УДК 517.9

О. М. Станжицький (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН З ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА *

We consider invariant sets of the form $V(t, x) = 0$, where $V(t, x)$ is the Lyapunov function of corresponding determined system.

Розглядаються інваріантні множини вигляду $V(t, x) = 0$, де $V(t, x)$ — функція Ляпунова відповідної детермінованої системи.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + \sigma(t, x)\xi(t), \tag{1}$$

де $\xi(t)$ — інтегровний з імовірністю 1 на будь-якому скінченному інтервалі півосі $t \geq 0$ сепарабельний випадковий процес, заданий на деякому повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P), що набуває значення в R^m. Вектор-функція $F(t, x)$ і матриця $\sigma(t, x)$ розмірності nxm визначені і вимірні за Борелем відносно сукупності змінних при $t \geq 0$, $x \in R^n$ і такі, що для (1) виконуються умови існування і потраєкторної єдиності для початкових даних із деякої обмеженої області $D \subset R^n$.

Означення. *Множину* $M \subset R^{n+1}$ *назвемо додатно інваріантною для системи* (1), *якщо*

$$P\{(t, x(t, x_0)) \in M \quad \forall t \geq 0\} = 1 \tag{2}$$

при $(t_0, x_0(\omega)) \in M$ *з імовірністю* 1, *де* $x(t, x_0)$ — *розв'язок системи* (1) *такий, що* $x(t, x_0) = x_0$, $t_0 \geq 0$.

Зауваження **1.** В означенні розуміється, що множина M непорожня для будь-якого $t \geq 0$.

Зауваження **2.** Оскільки в наших умовах розв'язки є сепарабельними випадковими процесами, то умову (2) можна замінити умовою

$$P\{(t, x(t, x_0)) \in M\} = 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

Умови існування інваріантних множин для системи (1) дамо в термінах функцій Ляпунова „вкороченої" детермінованої системи

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x). \tag{3}$$

Припустимо, що $R_+^1 \times \overline{D}$ задана невід'ємна, абсолютно неперервна по t і ліпшіцова по x з константою B_D функція $V(t, x)$. Позначимо через N_0^t її множину нулів в $R_+^1 \times \overline{D}$. Припустимо, що вона непорожня. Будемо вважати, що $\Pr_{R^n} N_0^t$ — компакт в D (тут $\Pr_{R^n} N_0^t$ — проекція множини N_0^t на R^n); позначимо його N_0.

Теорема. *Нехай виконуються наведені вище умови. Тоді якщо при* $x \in D$, $t \geq 0$, *існують* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *такі, що*

---

* Виконана при частковій фінансовій підтримці Міністерства України у справах науки і технологій.

$$\frac{d^0V}{dt} \le C_1 V, \quad \|\sigma(t,x)\| \le C_2 V(t,x) \tag{4}$$

$\left(\dfrac{d^0V}{dt}\right.$ *— оператор Ляпунова внаслідок* (3), *а* $\|\sigma\| = \left.\left(\sum_i^m \sum_j^n \sigma_{ij}^2\right)^{1/2}\right)$, *то множина нулів функції* $V(t,x)$, $x \in D$, *є додатно інваріантною для системи* (1).

Якщо ж функція $V(t,x)$ *визначена при* $x \in R^n$, *задовольняє по* x *глобальну умову Ліпшиця з константою* B, *а також умови*

$$\begin{gathered} \inf_{\substack{t \ge 0,\\ x:\ \rho(N_0^t, x) > \delta}} V(t,x) = V_\delta > 0 \quad при \quad \delta > 0, \\ \frac{d^0V}{dt} \le -C_1 V \quad при \quad x \in R^n \end{gathered} \tag{5}$$

і для процесу $|\xi(t)|$ *виконується закон великих чисел, причому*

$$\sup_{t \ge 0} M|\xi(t)| \le \frac{C_1}{BC_2}, \tag{6}$$

то множина N_0^t *— асимптотично стійка в цілому в сенсі* [1, с. 43].

Доведення. Розглянемо розв'язок системи (1) такий, що $x(0,x_0) = x_0(\omega)$ з імовірністю 1 належить множині N_0^0 нулів функції $V(t,x)$ при $t=0$. Оскільки N_0 — компакт в D, то і N_0^0 — компакт в D, а тому $x(t,x_0) \in D$ для t із деякого інтервалу $[0, \tau(\omega)[$, де $\tau(\omega)$ — випадкова величина і $\tau(\omega) > 0$ з імовірністю 1. А тому для майже всіх за мірою Лебега $t \in [0, \tau(\omega)[$ з імовірністю 1, враховуючи (3) і лему із [1, с. 28], маємо

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, x(t,x_0))}{dt} &\le \frac{dV^0(t, x(t,x_0))}{dt} + B_D C_2 V(t, x(t,x_0)) |\xi(t)| \le \\ &\le C_1 V(t, x(t,x_0)) + B_D C_2 |\xi(t)| V(t, x(t,x_0)). \end{aligned} \tag{7}$$

Тут $-\dfrac{dV}{dt}$ — похідна внаслідок (1).

Далі з урахуванням нерівності з [1, с. 23] одержуємо

$$V(t, x(t,x_0)) \le V(0,x_0) \exp\left\{\int_0^t (B_D C_2 |\xi(s)|\, ds + C_1)\, ds\right\} \tag{8}$$

для $t \in [0, \tau(\omega)[$.

Тоді з (8) випливає рівність

$$V(t, x(t,x_0)) = 0, \qquad t \in [0, \tau(\omega)[, \tag{9}$$

яка доводить, що $x(t,x_0) \in N_0^t$ з імовірністю 1 для всіх $t \in [0, \tau(\omega)[$. З урахуванням компактності N_0 в D випадок скінченності $\tau(\omega)$ з додатною ймовірністю приводить до суперечності із (8) і (9). Отже, $\tau(\omega) = +\infty$ з імовірністю 1, а тому з урахуванням сепарабельності $x(t,x_0)$ N_0^t складається з кривих $(t, x(t,x_0))$, де $x(t,x_0)$ — розв'язок (1) такий, що $x(0,x_0) = x_0(\omega) \in N_0^0$ з імовірністю 1, а значить, множина N_0^t є додатно інваріантною.

Доведемо другу частину теореми. Нехай ε, γ — довільні додатні числа. Позначимо через $U_\varepsilon(N_0^t)$ ε-окіл множини N_0^t. Оскільки N_0 — компакт, то можна вважати, що $U_\varepsilon(N_0^t) \subset R_+^1 \times \overline{D}$. З урахуванням (5) аналогічно (9) одержимо

$$V(t, x(t, x_0)) \le V(t_0, x_0) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} (BC_2 |\xi(t)| - C_1)\, ds \right\}, \qquad t \ge 0. \tag{10}$$

Використовуючи (6) і той факт, що процес $|\xi(t)|$ задовольняє закон великих чисел, виберемо $T > 0$ так, щоб при $t \ge T$ виконувалась нерівність

$$P\left\{ \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |\xi(s)|\, ds > \frac{C_1}{BC_2} \right\} < \gamma. \tag{11}$$

Після цього виберемо число $A > 1$ настільки великим, щоб

$$P\left\{ BC_2 \int_{t_0}^{T} |\xi(s)|\, ds > \ln A \right\} < \gamma. \tag{12}$$

Нарешті, вкажемо δ-окіл множин $N_0^{t_0}$ такий, щоб $V(t_0, x_0) \le \dfrac{V_\varepsilon}{A}$ $\forall x_0 \in$ $\in U_\delta(N_0^{t_0})$. За лемою з [2, с. 61] такий вибір δ завжди можливий.

Розглядаючи тепер окремо випадки $t < T$ і $t \ge T$, одержуємо, що при $x_0 \in$ $\in U_\delta(N_0^{t_0})$ і всіх $t \ge t_0$ із (10)–(12) випливає нерівність

$$P\{\rho(x(t, x_0) N_0^t) > \varepsilon\} \le P\{V(t, x(t, x_0)) \ge V_\varepsilon\} < \gamma,$$

яка доводить стійкість за ймовірністю множини N_0^t.

Для доведення асимптотичної стійкості в цілому відмітимо, що

$$P\left\{ \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |\xi(s)|\, ds > \frac{C_1}{BC_2} \right\} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

А тому $V(t, x(t, x_0)) \to 0$, $t \to \infty$, за ймовірністю. Випадок $\rho(x(t, x_0) N_0^t)$ не прямує до нуля при $t \to \infty$ за ймовірністю, що призводить до суперечності з першою з умов (5). Теорему доведено.

Зауваження. Друга з нерівностей (4) показує, що на інваріантній множині $V(t, x) = 0$ дія процесу $\xi(t)$ анулюється. Дану умову можна послабити, але повністю її зняти не можна, що підтверджує наступний приклад.

***Приклад* 1.** Розглянемо одновимірну систему $\dfrac{dx}{dt} = -x + \xi(t)$. Функція $V(x) = x^2$ задовольняє в околі нуля всі умови, крім другої умови (4). Очевидно, що множина $x = 0$ не є інваріантною для даної системи.

***Приклад* 2.** Розглянемо збурене рівняння Льєнара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega). \tag{13}$$

Тут $\sigma(x, \dot{x})$ характеризує інтенсивність зовнішніх випадкових сил, що діють на систему. Нехай при деякому $x_0 > 0$ в області $|x| > x_0$ виконуються умови

$$0 < C_1 < \frac{g(x)}{x} < C_2, \qquad 0 < C_3 < f(x) < C_4.$$

Позначимо

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt,$$

$$W(x, y) = (F(x) - \gamma x)y + G(x) + \int_0^x f(t)(F(t) - \gamma t)dt + 1 + \frac{y^2}{2}.$$

Тоді якщо ввести функцію

$$V(x, y) = \begin{cases} [W(x, y)]^{\alpha} - C & \text{при } [W(x, y)]^{\alpha} > C; \\ 0 & \text{при } [W(x, y)]^{\alpha} \le C, \end{cases}$$

то при належному виборі α, γ, C можна показати, аналогічно [1, с. 41], що $V(x, y)$ задовольняє всі умови другої частини теореми (перша із умов (5) випливає з того, що $V(x, y) \to \infty$, $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$). Отже, якщо $\|\sigma(x, y)\| \le$ $\le C_5 V(x, y)$, то множина $V(x, y) = 0$ є інваріантною для (13). Якщо випадковий процес $\xi(t)$ задовольняє умови теореми з належним чином вибраними константами, то дана множина є асимптотично стійкою за ймовірністю.

Розглянемо інваріантні множини для систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, \xi(t)). \tag{14}$$

Нехай M — деяка замкнена множина із R^{n+1}, непорожня при будь-якому $t \in$ $\in R^1$.

Візьмемо довільне $t_0 \in R^1$. Позначимо $\tau_+(t_0, x_0) = \inf\limits_{t > t_0} \{(t, x(t, x_0)) \notin M\}$ і $\tau_-(t_0, x_0) = \sup\limits_{t < t_0} \{(t, x(t, x_0)) \notin M\}$; τ_+, τ_- будуть марковськими моментами відносно потоків σ-алгебр $F_t^+ = \bigcap_{s \ge t} F_s$, $F_t^- = \bigcap_{s \le t} F_s$, де F_s — мінімальна σ-алгебра, породжена випадковими величинами $x_0(\omega)$ і $\xi(u)$ при $u \in$ $\in [t_0, s]$ в першому перетині і відповідно при $u \in [s, t_0]$ у другому перетині множин.

Означення. *Будемо говорити, що множина* M *є локально інваріантною для системи* (14), *якщо при* $(t_0, x_0(\omega)) \in M$ $\tau_-(t_0, x_0) < \tau_+(t_0, x_0)$; *при цьому одне з них може дорівнювати* t_0.

Вірна теорема.

Теорема 2. *Якщо для* (1) *існує в* $R^1 \times \overline{D}$ *невід'ємна функція Ляпунова* $V(t, x)$ *така, що*

$$\frac{d^0 V}{dt} \le C_1 V, \qquad \|\sigma(t, x)\| \le C_2 V(t, x),$$

то множина $V(t, x) = 0$, $x \in D$, *якщо вона не порожня, є локально інваріантною для* (3).

Доведення. Нехай $(t_0, x_0(\omega))$ з імовірністю 1 належить множині нулів $V(t, x)$, $x \in D$. Отже, $x(t, x_0) \in D$ при $t \in [t_0, \tau(\omega))$. На цьому інтервалі, аналогічно теоремі 1, маємо оцінку

$$V(t, x(t, x_0)) \le V(t_0, x_0) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} (B_D C_2 |\xi(s)| + C_1)\, ds \right\},$$

з якої випливає доведення теореми.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 350 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Одержано 27.10.97