано оцінку похибки $O(\varepsilon^{1/2m})$. Багаточастотні системи з запізненням методом усереднення досліджувались в [4 – 8].

Зробимо такі припущення:

1) вектор-функція $A = [X(\tau, x, z, u, v), Y(\tau, x, z, u, v)]$ має неперервні перші похідні по τ, x, z в області $G = I \times D \times D \times R^m \times R^m$;

2) функція $A(\tau, x, z, u, v)$ 2π-періодична по $u_\nu, v_\nu, \nu = \overline{1, m}$, рівномірно відносно $(\tau, x, z) \in I \times D \times D$, $A \in C^{p_1}_{u,v}(G, b)$, $\left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial z}\right] \in C^{p_2}_{u,v}(G, b)$, $\frac{\partial A}{\partial \tau} \in C^{p_2}_{u,v}(G, b)$,

де $C^p_{u,v}(G, b)$ — множина вектор-функцій, визначених в G, кожна компонента яких неперервна разом зі своїми частинними похідними по u, v до порядку p включно, обмежених в G сталою b;

3) початкові функції $x^0(s), \varphi^0(s)$ неперервні і $x^0(s) \in D$ при $s \le 0$;

4) функція $h(t)$ неперервна при $t \ge 0$ і $0 \le t - h(t) \le a_1$;

5) при $t \ge 0$ $\Delta(t) \in C^1$, $\Delta(t) \le t$ і $a_2^{-1} \le \frac{d\Delta(t)}{dt} \le a_2$.

Введемо відповідну (1) усереднену по швидких змінних систему

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0(\tau, \xi), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(\tau, \xi) + Y_0(\tau, \xi), \tag{2}$$

де $[X_0, Y_0] = (2\pi)^{-2m} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} [X(\tau, x, x, u, v), Y(\tau, x, x, u, v)]\, du dv.$

Позначимо через $\xi(\tau) = \xi(\tau, x_0)$, $\psi(\tau, \varepsilon) = \psi(\tau, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$ розв'язок (2), який при $\tau = 0$ набуває значень $x_0 = x^0(0)$, $\varphi_0 = \varphi^0(0)$. Нехай D_0 — замкнена множина, утворена точками із D, для яких $\xi(\tau, x_0) \in D$ при $\tau \in I$ разом із деяким ρ-околом.

Нехай $J_0 = [0, t_0)$ — максимальний півінтервал із $[0, L\varepsilon^{-1}]$, який визначається умовою $x(t, \varepsilon) \in D$ при $t \in J_0$. Вивчимо поведінку величини $\eta(t, \varepsilon) = \|x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t)\| + \|\varphi(t, \varepsilon) - \psi(\varepsilon t, \varepsilon)\|$ при $t \in J_0$. Із (1) і (2) виводимо

$$\eta(t, \varepsilon) \le \varepsilon c_1 + 2\varepsilon b \int\limits_0^t \eta(s, \varepsilon)\, ds + \sum_{\|k\| + \|l\| \ge 1} \| I_{kl}(t, \varepsilon) \| \tag{3}$$

де $c_1(a_1, b) = \text{const} > 0$, k, l — цілочислові m-вимірні вектори,

$$I_{kl}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_0^t f_{kl}(s, \varepsilon) \exp\left\{ i \int\limits_0^s \gamma_{kl}(z, \varepsilon)\, dz \right\} ds, \tag{4}$$

$$\gamma_{kl}(t, \varepsilon) = (k, \omega(\varepsilon t, x(t, \varepsilon))) + (l, \omega(\varepsilon\Delta(t), x(\Delta(t), \varepsilon))) \frac{d\Delta(t)}{dt},$$

$$f_{kl}(t, \varepsilon) = A_{kl}(\tau, \xi(\tau), \xi(\tau)) \exp\left[i(k, \varphi(t, \varepsilon)) + i(l, \varphi(\Delta(t), \varepsilon)) - i \int\limits_0^t \gamma_{kl}(s, \varepsilon)\, ds \right].$$

Тут $A_{kl}(\tau, \xi, \xi)$ — коефіцієнт Фур'є розкладу функції $A(\tau, \xi, \xi, \varphi, \varphi_\Delta)$ по φ, φ_Δ.

Для функції $f_{kl}(t, \varepsilon)$ та її похідної виконуються оцінки

$$\| f_{kl}(t, \varepsilon) \| \le \max_{\tau \in I} \| A_{kl}(\tau, \xi(\tau), \xi(\tau)) \| = c_{kl},$$

$$\left\| \frac{d f_{kl}(t, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \le \max_{\tau \in I} \left\| \frac{d A_{kl}(\tau, \xi(\tau), \xi(\tau))}{d\tau} \right\| + b c_{kl}(\|k\| + a_2 \|l\|) = \tag{5}$$

$$= c'_{kl} + b c_{kl}(\|k\| + a_2 \|l\|) = c^*_{kl}.$$

Як показано в [1, 2], для систем без запізнення оцінка інтеграла (4), де $\gamma_k(t, \varepsilon) = (k, \omega(\varepsilon t))$, залежить від характеру нулів $t_\nu \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ рівняння $(k, \omega(\varepsilon t)) = 0$, $k \ne 0$. Множина цих нулів визначає резонанси в системі. Резонансні явища в системі з запізненням (1), як випливає із (4), описуються співвідношенням $\gamma_{kl}(t, \varepsilon) = 0$, $\|k\| + \|l\| \ne 0$ і суттєво залежать від функції $\Delta(t)$, яка задає запізнення в швидких змінних, та її похідної.

2. Випадок постійного запізнення в швидких змінних. Розглянемо систему (1), припустивши, що $\omega(\tau, x) \equiv \omega(\tau)$ і $\Delta(t) = t - \Delta_0$, $\Delta_0 = \text{const} > 0$. Тоді $\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon) = (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\tau - \varepsilon\Delta_0))$.

Теорема 1. *Нехай*:

1) *виконуються умови* 1, 2 *при* $p_1 \ge m + 1$, $p_2 \ge m$, *і* 3, 4 *з п.* 1;

2) *в гармоніках* $\exp[i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta)]$ *розкладу Фур'є функції* $A(\tau, x, x, \varphi, \varphi_\Delta)$ *для цілочислових ненульових векторів* k *і* l *норма* $\|l\|$ *або* $\|k\|$ *обмежена і* $k + l \ne 0$;

3) *функції* $\omega_\nu(\tau) \in C^{m-1}(I)$, $\nu = \overline{1, m}$, *і побудований за цією системою вронскіан* $W[\omega(\tau)] \neq 0$ *на* I;

4) *розв'язок* $\xi(\tau, x_0)$ *усередненої системи* (2) *існує і належить області* D *разом з деяким* ρ-*околом при* $\tau \in I$.

Тоді можна вказати незалежну від ε *сталу* $c_6 > 0$ *таку, що при досить малому* $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$ *для* $t \in (0, L\varepsilon^{-1}]$, $x_0 \in D_0$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ *виконується оцінка*

$$\eta(t, \varepsilon) < c_6 \varepsilon^{1/m}. \tag{6}$$

Доведення. Застосуємо схему доведення, запропоновану в [2], для чого побудуємо оцінку осциляційного інтеграла $I_{kl}(\tau, \varepsilon)$, який у даному випадку можна записати так:

$$I_{kl}(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau f_{kl}(\frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(z, \varepsilon)\, dz\right\} ds.$$

Нехай $V(\tau)$ — матриця з елементами $\omega_\nu^{(j-1)}(\tau)$, $\nu, j = \overline{1, m}$; $\Omega_{kl}(t, \varepsilon) = (\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon), \ldots, \gamma_{kl}^{(m-1)}(\tau, \varepsilon))$, $\|l\| \le N_l$. Із рівномірної неперервності елементів матриці $V(\tau)$ на I випливає $\max_{\tau \in I} \|v(\tau) - V(\tau - \varepsilon\Delta_0)\| = c_2(\varepsilon) < (2c_3 N_l)^{-1}$, де $c_3 = \max_{\tau \in I} \|V^{-1}(\tau)\|$. Тоді з рівності

$$V(\tau)k + V(\tau - \varepsilon\Delta_0)l = \Omega_{kl}(t, \varepsilon), \quad \|k + l\| \neq 0,$$

і умов 2, 3 одержимо, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\tau \in [\varepsilon\Delta_0, L] = I_\varepsilon$ існує ціле $q = q(\tau, \varepsilon)$, $0 \le q \le m-1$, таке, що

$$\left|\gamma_{kl}^{(q)}(\tau, \varepsilon)\right| \ge \frac{\|k + l\|}{2c_3 m}. \tag{7}$$

Із рівномірної неперервності функцій $\omega_\nu^{(j)}(\tau)$ на I, $\nu, j-1 = \overline{1, m}$, випливає, що $\left|\omega_\nu^{(j)}(\tau_1) - \omega_\nu^{(j)}(\tau)\right| < c_4^{-1}$, $c_4 = 4c_4 m$, як тільки $|\tau_1 - \tau| < \delta_{\nu j}$, $\tau, \tau_1 \in I$. Також $\left|\omega_\nu^{(j)}(\tau - \varepsilon\Delta) - \omega_\nu^{(j)}(\tau)\right| < \bar{c}(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \to 0} = 0$, якщо $\varepsilon \le \varepsilon_2$, $\tau \in [\varepsilon\Delta_0, L]$. Покладемо $\delta = \min \delta_{\nu j}$, $I_\varepsilon(\tau) = [\varepsilon\Delta_0, \tau]$, $\tau > \varepsilon\Delta_0$. Тоді для кожного із відрізків $T_\nu(\delta) = [\nu\delta, (\nu+1)\delta] \cap I_\varepsilon(\tau)$, $\nu = \overline{0, r}$, $r = [\tau\delta^{-1}] \le L\delta^{-1}$ і деякого $q(\nu)$ будуть справедливі нерівності

$$\left|\gamma_{kl}^{(q)}(z, \varepsilon)\right| \ge \frac{\|k + l\|}{2c_4}, \quad \left|\gamma_{kl}^{(j)}(z, \varepsilon)\right| \le 4\left|\gamma_{kl}^{(q)}(z, \varepsilon)\right|, \; z \in T_\nu, \; j = \overline{0, m-1}. \tag{8}$$

Якщо $q = 0$ для $T_\nu(\delta)$, то, враховуючи (8), одержуємо

$$\left\| \int_{T_\nu} f_{kl}(\frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(z, \varepsilon)\, dz\right\} ds \right\| \le \frac{2\varepsilon c_4}{\|k + l\|}\left[2(1 + 2\delta)c_{kl} + \delta c_{kl}^*\right]. \tag{9}$$

Якщо $q > 0$ для $z \in T_\nu(\delta)$, то із першої з оцінок (8) виводимо, що на $T_\nu(\delta)$ число нулів функцій $\gamma_{kl}^{(q-1)}(z, \varepsilon), \ldots, \gamma_{kl}(z, \varepsilon)$ не перевищує відповідно $2^0, \ldots$ $\ldots, 2^{q-1}$. Вилучимо із $T_\nu(\delta)$ послідовно $\mu/2$-околи нулів функцій $\gamma_{kl}^{(j)}(z, \varepsilon)$, $j = q-1, \ldots$, а їх об'єднання в перерізі з $T_\nu(\delta)$ позначимо через $R_\nu(\mu)$. Виберемо $\mu < (2^{1-m}\delta, 2)$. Тоді

$$\left\| \int\limits_{\overline{R}_\nu(\mu)} f_{kl}\left(\frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(z, \varepsilon)\, dz \right\} ds \right\| \leq (2^{m-1} - 1)\mu\, c_{kl}. \qquad (10)$$

Для $z \in N_\nu(\mu) = \overline{T_\nu(\delta) \setminus \overline{R}_\nu(\mu)}$ справедлива оцінка

$$\left|\gamma_{kl}(z, \varepsilon)\right| \geq \frac{\|k+l\|}{2c_4}\left(\frac{\mu}{2}\right)^q \geq \frac{\|k+l\|}{2^m c_4}\mu^{m-1},$$

що приводить до нерівності

$$\left\| \int\limits_{N_\nu(\mu)} f_{kl}\left(\frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(z, \varepsilon)\, dz \right\} ds \right\| \leq \frac{2^{m+1} c_4 \varepsilon}{\|k+l\|\, \mu^{m-1}}\left[4c_{kl} + \delta c_{kl}^* \right]. \qquad (11)$$

Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* = \min\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \left(\frac{\delta}{2^{m-1}}\right)^m, \left(\frac{2^{m+1}}{1+2\delta}\right)^{\frac{m}{m-1}} \right]$, покладемо $\mu^m = \varepsilon$.

Тоді із (9) – (11) з урахуванням (5) випливає наступна оцінка:

$$\max_{\tau \in I}\left| I_{kl}(\tau, \varepsilon)\right| \leq \sqrt[m]{\varepsilon}\left(1 + \frac{L}{\delta}\right)\left(c_5' c_{kl} + c_5'' \frac{c_{kl}'}{\|k+l\|}\right), \qquad (12)$$

де $c_5'' = 2^{m+1} c_4 \delta$, $c_5' = 2^{m-1} - 1 + c_5''(1 + a_2)\left(2\delta^{-1} + N_l\right)$. Із (3), нерівності Гронуолла і (12) одержимо оцінку (6) для $t \in [0, t_0)$, де

$$c_6 = e^{2bl}\left(1 + \frac{L}{\delta}\right)\left(c_1 + 2b\Delta_0 + \sum_{\|k\| + \|l\| \geq 1}\left(c_5' c_{kl} + c_5'' \frac{c_{kl}'}{\|k+l\|}\right)\right).$$

Нехай $c_6 \sqrt[m]{\varepsilon} < 0{,}5\rho$, тоді із (6) випливає $t_0 = L\varepsilon^{-1}$. Теорему доведено.

Нехай у розклад Фур'є функції $A(\tau, x, z, u, v)$ по u, v входять ненульові вектори k і l, $\|l\| \leq N_l$, для яких $k + l = 0$. Введемо змінну $u = \varphi - \varphi_\Delta$, яка є повільною при $t > \Delta_0$. Побудуємо аналог схеми усереднення Делоне [9], усереднивши функцію $A(\tau, x, z, \varphi, \varphi - u)$ по швидкій змінній φ. Відповідна (1) усереднена система набуде вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon \overline{X}(\tau, \overline{x}, \overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\Delta), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon \overline{Y}(\tau, \overline{x}, \overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\Delta), \qquad (13)$$

де

$$\overline{A}(\tau, x, u) = \sum_{k+l=0} A_{kl}(\tau, x, x)\exp(-i(l, u)).$$

При виконанні умов 1, 3 – 5 із заміною ξ на $\overline{x}$, φ на $\overline{\varphi}$ теореми 1, як і в п.2, виводиться оцінка

$$\|x(t, \varepsilon) - \overline{x}(t, \varepsilon)\| + \|\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon)\| < c_7 \sqrt[m]{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}], \quad t \in (0, L\varepsilon^{-1}].$$

3. Змінне запізнення в швидких змінних. Розглянемо випадок, коли $\Delta(t) = \theta t$, $\theta \in (0, 1)$. Тоді $\gamma_{kl}(\tau) = (k, \omega(\tau)) + \theta(l, \omega(\theta\tau))$ і резонанс $\gamma_{kl}(\tau, \theta) = 0$ може досягатись вибором параметра θ, який визначає запізнення.

Теорема 2. *Нехай*:

1) *виконуються умови* 1, 2 *при* $p_1 \geq 2m+1$, $p_2 \geq 2m$, *і* 3 *і* 4 *з п.* 1;

2) $\omega_\nu(\tau) \in C^{2m-1}(I)$, $\nu = \overline{1, m}$, *і вронскіан* $W[\omega(\tau), \omega(\theta\tau)]$, *побудований за системою функцій* $\{\omega(\tau), \omega(\theta\tau)\}$, *не обертається в нуль на* I;

3) *існує розв'язок усередненої системи* (2) *і* $\xi(\tau, x_0) \in D$ *разом з деяким* ρ-*околом при* $\tau \in I$.

Тоді при досить малому $\bar{\bar{\varepsilon}} \in (0, \varepsilon_0]$ *для* $\tau \in I$, $x_0 \in D_0$ *і* $\varepsilon \in (0, \bar{\bar{\varepsilon}}]$ *виконується оцінка*

$$\eta(t, \varepsilon) < c_8 \sqrt[2m]{\varepsilon}, \tag{14}$$

де $c_8 > 0$ *і не залежить від* ε.

Із умови 2 випливає, що множина нулів функції $\gamma_{kl}(\tau, \theta)$ на I скінченна і кратність кожного з них не перевищує $2m-1$. Оцінка (7) набуває вигляду

$$\left|\gamma_{kl}^{(q)}(\tau, \theta)\right| \geq \frac{\|k\|+\|l\|}{4c_2 m}, \quad 0 \leq q \leq 2m-1, \quad \tau \in I. \tag{15}$$

За схемою доведення теореми 1 одержуємо оцінку

$$\max_{\tau \in I} \left| \int_0^\tau f_{kl}\left(\frac{s}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(z, \theta)\, dz\right] ds \right| \leq \sqrt[2m]{\varepsilon}\left(1 + \frac{L}{\delta}\right)\left(c_8' c_{kl} + c_8'' \frac{c_{kl}'}{\|k\|+\|l\|}\right),$$

звідки випливає твердження теореми 2.

В умовах теореми 2 оцінка (14) непокращувана відносно порядку ε, що підтверджує такий приклад:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_m - p(\varphi_{1\Delta} + \ldots + \varphi_{m\Delta})),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 1 + \tau - \tau^m, \quad \frac{d\varphi_\nu}{dt} = 1 - \tau^{\nu-1} + \tau^\nu - \tau^{m+\nu-2} + \tau^{m+\nu-1}, \quad \nu = \overline{2, m-1},$$

$$\frac{d\varphi_m}{dt} = 1 - \tau^{m-1} - \tau^{2m-2} + a\tau^{2m-1}, \quad a = 2m\left(1 - \theta^{1-2m}\right)^{-1}.$$

Тут $\theta \in (0, 1)$ і ціле $p \geq 2$ такі, що $p\theta = 1$, $\varphi(0) = 0$. При $\tau = 0$ має місце резонанс, оскільки $\gamma_{kl}(\tau, \theta) = 2m\tau^{2m-1}$. При $\tau^{2m} = (\pi/4)\varepsilon$ одержимо

$$\left|I_{kl}(\tau, \varepsilon)\right| = \left|\int_0^\tau \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\tau^{2m}\right] d\tau\right| \geq \left|\int_0^\tau \cos\frac{\tau^{2m}}{\varepsilon}\, d\tau\right| =$$

$$= |x(\tau, \varepsilon) - \xi(\tau)| > \sqrt[2m]{2^{-m-2}\pi\varepsilon}.$$

Зауваження. Як випливає з теореми 2, поведінка одночастотної системи із змінним запізненням подібна еволюції двочастотної системи без запізнення. Наприклад, для системи $\dot{x} = \varepsilon\cos(y - 2y_\Delta)$, $\dot{y} = 1 + 2\tau$, $\Delta(t) = 0{,}5\,t$ маємо $|x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t)| = O(\sqrt{\varepsilon})$.

1. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267 – 278.
2. *Самойленко А.М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С.493 – 500.
3. *Арнольд В. И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 1. – С. 9 – 12.
4. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 387 с.
5. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
6. *Бигун Я. И., Фодчук В. И.* Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 149 – 154.
7. *Кузнецова И. В.* Об усреднении в многочастотных системах с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 6. – С. 1128 – 1131.
8. *Шпакович В. П.* Метод усреднения в многочастотных системах с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 4. – С. 535 – 539.
9. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

Одержано 14.04.97