УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ *

We obtain conditions for the existence and the uniqueness of a periodic solution of certain nonlinear difference equation.

Одержані умови існування та єдиності періодичного розв'язку одного нелінійного різницевого рівняння.

Разностные уравнения вида

$$x(n+1) = A\,x(n) + f(n, x(n)),$$

где A — постоянная вещественная матрица размера $m\times m$, $n\in Z^+$ (Z^+ — множество целых неотрицательных чисел), $f(n,x)\colon Z^+\times R^m\to R^m$, рассматривались многими математиками. В настоящее время имеется большое количество работ, в которых исследованы многие вопросы теории таких уравнений [1–6]. Особенно хорошо исследованы вопросы существования и единственности периодических решений в случае, когда модули собственных значений матрицы A отличны от единицы. Основной целью настоящей работы является установление условий существования и единственности периодических решений таких уравнений в случаях, когда это предположение не выполняется.

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение

$$x(n+1) = x(n) + f(n, x(n)), \tag{1}$$

где $n\in Z^+$ и $f(n,x)$ — однозначно определенная функция, конечная при любых $n\in Z^+$, $x\in R$. Исследуем вопросы существования и единственности периодических решений, удовлетворяющих условию

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где x_0 — некоторая вещественная постоянная.

Непосредственно из (1), (2) вытекает

$$\begin{gathered} x(1) = x_0 + f(0,x_0) = F^1(0,x_0),\\ x(2) = x_0 + f(0,x_0) + f(1, F^1(0,x_0)) = F^2(1,x_0),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3)\\ x(n) = x_0 + f(0,x_0) + f(1,F^1(0,x_0)) + \ldots + f(n-1, F^{n-1}(n-2,x_0)) =\\ = F^n(n-1,x_0), \qquad n = 2,3,\ldots. \end{gathered}$$

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *имело N-периодическое решение $x(n)$ (N — целое положительное число, большее 1), удовлетворяющее условию* (2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:

1) $f(n+N,x) = f(n,x)$;

2) x_0 *удовлетворяет уравнению*

$$F^N(N-1,x_0) = x_0. \tag{4}$$

* Выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по вопросам науки и технологий.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (1) имеет N-периодическое решение $x(n)$, удовлетворяющее условию (2). Тогда

$$x(n+1) \equiv x(n) + f(n, x(n)). \tag{5}$$

В силу N-периодичности левой части этого тождества имеем

$$x(n+N) + f(n+N, x(n+N)) \equiv x(n) + f(n, x(n))$$

или

$$f(n+N, x(n)) \equiv f(n, x(n)).$$

Таким образом, в случае существования N-периодического решения функция $f(n, x)$ должна быть вдоль этого решения N-периодической по n.

Так как $x(N) = x_0$, то непосредственно из (5) получаем

$$F^N(N-1, x_0) = x_0,$$

т. е. x_0 является решением уравнения (4).

Достаточность. Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда нетрудно проверить, что функция

$$x(n) = F^n(n-1, x_0),$$

где $F^0(-1, x_0) = x_0$ и $F^n(n-1, x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, определяются соотношениями (3), является N-периодическим решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2).

Теорема 2. *Пусть* $x(n)$ — *некоторое* N*-периодическое решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (2). *Тогда при всех* $n = 0, 1, \ldots$ *выполняется равенство*

$$f(n, x(n)) + f(n+1, x(n+1)) + \ldots + f(n+N-1, x(n+N-1)) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку функция $\varphi(n) = f(n, x(n)) + f(n+1, x(n+1)) + \ldots + f(n+N-1, x(n+N-1))$ является 1-периодической, то для доказательства теоремы достаточно показать, что справедливо равенство

$$f(0, x(0)) + f(1, x(1)) + \ldots + f(N-1, x(N-1)) = 0. \tag{7}$$

Так как $x(0) = x_0$, $x(1) = F^1(0, x_0), \ldots x(N-1) = F^{N-1}(N-2, x_0)$ и согласно (3)

$$x_0 + f(0, x_0) + f(1, F^1(0, x_0)) + \ldots + f(N-1, F^{N-1}(N-2, x_0)) =$$
$$= F^N(N-1, x_0),$$

то

$$f(0, x(0)) + f(1, x(1)) + \ldots + f(N-1, x(N-1)) =$$
$$= F^N(N-1, x_0) - x_0$$

(x_0 — решение уравнения (4)). Отсюда получаем (7). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $x(n)$ — *некоторое* N*-периодическое решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (2). *Тогда справедливо равенство*

$$x(n) = x_0 - \frac{1}{N} f(1, x(1)) - \ldots - \frac{N-1}{N} f(N-1, x(N-1)) +$$
$$+ \frac{1}{N} f(n+1, x(n+1)) + \ldots + \frac{N-1}{N} f(n+N-1, x(n+N-1)). \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y(n+1) = y(n) + \tilde{f}(n), \tag{9}$$

где функция $\tilde{f}(n)$ является N-периодической и такой, что при всех $n = 0, 1, \ldots$ выполняется равенство

$$\tilde{f}(n) + \tilde{f}(n+1) + \ldots + \tilde{f}(n+N-1) = 0. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что множество всех N-периодических решений уравнения (9) определяется соотношением

$$y(n) = C + \frac{1}{N}\tilde{f}(n+1) + \ldots + \frac{N-1}{N}\tilde{f}(n+N-1),$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, если $y(n)$ — некоторое N-периодическое решение уравнения (9), удовлетворяющее условию $y(0) = x_0$, то

$$y(n) = x_0 - \frac{1}{N}\tilde{f}(1) - \ldots - \frac{N-1}{N}\tilde{f}(N-1) +$$

$$+ \frac{1}{N}\tilde{f}(n+1) + \ldots + \frac{N-1}{N}\tilde{f}(n+N-1). \tag{11}$$

Поскольку $x(n)$ является N-периодическим решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2), то

$$x(n+1) \equiv x(n) + \tilde{f}(n),$$

где $\tilde{f}(n) = f(n, x(n))$ и функция $\tilde{f}(n)$ (в силу теоремы 2) удовлетворяет условию (10). Отсюда и из (11) вытекает

$$x(n) = x_0 - \frac{1}{N}\tilde{f}(1) - \ldots - \frac{N-1}{N}\tilde{f}(N-1) +$$

$$+ \frac{1}{N}\tilde{f}(n+1) + \ldots + \frac{N-1}{N}\tilde{f}(n+N-1)$$

и, следовательно, (8). Теорема 3 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$x(n) = x_0 - \frac{1}{N}f(1, x(1)) - \ldots - \frac{N-1}{N}f(N-1, x(N-1)) +$$

$$+ \frac{1}{N}f(n+1, x(n+1)) + \ldots + \frac{N-1}{N}f(n+N-1, x(n+N-1)), \tag{12}$$

где функция $f(n, x)$ является N-периодической по n и удовлетворяет условию

3) $|f(n,x) - f(n,y)| \le \omega(n)|x-y|$, где $0 \le \omega(n) \le l < \dfrac{1}{N-1}$, $n \in Z^+$, $x, y \in R$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1, 3. *Тогда уравнение* (12) *имеет единственное* N*-периодическое решение, удовлетворяющее условию* (2).

Доказательство проведем методом последовательных приближений. При этом последовательные приближения $x_m(n)$, $m = 0, 1, \ldots$, к решению $x(n)$ определим с помощью следующих соотношений:

$$x_0(n) = x_0,$$

$$x_{m+1}(n) = x_0 - \frac{1}{N}f(1, x_m(1)) - \ldots - \frac{N-1}{N}f(N-1, x_m(N-1)) + \tag{13}$$

$$+\ \frac{1}{N} f(n+1, x_m(n+1)) + \ldots + \frac{N-1}{N} f(n+N-1, x_m(n+N-1)), \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Если последовательность $\{x_m(n)\}$ сходится к некоторой функции $x(n)$, то эта функция удовлетворяет уравнению (12). Для доказательства сходимости последовательности $\{x_m(n)\}$ достаточно показать, что при всех $n \in Z^+$ и $m \geq$ ≥ 0 справедлива оценка

$$|x_{m+1}(n) - x_m(n)| \leq M\theta^m, \tag{14}$$

где M — некоторая положительная постоянная, $\theta = l(N-1) < 1$.

Обозначим $M = 2\max\limits_n \left|\frac{1}{N} f(n+1, x_0) + \ldots + \frac{N-1}{N} f(n+N-1, x_0)\right|$. Тогда

$$|x_1(n) - x_0(n)| \leq M.$$

Предположим теперь, что $|x_m(n) - x_{m-1}(n)| \leq M\theta^{m-1}$ при $m \geq 1$ и всех $n \geq 0$. Тогда в силу (13) и условия 3 имеем

$$\begin{aligned}
|x_{m+1}(n) - x_m(n)| &\leq \frac{1}{N}|f(1, x_m(1)) - f(1, x_{m-1}(1))| + \ldots \\
&\ldots + \frac{N-1}{N}|f(N-1, x_m(N-1)) - f(N-1, x_{m-1}(N-1))| + \\
&+ \frac{1}{N}|f(n+1, x_m(n+1)) - f(n+1, x_{m-1}(n+1))| + \ldots \\
&\ldots + \frac{N-1}{N}|f(n+N-1, x_m(n+N-1)) - f(n+N-1, x_{m-1}(n+N-1))| \leq \\
&\leq \frac{l}{N}|x_m(1) - x_{m-1}(1)| + \ldots + \frac{N-1}{N} l|x_m(N-1) - x_{m-1}(N-1)| + \\
&+ \frac{l}{N}|x_m(n+1) - x_{m-1}(n+1)| + \ldots \\
&\ldots + \frac{N-1}{N} l|x_m(n+N-1) - x_{m-1}(n+N-1)| \leq \\
&\leq 2Ml\theta^{m-1}\left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \ldots + \frac{N-1}{N}\right) \leq \\
&\leq 2Ml\theta^{m-1}\frac{N-1}{2} = Ml(N-1)\theta^{m-1} = M\theta^m.
\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (14) справедлива при всех $n \in Z^+$ и $m \geq 0$. Тем самым доказано существование решения $x(n) = \lim\limits_{m \to \infty} x_m(n)$ уравнения (12). Поскольку $x_m(n+N) = x_m(n)$ и $x_m(0) = x_0$ при всех $m \geq 0$, $n \in Z^+$ (это непосредственно вытекает из условия 1 и (13)), то $x(n+N) = x(n)$ и $x(0) = x_0$.

Докажем теперь единственность построенного решения $x(n)$. Действительно, пусть существует еще одно N-периодическое решение $\gamma(n)$ уравнения (12) такое, что $\gamma(n) \neq x(n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\gamma(n) - x(n) &= -\frac{1}{N}[f(1, \gamma(1)) - f(1, x(1))] - \ldots \\
&\ldots - \frac{N-1}{N}[f(N-1, \gamma(N-1)) - f(N-1, x(N-1))] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N}[f(n+1, \gamma(n+1)) - f(n+1, x(n+1))] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{N-1}{N}[f(n+N-1, \gamma(n+N-1)) - f(n+N-1, x(n+N-1))]$$

и в силу условия 3 имеем

$$|\gamma(n) - x(n)| \le l(N-1) \max_n |\gamma(n) - x(n)|.$$

Следовательно, $\max_n |\gamma(n) - x(n)| \le \theta \max_n |\gamma(n) - x(n)|$, что возможно лишь в случае $\gamma(n) \equiv x(n)$. Полученное противоречие доказывает, что построенное решение $x(n) = \lim_{m \to \infty} x_m(n)$ единственно.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $1-3$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное* N*-периодическое решение* $x(n)$, *удовлетворяющее условию* (2) *и такое, что* $x(n) = \lim_{m \to \infty} x_m(n)$, *где функции* $x_m(n)$, $m = 0, 1, \ldots$, *определяются соотношениями* (13).

Доказательство. В силу теоремы 1 уравнение (1) имеет, по крайней мере, одно N-периодическое решение $x(n) = F^n(n-1, x_0)$, удовлетворяющее условию (2). Это решение (вытекает из теорем 2, 3) удовлетворяет соотношению (8), т. е. является решением уравнения (12). Однако при выполнении условий теоремы уравнение (12) имеет единственное N-периодическое решение $x(n) = \lim_{m \to \infty} x_m(n)$, где $x_m(n)$, $m = 0, 1, \ldots$, определяются соотношениями (13), удовлетворяющее условию (2). Следовательно, уравнение (1) имеет единственное N-периодическое решение

$$x(n) = F^n(n-1, x_0) = \lim_{m \to \infty} x_m(n),$$

удовлетворяющее условию (2). Теорема 5 доказана.

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 307 с.
2. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 127 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
5. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений дискретных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1382–1387.
6. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 1996. – **48**, № 1. – С. 140–145.

Получено 27.10.97