УДК 517.9

М. Илолов (Таджик. ун-т, Душанбе),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We obtain conditions for the existence, uniqueness, and smoothness of the toroidal manifolds of differential equations with unbounded operator coefficients.

Одержано умови існування, єдиності та гладкості тороїдальних многовидів диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами.

Вопросы существования инвариантных тороидальных многообразий конечномерных линейных систем дифференциальных уравнений, свойства гладкости и устойчивости этих многообразий, теория возмущений таких многообразий для нелинейных систем рассматривались в монографии [1]. В работе [2] изложены соответствующие результаты, связанные с применением метода функций Грина задачи об инвариантных торах в случае счетных систем дифференциальных уравнений.

Настоящая работа посвящена общим достаточным условиям существования, единственности и гладкости инвариантных торов дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в абстрактном пространстве. Конкретные результаты для уравнений с частными производными получаются при соответствующем выборе пространства и операторов. Трактовка уравнений с частными производными как эволюционных уравнений в бесконечномерных пространствах восходит к классическим трудам [3 – 5]. Мы используем здесь подход, связанный с понятием секториального оператора и изложенный в [6].

1. Обозначения и основные понятия. Некоторые сведения из теории секториальных операторов. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|$. Обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$, где X и Y — банаховы пространства, пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y.

Для линейного, вообще говоря, неограниченного оператора L введем обозначения: $D(L)$ — область определения оператора L; $R(L)$ — множество значений (образ) оператора L; $\sigma(L)$ — спектр оператора L.

Пусть A — секториальный оператор в банаховом пространстве X, тогда $-A$ порождает аналитическую полугруппу $\{e^{-At}\}$, $t \geq 0$. Пусть $0 \leq \alpha < 1$. Для секториального оператора A оператор (дробная степень) $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ и $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$. Положим для каждого $\alpha \geq 0$ $X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha})$ и наделим пространство X^{α} нормой графика $\|x\|_{\alpha} = \|A_1^{\alpha}x\|$, $x \in X^{\alpha}$, где $A_1 = A + aI$, причем a выбирается так, чтобы $\operatorname{Re}\sigma(A_1) > 0$. Здесь и далее I — тождественный оператор, R — числовая ось.

Приведем две теоремы из [6], которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 1 [6]. *Пусть A — секториальный оператор в X, $0 \leq \alpha < 1$ и отображение P: $R \to \mathcal{L}(X^{\alpha}, X)$ непрерывно в смысле Гельдера.*

Тогда для любых $x_0 \in X$ и $\tau \in R$ существует единственное решение $x(t) = x(t, \tau, x_0)$ задачи

$$\frac{dx}{dt} = (-A + P(t))x \quad \text{при} \quad \tau < t \in R, \quad x(\tau) = x_0 \in X$$

и $x_0 \to x(t, \tau, x_0)$ есть линейное ограниченное отображение в X, так что можно записать

© М. ИЛОЛОВ, А. М. САМОЙЛЕНКО, 1998

$$x(t, \tau, x_0) = T(t, \tau)x_0, \qquad \tau \le t \in R.$$

Это семейство эволюционных операторов $\{T(t, \tau), \tau \le t\}$ *имеет следующие свойства:*

a) $T(\tau, \tau) = I$, $T(t, s)T(s, \tau) = T(t, \tau)$, $\tau \le s \le t$;

b) $T(t, \tau)$, $\tau \ge t$, *сильно непрерывно по* t, τ *как отображение со значениями в* $\mathcal{L}(X^\beta)$ *при любом* $0 \le \beta < 1$;

c) существует постоянная C, *зависящая только от* A, α, t_0 *и* $\sup_t \|P(t)\|$, *такая, что для* $x \in D(A^2)$ *и* $0 \le \beta$, $\gamma < 1$

i) $\|T(t, \tau)x\|_\beta \le \dfrac{C}{1-\beta}(t-\tau)^{(\gamma-\beta)_-}\|x\|_\gamma$, *здесь* $(\gamma-\beta)_- = \min\{\gamma-\beta, 0\}$ *при* $\beta<1$ *и* $\tau < t \in R$;

ii) $\|T(t, \tau)x - x\|_\beta \le \dfrac{c}{(1-\beta)^\theta}(t-\tau)^\theta\|x\|_{\beta+\theta}$, *при* $\theta > 0$, $\beta + \theta \le 1$;

d) если

$$\|P(t) - P(s)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)} \le Q|t-s|^q \quad \text{на} \quad R,\ 0 < q \le 1, \tag{1}$$

то при $0 \le \beta < q < 1-\alpha$, $t > \tau$ *и* C *таком же, как в условии c)*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}T(t, \tau)x\right\|_\beta = \|(A - P(t))T(t, \tau)x\|_\beta \le$$

$$\le C\left(\frac{1}{q(1-\alpha-q)^2} + \frac{Q}{q-\beta}\right)(t-\tau)^{\gamma-\beta-1}\|x\|_\gamma.$$

Теорема 2 [6]. *Пусть* A *и* $P(t)$ *удовлетворяют предположениям теоремы* 1 *при* $t \in R$ *и* $x_0 \in X$, $f: R \to X$ — *локально-гельдерово отображение такое, что* $\int_\tau^{\tau+p}\|f(s)\|ds < \infty$ *для некоторого* $p > 0$ *и любого* $\tau < \infty$.

Тогда существует единственное решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = (-A + P(t))x + f(t), \qquad x(\tau) = x_0,$$

а именно:

$$x(t) = T(t, \tau)x_0 + \int_\tau^t T(t, s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

2. Существование инвариантного тора. Обозначим через $C^\nu(\mathcal{T}_m, X)$ пространство всех $[\nu]$ раз непрерывно дифференцируемых функций из тора $\mathcal{T}_m$ в банахово пространство X, у которых производная порядка $[\nu]$, $\nu \ge 0$, удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = \nu - [\nu]$, если ν — нецелое. Норма в $C^\nu(\mathcal{T}_m, X)$ определяется по формуле

$$\|g\|_{C^\nu(\mathcal{T}_m, X)} = \sum_{k=0}^{[\nu]} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m}\left\|D^k g\right\| + \sup_{\varphi \ne \psi}\frac{\left\|D^{[\nu]}g(\varphi) - D^{[\nu]}g(\psi)\right\|}{\|\varphi - \psi\|^\alpha}$$

(последний член отсутствует, если ν — целое); $C^k_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m, X)$ — пространство всех функций из $C^k(\mathcal{T}_m, X)$, у которых k-я производная удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим на прямом произведении $\mathcal{T}_m \times X$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = (-A + P(\varphi))x + f(\varphi), \tag{3}$$

где $a(\varphi) \in C^k(\mathcal{T}_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x \in D(A) \subseteq D(P(\varphi)) = X$, $a(\varphi)$, $f(\varphi)$ и $P(\varphi)$ — 2π-периодические по каждой φ_i, $i = \overline{1, m}$, отображения.

Пусть выполняются следующие условия:

1) A — секториальный оператор;

2) для $0 \le \alpha < 1$ отображение $\varphi \to P(\varphi) \in C^{\nu}\big(\mathcal{T}_m, \mathcal{L}(X^{\alpha}, X)\big)$;

3) для каждого $t > 0$ существует функция $0 < k(t) < \infty$ такая, что

$$\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| P(\varphi) e^{-At} \right\| < k(t), \qquad \int_0^1 k(t)\,dt < \infty; \tag{4}$$

4) отображение $f(\varphi) \in C^{\nu}(\mathcal{T}_m, X)$, причем

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \| f(\varphi) \| d\varphi_1 \ldots d\varphi_m < \infty. \tag{5}$$

Условия 1 – 3 являются достаточными для того, чтобы при каждом фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ линейный оператор $-A + P(\varphi)$ действовал из X^{α} в X и представлял собой „возмущение" секториального оператора A, сохраняющее свойство быть производящим оператором сильно-непрерывной полугруппы. Неравенство (4) обеспечивает эту „секториальную" устойчивость. С другой стороны, в рамках сформулированных условий существует единственное решение $\varphi(t, \overline{\varphi}) = \varphi_t(\overline{\varphi})$ первого уравнения в системе (3) такое, что $\varphi_0(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}$ — произвольный постоянный вектор $\mathcal{T}_m$. Подставляя $\varphi_t(\varphi)$ во второе уравнение системы (3), получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = (-A + P(\varphi_t(\varphi)))x + f(\varphi_t(\varphi)). \tag{6}$$

Условия 1 – 4 гарантируют с учетом утверждений теорем 1, 2 существование и единственность решения неоднородного уравнения (6) при любом $f(\varphi_t(\varphi))$, удовлетворяющем условию (5). Кроме того, существует эволюционный оператор

$$T(t, \tau, \varphi) = T_{\tau}^{t}(\varphi), \qquad T_{\tau}^{t}(\varphi) = I,$$

соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (-A + P(\varphi_t(\varphi)))x. \tag{7}$$

Из принадлежности функции $a \in C^k(\mathcal{T}_m)$, оператора $P(\varphi) \in C^k(\mathcal{T}_m, \mathcal{L}(X^{\alpha}, X))$ и утверждений a) – d) теоремы 1 следует, что $\varphi_t(t) - \varphi$ и $T_{\tau}^{t}(\varphi)$ также принадлежат пространству $C^k(\mathcal{T}_m)$ и $C^k(\mathcal{T}_m, \mathcal{L}(X))$ соответственно для всех $t, \tau \in R$ и любого $k \ge 1$.

Докажем следующее свойство эволюционного оператора:

$$T_{\tau}^{t}(\varphi_z(\varphi)) = T_{\tau+z}^{t+z}(\varphi), \qquad t,\ \tau,\ z \in R, \tag{8}$$

используемое в дальнейших рассуждениях.

Решение первого уравнения системы (3) удовлетворяет соотношению

$$\varphi_t(\varphi_\tau(\varphi)) = \varphi_{t+\tau}(\varphi)$$

при любых $t, \tau \in R$. Так как эволюционный оператор $T_\tau^t(\varphi)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{dT_\tau^t(\varphi)}{dt} = (-A + P(\varphi_t(\varphi)))T_\tau^t(\varphi), \qquad t, \tau \in R,$$

то, заменяя в нем φ на $\varphi_z(\varphi)$, получаем соотношение

$$\frac{dT_\tau^t(\varphi_z(\varphi))}{dt} = (-A + P(\varphi_t(\varphi_z(\varphi))))T_\tau^t(\varphi_z(\varphi)) = \left(-A + P\left(\varphi_{t+z}(\varphi)\right)\right)T_\tau^t(\varphi_z(\varphi))$$

для всех $t, \tau \in R$. Последнее означает, что $T_\tau^t(\varphi_z(\varphi))$ является эволюционным оператором уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \left(-A + P\left(\varphi_{t+z}(\varphi)\right)\right)x,$$

принимающим при $t = \tau$ значение I. То же свойство имеет и оператор $T_{\tau+z}^{t+z}(\varphi)$. Это возможно лишь при совпадении операторов $T_\tau^t(\varphi_z(\varphi))$ и $T_{\tau+z}^{t+z}(\varphi)$, что и доказывает равенство (8).

Пусть

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} T_\tau^0(\varphi)F(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при} \quad \tau \le 0; \\ -T_\tau^0(\varphi)(I - F(\varphi_\tau(\varphi))) & \text{при} \quad \tau > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $F(\varphi)$ является 2π-периодической по каждой φ_i, $i = \overline{1, m}$, и непрерывной по φ оператор-функцией.

Оператор-функцию $G_0(\tau, \dot{\varphi})$ назовем оператор-функцией Грина однородной системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = (-A + P(\varphi))x, \tag{10}$$

если справедливо неравенство

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \le Ne^{-\delta|\tau|}, \tag{11}$$

где N, δ не зависят от φ.

Пусть

$$G_t(\tau, \varphi) = \begin{cases} T_\tau^t(\varphi)F(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при} \quad \tau \le t; \\ -T_\tau^t(\varphi)(I - F(\varphi_\tau(\varphi))) & \text{при} \quad \tau > t. \end{cases}$$

Тогда из (8) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) f(\varphi_t(\varphi_\tau(\varphi))) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{12}$$

Из неравенства (11) и равенства (12) следует, что функция

$$x_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau, \qquad t \in R,$$

является ограниченным решением уравнения (6).

При $t = 0$ положим

$$x_0(\varphi) = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{13}$$

и покажем, что $u(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера по φ. Для этого с учетом условия (1) теоремы 1 получим некоторые оценки разности $G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \overline{\varphi})$. Поскольку $G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \overline{\varphi})$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{dt}(G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \overline{\varphi})) =$$

$$= (-A + P(\varphi_t(\varphi)))[G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \overline{\varphi})] + [P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_t(\overline{\varphi}))]G_t(\tau, \overline{\varphi}),$$

то

$$G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \overline{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(t_1, \varphi)\left[P\left(\varphi_{t_1}(\varphi)\right) - P\left(\varphi_{t_1}(\overline{\varphi})\right)\right]G_{t_1}(\tau, \overline{\varphi})\, dt_1$$

или

$$G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \overline{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(t_1, \varphi)\left[P\left(\varphi_{t_1}(\varphi)\right) - P\left(\varphi_{t_1}(\overline{\varphi})\right)\right]G_{t_1}(\tau, \overline{\varphi})\, dt_1. \tag{14}$$

Предположим теперь, что $a(\varphi)$, $f(\varphi)$ и $P(\varphi)$ принадлежат пространству $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m, X)$ и $C_{\mathrm{Lip}}\left(\mathcal{T}_m, \mathcal{L}(X^\alpha, X)\right)$ соответственно, т. е.

$$\| a(\varphi) - a(\overline{\varphi}) \| \le \lambda_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \|, \qquad \| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)} \le \lambda_2 \| \varphi - \overline{\varphi} \|$$

и

$$\| f(\varphi) - f(\overline{\varphi}) \| \le \lambda_3 \| \varphi - \overline{\varphi} \|,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ и не зависят от φ и $\overline{\varphi} \in \mathcal{T}_m$.

Тогда для любого положительного ν

$$\| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \|^\nu \le \lambda_2^\nu \| \varphi - \overline{\varphi} \|^\nu, \qquad \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| P(\varphi) \| = p < \infty,$$

и так как $\| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \| \le 2p$, то

$$\| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \|^{\nu+1} \le 2p\lambda_2^\nu \| \varphi - \overline{\varphi} \|^\nu,$$

или, окончательно,

$$\| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \| \le K \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{\nu/(\nu+1)}, \qquad K = \left(2p\lambda_2^\nu\right)^{\nu/(\nu+1)}. \tag{15}$$

Аналогично (15), получаем оценку

$$\| f(\varphi) - f(\overline{\varphi}) \| \le K_1 \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{\nu/(\nu+1)}, \qquad K_1 = \left(2d\lambda_3^\nu\right)^{1/(\nu+1)}. \tag{16}$$

Из (14) следует

$$\| \varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\overline{\varphi}) \| \le e^{\lambda_1 |t|} \| \varphi - \overline{\varphi} \|, \qquad t \in R. \tag{17}$$

Оценим разность $u(\varphi) - u(\overline{\varphi})$ с учетом неравенств (15) – (17). Имеем

$$\| u(\varphi) - u(\overline{\varphi}) \| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \overline{\varphi}) f(\varphi_\tau(\overline{\varphi})) d\tau \right\| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \overline{\varphi}) \| \| f(\varphi_\tau(\varphi)) \| d\tau +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\overline{\varphi})\|\|f(\varphi_\tau(\varphi))-f(\varphi_\tau(\overline{\varphi}))\|d\tau \le$$

$$\le K^{(1)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-\delta+\lambda_1\nu/(\nu+1))|t_1|}\|\varphi-\overline{\varphi}\|^{\nu/(\nu+1)}dt_1+$$

$$+K^{(2)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-\delta+\lambda_1\nu/(\nu+1))|t_1|}\|\varphi-\overline{\varphi}\|^{\nu/(\nu+1)}dt_1 \le K^{(0)}\|\varphi-\overline{\varphi}\|^{\nu/(\nu+1)},$$

$K^{(0)}=\mathrm{const}>0$ и ν выбирается из условия $\delta/\lambda_1>\nu/(\nu+1)$.

Итак, функция $u(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\nu/(\nu+1)$.

Интеграл (13) задает некоторый оператор M в пространстве $C^\nu(\mathcal{T}_m, X)$:

$$Mf(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau. \tag{18}$$

Покажем, что множество $x=u(\varphi)=Mf(\varphi)$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$, определяет инвариантный тор системы уравнений (3). Для этого рассмотрим функцию

$$x(t,\varphi)=u(\varphi_t(\varphi)).$$

Согласно равенству (18) для $u(\varphi_t(\varphi))$ имеем представление

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi_t(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)))d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau+t,\varphi)f\big(\varphi_{\tau+t}(\varphi)\big)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

дифференцируя которое по t, находим

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = F(\varphi_t(\varphi))f(\varphi_t(\varphi)) + (I-F(\varphi_t(\varphi)))f(\varphi_t(\varphi)) +$$

$$+P(\varphi_t(\varphi))\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau = P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi))$$

для любого $t\in R$.

Таким образом, существование функции Грина уравнения (7) гарантирует существование инвариантного тора системы (3) для произвольной функции $f\in C^\nu(\mathcal{T}_m, X)$.

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть система уравнений* (3) *такова, что выполняются условия:*

1) *функции* $a(\varphi)$, $P(\varphi)$, $f(\varphi)$ *удовлетворяют условию Липшица и*

$$\|a(\varphi)-a(\overline{\varphi})\| \le \lambda_1\|\varphi-\overline{\varphi}\|;$$

2) *для каждого* $t>0$ *существует функция* $0<k(t)<\infty$ *такая, что*

$$\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\left\|P(\varphi)e^{-At}\right\| < k(t), \qquad \int_0^1 k(t)dt < \infty;$$

3) *существует оператор-функция Грина задачи об инвариантных торах* $G_0(\tau, \varphi)$, *удовлетворяющая неравенству* (11).

Тогда система уравнений (3) *при* $\delta/\lambda_1 > \nu/(\nu+1)$ *имеет инвариантное тороидальное многообразие* (13), *удовлетворяющее условию Гельдера по* φ *с показателем* $\nu/(\nu+1)$.

3. Свойства гладкости инвариантного тора. Вопрос о зависимости гладкости инвариантного тора

$$x = u(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{19}$$

системы (3) от гладкости правой части требует самостоятельного анализа в конечномерном случае. Случай же неограниченных операторных коэффициентов вносит дополнительные трудности.

Справедливо утверждение о гладкости тора.

Теорема 4. *Пусть* $a \in C^k(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi) \in C^k\big(\mathcal{T}_m, \mathcal{L}(X^\alpha, X)\big)$, $k \geq 1$. *Тогда если для произвольной функции* $f \in C^k(\mathcal{T}_m, X)$ *оператор-функция Грина системы* (3) *удовлетворяет неравенству*

$$\| G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) \|_k \leq N e^{-\delta|\tau|} \| f \|_k, \qquad \tau \in R, \tag{20}$$

где $\| \cdot \|_k = \| \cdot \|_{C^k(\mathcal{T}_m, X)}$, $\varphi_t(\varphi)$ — *решение первого уравнения системы* (3) *при произвольном* $\varphi \in \mathcal{T}_m$, N *и* γ — *положительные постоянные, не зависящие от* φ, *то инвариантный тор* (19) *системы* (3) *принадлежит пространству* $C^k(\mathcal{T}_m, X)$ *и удовлетворяет условию*

$$\| u \|_k \leq 2N\delta^{-1} \| f \|_k. \tag{21}$$

Доказательство теоремы очевидным образом вытекает из оценки (20) и интегрального представления функции $u(\varphi)$, определяющей тор (19):

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau.$$

Согласно теореме 4 гладкость инвариантного тора (19) системы (3) существенно зависит лишь от свойств оператор-функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ и решений $\varphi_t(\varphi)$ системы, задающей поток на торе. Считая функции a, P, f достаточно гладкими, выясним условия, обеспечивающие выполнение неравенства (20).

Обозначим через $[L]$ множество положительно определенных симметрических линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Пусть $S(\varphi)$ при фиксированном φ принадлежит $[L]$. Следуя [1], введем числа $\beta_1(\varphi)$ и $\beta_2(\varphi)$.

Пусть выполнено условие

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \beta_1(\varphi) = \beta_{01} > 0, \tag{22}$$

где $\beta_1(\varphi)$ определяется с помощью неравенства

$$\inf_{S \in [L]} \max_{\| x \| = 1} \frac{\big(\big[S(\varphi) P(\varphi) + \dot{S}(\varphi)/2\big] x, x\big)}{(S(\varphi) x, x)} \leq -\beta_1(\varphi). \tag{23}$$

Здесь $\dot{S}(\varphi)$ определяется операторным равенством

$$\lim_{t \to 0} \frac{d(S(\varphi_t(\varphi)))}{dt} = \dot{S}(\varphi). \tag{24}$$

Пусть, далее, число $\beta_2(\varphi)$ определяется неравенством

$$\sup_{S_1 \in [A_m]} \max_{\|\psi\|=1} \frac{\left(\left[S_1(\varphi)\partial a(\varphi)/\partial\varphi + \dot{S}_1(\varphi)/2\right]\psi, \psi\right)}{(S_1(\varphi)\psi, \psi)} \geq \beta_2(\varphi), \tag{25}$$

где $[A_m]$ — множество $(m \times m)$-мерных положительно определенных симметрических матриц, принадлежащих пространству $C^1(\mathcal{T}_m)$. Соответствующая матрица $\dot{S}_1(\varphi)$ определяется аналогично (24).

Теорема 5. *Пусть выполняется неравенство* (22) *и*

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{T}_m} [\beta_2(\varphi) + k\beta_1(\varphi)] > 0.$$

Тогда инвариантный тор (19) *системы* (3) *принадлежит пространству* $C^k(\mathcal{T}_m, X)$.

Доказательство теоремы аналогично конечномерному случаю (см. [1]).

4. Пример. Рассмотрим в прямом произведении окружности $\mathcal{T}_1$ и отрезка $[0, l]$ оси R систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -\sin\varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sin\varphi \end{aligned} \tag{26}$$

с начальными условиями $v(x,0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ и граничными условиями $v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$.

Определим линейный оператор A следующим образом:

$$Ah(x) = -\frac{d^2h(x)}{dx^2}, \qquad 0 \leq x \leq l,$$

где h — гладкая функция на $[0, l]$ с $h(0) = 0$, $h(l) = 0$. Для таких функций h и r

$$(Ah, h) = -\int_0^l h''(x)h(x)dx = -\int_0^l (h'(x))^2 dx \geq 0$$

и

$$(Ah, r) = -\int_0^l h''(x)r(x)dx = (h, Ar),$$

т. е. оператор A является расширением самосопряженного плотно определенного в пространстве $L^2(0, l)$ линейного оператора. Спектр состоит из простых собственных значений $\lambda_n = (\pi n/l)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, с соответствующими собственными функциями

$$h_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Ясно, что оператор A является секториальным оператором в пространстве $X = L^2(0, l)$.

Систем (26) записывается теперь как система уравнений заданной в прямом произведении окружности $\mathcal{T}_1$ и банахова пространства $L^2(0, l)$ в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi,$$
$$\frac{dv}{dt} = -Av + \sin\varphi. \tag{27}$$

Для системы (22) оператор-функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$ с оператор-функцией $F(\varphi) = 1$ имеет вид

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} E(x, \xi, \tau) & \text{при} \quad \tau \le 0; \\ 0 & \text{при} \quad \tau > 0, \end{cases}$$

где

$$E(x, \xi, \tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n/l)^2\tau} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi n}{l}\xi.$$

Инвариантный тор определяется (см., например, [7]) уравнением

$$v = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{l} E(x, \xi, \tau)\sin\varphi_\tau(\varphi)\,d\xi\,d\tau, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_1.$$

Непосредственный подсчет показывает, что при $\varphi = 0$ предел

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{d\,u(\varphi)}{d\varphi} = -\infty.$$

Это означает, что инвариантный тор системы (27) может быть непрерывен даже в случае, когда функции a, P, f являются аналитическими по φ.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: В 3-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 895 с.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 467 с.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

Получено 13.11.97