УДК 517. 926

А. Ю. Колесов (Ярослав. ун-т),
Е. Ф. Мищенко (Мат. ин-т РАН, Москва),
Н. Х. Розов (Моск. ун-т)

ЯВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ БУФЕРНОСТИ В СИСТЕМАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ*

We investigate the problem of parametric perturbation of oscillations in systems of parabolic and hyperbolic equations with a small coefficient of diffusion. We establish the phenomenon of the parametric buffer property, i.e., the existence of arbitrary fixed number of stable periodic solutions under the appropriate choice of parameters of equations.

Досліджується проблема параметричного збурення коливань у системах параболічних і гіперболічних рівнянь з малим коефіцієнтом дифузії. Встановлено феномен параметричної буферності, тобто існування при відповідному виборі параметрів рівнянь довільного фіксованого числа стійких періодичних розв'язків.

Введение. Будем говорить, что в некоторой системе дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, с бесконечномерным фазовым пространством наблюдается *буферность*, если существуют наборы параметров, при которых в данной системе имеется произвольное наперед заданное конечное число устойчивых циклов.

В системах параболических уравнений типа реакция-диффузия впервые это интересное явление численными методами обнаружено в [1]. Ю. С. Колесов [2] поставил и решил проблему теоретического объяснения данного явления.

В случае гиперболических краевых задач изучение буферности начато (по инициативе Ю. С.Колесова) в [3], продолжено в [4, 5], а свое логическое завершение получило в [6]. Суммируя результаты этих исследований, можно утверждать, что если в параболических системах буферность встречается весьма редко и связана с некоторой сингулярностью, то в гиперболических краевых задачах она встречается очень часто. Более того, в некоторых гиперболических уравнениях наблюдается даже *гипербуферность* [6], связанная с существованием счетного числа устойчивых периодических по времени решений.

Настоящая статья посвящена теоретическому рассмотрению нового феномена, наблюдающегося в параболических и гиперболических задачах, — *параметрической буферности*.

Напомним, что физические основы теории параметрических колебаний представлены в классических работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Для колебательных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, параметрический резонанс изучен в [7]. Для некоторых классов волновых уравнений формализм построения возбуждаемых параметрических колебаний предложен в [8]. Поскольку теория линейного параметрического резонанса к настоящему времени развита достаточно хорошо (см., например, [9, 10]), то результатам из [8] можно придать строгий смысл.

В [11, 12] начато изучение нелинейного параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах уравнений параболического и гиперболического типа с малыми коэффициентами диффузии. Как удачно отметил Ю. С. Колесов [13], мотивировкой для таких постановок задач служит то важное обстоятельство, что в данном случае „мы находимся как бы в окрестности наиболее глубокой особенности". А это, в свою очередь, может позволить в полном объеме выявить все динамические эффекты, вызванные параметрическим внешним воздействием.

---

* Выполнена при частичной поддержке РФФИ и INTAS.

Плодотворность указанного подхода еще раз иллюстрируют и результаты настоящей статьи, где с его помощью исследуется явление параметрической буферности. В частности, показано, что в отличие от рассмотренной в [1–6] *автоколебательной буферности,* параметрическая буферность в равной мере присуща как параболическим, так и гиперболическим уравнениям и проявляется при уменьшении коэффициента диффузии.

1. Постановка задачи и основной результат. 1.1. ***Описание объектов исследования.*** Начнем с описания исследуемого класса гиперболических систем. На отрезке $0 \le x \le \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u''_{tt} + (A_0 + \varepsilon A_1)u'_t + (B_0 + \varepsilon B_1(\tau))u = \varepsilon D u''_{xx} + f(u, u'_t), \tag{1}$$

$$u'_x\big|_{x=0} = u'_x\big|_{x=\pi} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u \in R^m, m \ge 2;$ $0 < \varepsilon << 1;$ A_0, B_0, D — постоянные матрицы, причем $D^* = D,$ $D > 0;$ π-периодическая по τ (где $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t,$ $\delta = \text{const}$) гладкая матрица $B_1(\tau)$ имеет на периоде нулевое среднее значение; тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $f(u, v) \in C^\infty$ начинается с квадратичных слагаемых. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий (u, u'_t)) краевой задачи (1), (2) используем $\overset{\circ}{W}{}_2^2 \times W_2^1,$ где $\overset{\circ}{W}{}_2^2 = \overset{\circ}{W}{}_2^2([0,\pi]; R^m)$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (2).

Напомним, что понятие фазового пространства позволяет без принципиальных изменений рапространить на бесконечномерный случай основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, касающиеся устойчивости по Ляпунову, интегральных многообразий, теоремы об устойчивости по первому приближению и т.д. Ниже будем пользоваться соответствующими фактами из теории краевых задач без дополнительных пояснений.

Сформулируем ограничения, при которых будет изучаться проблема существования и устойчивости периодических по t решений краевой задачи (1), (2), бифурцирующих из ее нулевого состояния равновесия. Первое ораничение касается автоколебательных свойств уравнения (1) при $\varepsilon = 0$.

***Условие* 1**. Предположим, что квадратичный пучок матриц $\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0$ имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\pm i,$ т. е.

$$(-I + i A_0 + B_0)a = 0, \ (-I - i A_0^* + B_0^*)b = 0,$$

$$(2ia + A_0 a, b) = 1, \ (2ia + A_0 a, \bar{b}) = 0, \tag{3}$$

где $(*, *)$ — обычное скалярное произведение в комплексификации R^m; остальные его собственные значения лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Следующее ограничение обеспечивает нужное согласование „обыкновенной" и „диффузионной" частей в уравнении (1).

***Условие* 2**. Предположим, что для всех $z > 0$ собственные значения квадратичного пучка матриц

$$\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0 + zD \tag{4}$$

лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и при малых z те собственные значения $\lambda(z),$ $\bar{\lambda}(z)$ пучка (4), для которых $\lambda(0) = i$ (их существование вытекает из условия 1), отходят от мнимой оси общим образом, т. е. выполняются условия

$$-\mathrm{Re}\,\lambda'_z\big|_{z=0} = \mathrm{Re}\,(Da, b) > 0. \tag{5}$$

Перед формулировкой еще одного ограничения предположим для простоты, что все собственные значения $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, матрицы D различны; обозначим через e_k, $k = 1, \dots, m$, соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов.

***Условие* 3**. Предположим, что

$$(A_0 e_k, e_k) > 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{6}$$

Рассмотрим связь условий 2 и 3. Заметим, что собственные значения $\lambda_k(z)$, $\overline{\lambda}_k(z)$, $k = 1, \dots, m$, пучка (4) допускают асимптотику

$$\lambda_k(z) = i\sqrt{\lambda_k z} - \frac{1}{2}(A_0 e_k, e_k) + O(z^{-1/2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

А отсюда и из условия 2 автоматически следует

$$(A_0 e_k, e_k) \geq 0, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Строгие же неравенства (6) гарантируют, что с ростом z собственные значения $\lambda_k(z)$, $\overline{\lambda}_k(z)$ не приближаются к мнимой оси. Далее отметим, что при строгом нарушении условий 2 и 3, когда при некотором $z_0 > 0$ у пучка (4) есть собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, нулевое решение краевой задачи (1), (2) экспоненциально неустойчиво с показателем экспоненты порядка единицы. Тем самым заведомо неустойчивыми будут и все бифурцирующие из него при $\varepsilon > 0$ периодические решения, т. е. проблема параметрического возбуждения колебаний становится нелокальной.

Наконец, последнее условие — стандартные ограничения на нелинейность в уравнении (1) и на линейную часть при отсутствии внешнего воздействия (см., например, [11, 12]).

***Условие* 4**. Предположим, что $\operatorname{Re} d < 0$, $\operatorname{Re}(iA_1 a, b) > 0$, где d — комплексная ляпуновская величина уравнения, получающегося из (1) при $\varepsilon = 0$.

При сформулированных ограничениях, следуя методике работ [11, 12], параметрические колебания в краевой задаче (1), (2) будем искать в виде

$$u = \sqrt{\varepsilon}\, u_1(\tau, s, x) + \varepsilon u_2(\tau, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, s, x) + \dots, \tag{7}$$

где $s = \varepsilon t$,

$$u_1 = \xi(s, x)\, a \exp(i\tau) + \overline{\xi}(s, x)\, \overline{a} \exp(-i\tau), \tag{8}$$

a — соственный вектор из (3), ξ — неизвестная комплексная „амплитуда" колебаний, функции $u_2(\tau, s, x), u_3(\tau, s, x), \dots$ периодичны по τ с периодом 2π.

Подставляя ряд (7) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при ε, с учетом равенства (8) получаем уравнение для u_2 вида

$$\ddot{u}_2 + A_0 \dot{u}_2 + B_0 u_2 = c_0(s, x) + c_1(s, x)\exp(2i\tau) + \overline{c}_1(s, x) \exp(-2i\tau)^{\cdot} = \frac{d}{d\tau}, \tag{9}$$

где s, x считаем параметрами. Отсюда функция u_2 однозначно определяется в форме, аналогичной правой части уравнения (9). После приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ для u_3 получаем уравнение, подобное (9), но его правая часть $g(\tau, s, x)$ — сумма первых и третьих гармоник. Умножим скалярно коэффициент при $\exp(i\tau)$ в $g(\tau, s, x)$ на вектор b (см. (3)) и приравняем результат нулю. В итоге получим краевую задачу

$$\xi'_s = \kappa_0 \xi''_{xx} + \kappa_1 \xi + \kappa_2 \overline{\xi} + d\xi|\xi|^2, \quad \xi'_x\big|_{x=0} = \xi'_x\big|_{x=\pi} = 0, \tag{10}$$

где d — ляпуновская величина из условия 4,

$$\begin{gathered} \kappa_0 = (Da,.b), \qquad \kappa_1 = -(iA_1 a, b) - i\delta, \\ \kappa_2 = -M[(B_1(\tau)\bar{a}\exp(-2i\tau), b)] \end{gathered} \tag{11}$$

($M(*)$ — среднее значение), а $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно-сопряженной задаче.

Согласно предложенной Ю. С. Колесовым [13, 14] терминологии, краевую задачу (10) будем называть *квазинормальной формой* исходной краевой задачи (1), (2). Справедливо следующее утверждение [13, 14].

Теорема 1. *Предположим, что краевая задача* (10) *имеет состояние равновесия* ($\xi_0(x)$, $\bar{\xi}_0(x)$), *экспоненциально устойчивое или дихотомичное* (*в метрике фазового пространства* $\mathring{W}_2^2 \times \mathring{W}_2^2$). *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *в исходной краевой задаче* (1), (2) *этому состоянию равновесия соответствует решение с асимптотикой* (7), (8) (*при* $\xi(s, x) = \xi_0(x)$) *и с теми же свойствами устойчивости.*

Доказательство теоремы 1 практически без изменений повторяет соответствующие места из работы [14], где метод квазинормальных форм обоснован для параболического случая. Связано это с характером поведения спектра устойчивости нулевого состояния равновесия (т. е. с характером расположения собственных значений пучка матриц (4)), который аналогичен описанному в [14]. В частности, неравенство (5) обеспечивает, как и в [14], параболичность квазинормальной формы (10).

Отдельно рассмотрим скалярный случай, когда в уравнении (1) имеем $m = 1$, $D = \sigma^2$, $\sigma > 0$. Из условия 1 с необходимостью следует, что тогда $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. В качестве $B_1(\tau)$ возьмем функцию $\alpha \cos 2\tau$, $\alpha \ne 0$. Далее, используя тейлоровское разложение

$$f(u, v) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_3 v^2 + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^2 v + \beta_3 uv^2 + \beta_4 v^3 + \ldots,$$

введем в рассмотрение комплексную ляпуновскую величину

$$d = \frac{1}{2}[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \beta_2 + 3\beta_4] - \frac{i}{6}[10\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_3) + 4\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + 9\beta_1 + 3\beta_3]; \tag{12}$$

как и выше, будем считать, что $\operatorname{Re} d < 0$. Наконец, учитывая квазинормальную форму (10), заметим, что параметр d теперь задается равенством (12), а остальные параметры (см. (11)) — равенствами

$$\kappa_0 = -\frac{i\sigma^2}{2}, \qquad \kappa_1 = -\left(\frac{1}{2} + i\delta\right), \qquad \kappa_2 = \frac{i\alpha}{4}. \tag{13}$$

Отметим, что в скалярном случае условия 2 и 3 не выполняются. Точнее говоря, здесь мы сталкиваемся с максимальным вырождением: при всех $z > 0$ корни уравнения $\lambda^2 + 1 + z = 0$ чисто мнимые и, в частности, квазинормальная форма (10), в силу первого равенства (13), не является параболической. Однако, как показано в [13], теорема 1 в этом случае, по-прежнему, справедлива.

Обратимся теперь к параболическим системам. Следуя [11], в фазовом пространстве $\mathring{W}_2^2([0, \pi]; R^m)$, $m \ge 2$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t' = \varepsilon D u_{xx}'' + A_0 u + \varepsilon[A_1 + A_2(\tau)]u + F(u), \tag{14}$$

$$u_x'\big|_{x=0} = u_x'\big|_{x=\pi} = 0, \tag{15}$$

где $u \in R^m$: $0 < \varepsilon << 1$; матрица $-D$ гурвицева.

Относительно матрицы A_0 предположим, что она имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$, т. е.

$$A_0 a = ia, \qquad A_0^* b = -ib, \qquad (a, b) = 1, \qquad (\bar{a}, b) = 0,$$

а остальные ее собственные значения лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Допустим, далее, что свойства π-периодической по $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t$ матрицы $A_2(\tau)$ аналогичны свойствам матрицы $B_1(\tau)$ из уравнения (1) и тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $F \in C^\infty(R^m; R^m)$ начинается с квадратичных слагаемых. Наконец, считаем, что

$$\operatorname{Re} d < 0, \qquad \operatorname{Re}(A_1 a, b) < 0,$$

где d — комплексная ляпуновская величина уравнения, получающегося из (14) при $\varepsilon = 0$.

Подставляя в равенства (14), (15) ряд (7) с учетом (8) и действуя описанным выше образом, легко получаем квазинормальную форму (10), в которой (ср. с (11))

$$\kappa_0 = (Da, b), \qquad \kappa_1 = (A_1 a, b) - i\delta, \tag{16}$$
$$\kappa_2 = M[(A_2(\tau)\bar{a}\exp(-2i\tau), b)].$$

Из результатов (14) следует, что при дополнительном предположении о гурвицевости матрицы $A_0 - zD$ при всех $z > 0$ и при выполнении условия (5) для краевых задач (14), (15) и (10) справедливо утверждение теоремы 1.

1.2. ***Основной результат.*** Итак, вопросы существования и устойчивости периодических решений краевых задач (1), (2) и (14), (15) сводятся к аналогичным вопросам для состояний равновесия краевой задачи (10). В связи с этим актуально следующее утверждение — основной результат данной статьи.

Теорема 2 ***(о параметрической буферности).*** *Пусть в краевой задаче* (10) *параметр* d *фиксирован и удовлетворяет неравенству* $\operatorname{Re} d < 0$. *Тогда для любого натурального* n *найдутся такие наборы параметров* (*см.* (11) *и* (16))

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2): \qquad \operatorname{Re}\kappa_0 > 0, \qquad \operatorname{Re}\kappa_1 < 0, \qquad \kappa_2 \neq 0, \tag{17}$$

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2): \qquad \operatorname{Re}\kappa_0 = 0, \qquad \kappa_0 \neq 0, \qquad \operatorname{Re}\kappa_1 < 0, \qquad \kappa_2 \neq 0, \tag{18}$$

при которых краевая задача (10) *имеет не менее* n *экспоненциально устойчивых состояний равновесия.*

Сформулированная теорема решает проблему параметрической буферности как для гиперболического (в том числе и скалярного), так и для параболического случая. Заметим, что речь здесь идет именно о параметрической буферности, так как при отсутствии внешнего воздействия (при $\kappa_2 = 0$) никаких других состояний равновесий, кроме нулевого, у краевой задачи (10) нет. Действительно, если $\kappa_2 = 0$, то, умножая уравнение (10) на $\bar{\xi}$ и интегрируя результат по $0 \le x \le \pi$, убеждаемся, что любое его состояние равновесия $\xi_0(x)$ удовлетворяет равенству

$$-\operatorname{Re}\kappa_0 \int_0^\pi |\xi_0'(x)|^2\,dx + \operatorname{Re}\kappa_1 \int_0^\pi |\xi_0(x)|^2\,dx + \operatorname{Re} d \int_0^\pi |\xi_0(x)|^4\,dx = 0.$$

Отсюда с учетом неравенств $\operatorname{Re}\kappa_0 \ge 0$, $\operatorname{Re}\kappa_1 < 0$, $\operatorname{Re} d < 0$ заключаем, что $\xi_0(x) \equiv 0$.

2. Доказательство теоремы о параметрической буферности. 2.1. ***Существование диссипативных структур.*** Теорема 2 представляет собой частный случай результата исследования общей проблемы существования и устойчивости в системах параболических уравнений типа реакция-диффузия пространственно неоднородных (т. е. нетривиально зависящих от пространственной переменной) состояний равновесия — так называемых *диссипативных структур*. Для ее решения обычно используется бифуркационная теорема Тьюринга – Пригожина, в основе которой лежит открытое А. Тьюрингом [15] явление диффузионной неустойчивости пространственно однородного состояния равновесия.

Ниже изучается новый в этой тематике вопрос об особенностях динамики диссипативных структур в системах с малой диффузией, причем главная из этих особенностей — наличие в таких системах большого числа диссипативных структур, в том числе устойчивых. На этом пути, в частности, устанавливается и справедливость теоремы 2.

На отрезке $0 \le x \le \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u'_t = \nu D u''_{xx} + Au + F(u), \qquad u'_x\big|_{x=0} = u'_x\big|_{x=\pi} = 0. \tag{19}$$

Здесь $u \in R^2$; $\nu > 0$ — параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии; матрица A гурвицева, а матрица D такова, что

$$\det D > 0, \qquad \operatorname{tr} D \ge 0; \tag{20}$$

вектор-функция $F \in C^\infty(R^2; R^2)$ имеет в нуле тейлоровское разложение вида

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \ldots, \tag{21}$$

где F_2 и F_3 — квадратичная и кубическая симметричные формы. В качестве фазового пространства краевой задачи (19), как и в случае задачи (10), используем $\mathring{W}_2^2 \times \mathring{W}_2^2$.

Отметим, что к виду (19) в переменных

$$u = \operatorname{colon}(u_1, u_2), \qquad u_1 = \operatorname{Re}\xi, \qquad u_2 = \operatorname{Im}\xi,$$

преобразуется краевая задача (10), если считать, что параметр κ_0 в ней пропорционален ν и выполнено неравенство $|\kappa_1| > |\kappa_2|$, обеспечивающее гурвицевость матрицы A. Заметим, что неравенство $\operatorname{tr} D > 0$ (см. (20)) соответствует в задаче (10) параболическому случаю $\operatorname{Re}\kappa_0 > 0$, а равенство $\operatorname{tr} D = 0$ — гиперболическому случаю $\operatorname{Re}\kappa_0 = 0$, $\kappa_0 \ne 0$.

В дальнейшем будем интересоваться вопросами о существовании и устойчивости диссипативных структур краевой задачи (19), бифурцирующих из нулевого состояния равновесия. Поэтому сначала изучим свойства устойчивости последнего.

С этой целью отбросим в уравнении (19) нелинейность и применим к получившейся линейной задаче метод Фурье по функциям $\cos kx$, $k = 0, 1, \ldots$. Легко убедиться, что за устойчивость ее состояния равновесия $u = 0$ отвечает расположение спектра матриц

$$A - k^2 \nu D, \qquad k = 0, 1, \ldots . \tag{22}$$

Введем, далее, в рассмотрение квадратный многочлен

$$P(z) = \det(A - zD) \tag{23}$$

и предложим, что $P(z) > 0$ при всех $z \ge 0$. Тогда, очевидно, все матрицы (22) будут гурвицевыми, а решение $u = 0$ — экспоненциально устойчивым. С другой стороны, если многочлен (23) имеет два корня $0 < z_1 < z_2$, то решение $u = 0$ экспоненциально неустойчиво при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(z_1 / n^2,\, z_2 / n^2 \right). \tag{24}$$

Таким образом, в общем случае описание динамики по параметру v всех бифурцирующих из нуля состояний равновесия представляет собой нелокальную задачу. Однако, ее можно сделать локальной, если, например, считать в уравнении (19)

$$A = A_0 + \mu A_1, \tag{25}$$

где матрица A_0 гурвицева, A_1 произвольна, $0 < \mu << 1$ и, что самое главное, принять следующее ограничение.

***Условие* 5**. Предположим, что найдется такое $z_0 > 0$, что

$$P(z_0, 0) = P'_z(z_0, 0) = 0, \quad P'_\mu(z_0, 0) < 0, \tag{26}$$

где $P(z, \mu)$ — многочлен (23), соответствующий матрице (25).

Несложный анализ показывает, что при условиях (26) и при всех $0 < \mu << 1$ многочлен $P(z, \mu)$ имеет два корня

$$z_1(\mu) = z_0 - \Delta_1(\mu)\sqrt{\mu}, \quad z_2(\mu) = z_0 + \Delta_2(\mu)\sqrt{\mu}, \tag{27}$$

$$\Delta_j(0) = \Delta_0, \quad j = 1, 2; \quad \Delta_0 = \sqrt{(A_1 a, b)/(D a_1, b)}. \tag{28}$$

Здесь a и b — собственные векторы матриц $A_0 - z_0 D$ и $A_0^* - z_0 D^*$, соответственно, отвечающие их нулевым собственным значениям и нормированные условием $(a, b) = 1$, а a_1, $(a_1, b) = 0$, — решение системы

$$(A_0 - z_0 D) a_1 = D a. \tag{29}$$

Отметим, что из первого условия (26) вытекает равенство

$$(D a, b) = 0, \tag{30}$$

а из второго условия (26) и условия $P''_{zz}(z_0, 0) > 0$ — неравенства

$$(A_1 a, b) > 0, \quad (D a_1, b) > 0. \tag{31}$$

Следовательно, оказывается неразрешимой вырожденная система (29), а подкоренное выражение в (28) является положительным.

Для формулировки еще одного ограничения потребуется вспомогательная краевая задача

$$u'_t = (z_0 + \delta\sqrt{\mu}) D u''_{xx} + (A_0 + \mu A_1) u + F(u), \quad u'_x\big|_{x=0} = u'_x\big|_{x=\pi} = 0, \tag{32}$$

получающаяся из задачи (19) в случае (25) и при замене параметра v на $z_0 + \delta\sqrt{\mu}$; здесь δ — вспомогательный параметр (порядка единицы), отвечающий за изменение параметра v между корнями (27). Для отыскания диссипативных структур этой вспомогательной краевой задачи положим в (32)

$$u = \sqrt{\mu}\, u_1(x) + \mu u_2(x) + \mu^{3/2} u_3(x) + \ldots, \quad u_1(x) = \xi a \cos x, \tag{33}$$

где $(A_0 - z D) a = 0$, а ξ — неизвестная „амплитуда". Приравняв коэффициенты при μ и $\mu^{3/2}$, получим краевые задачи для нахождения u_2 и u_3:

$$z_0 D u''_2 + A_0 u_2 + \delta D u''_1 + F_2(u_1, u_1) = 0, \quad u'_2\big|_{x=0} = u'_2\big|_{x=\pi} = 0, \quad ' = d/dx, \tag{34}$$

$$z_0 D u''_3 + A_0 u_3 + \delta D u''_2 + A_1 u_1 + 2F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_1, u_1) = 0, \tag{35}$$
$$u'_3\big|_{x=0} = u'_3\big|_{x=\pi} = 0, \quad ' = d/dx.$$

Из анализа краевой задачи (34) с учетом равенства (30), обеспечивающего его разрешимость, вытекает формула

$$u_2 = \delta\xi a_1 \cos x + \xi^2(v + w\cos 2x), \tag{36}$$

где a_1 — решение системы (29),

$$A_0 v = -\frac{1}{2}F_2(a,a), \qquad (A_0 - 4z_0 D)w = -\frac{1}{2}F_2(a,a)$$

(см. (21)). Подставляя выражение (36) в краевую задачу (35), после некоторых преобразований убеждаемся, что условие разрешимости последней имеет вид

$$[(A_0 a, b) - \delta^2(Da_1, b)]\xi + d_0\xi^2 = 0, \tag{37}$$

где

$$d_0 = (2F_2(a,v) + F_2(a,w) + \frac{3}{4}F_3(a,a,a), b). \tag{38}$$

Условие 6. Предположим, что $d_0 < 0$.

Сформулированное условие вместе с неравенствами (31) позволяет из уравнения (37) определить при всех $|\delta| \le \Delta_0$ амплитуду

$$\xi(\delta) = \sqrt{-\left[(A_1 a, b) - \delta^2(Da_1, b)\right]/d_0}. \tag{39}$$

Лемма 1. *При условиях 5 и 6 найдется такое достаточно малое* $\mu_0 > 0$, *что при всех* $0 < \mu \le \mu_0$, $-\Delta_1(\mu) < \delta < \Delta_2(\mu)$ *краевая задача* (32) *имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры*

$$u_1(x,\delta,\mu) = u_0(x,\delta,\mu), \qquad u_2(x,\delta,\mu) = u_0(\pi - x, \delta, \mu), \tag{40}$$

$$u_0(x, -\Delta_1(\mu), \mu) \equiv u_0(x, \Delta_2(\mu), \mu) \equiv 0, \tag{41}$$

где функция $u_0(x,\delta,\mu)$ *имеет асимптотику* (33), (39).

Обоснование леммы трудностей не вызывает. В самом деле, при всех достаточно малых $\mu > 0$ краевая задача (32) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное интегральное многообразие [16], что сводит проблему к исследованию скалярного уравнения вида

$$d\xi/dt = \left[(A_1 a, b) - \delta^2(Da_1, b)\right]\xi + d_0\xi^2 + \mu\Omega(\xi,\mu). \tag{42}$$

Здесь Ω — достаточно гладкая по ξ, $\sqrt{\mu}$ функция такая, что $\Omega(0,\mu) \equiv 0$. Остается добавить, что равенства (41) — следствия структуры уравнения (42) и того факта, что $\xi(\pm\Delta_0) = 0$ (см. (28), (39)).

Лемма 1 позволяет с помощью *принципа подобия* построить все диссипативные структуры исходной задачи (19), бифурцирующие из нуля. Суть этого принципа заключается в следующем. Сначала выполним в задаче (19) замену $nx \to x$, где n — произвольное натуральное число, и будем считать параметр v таким, что

$$\delta_n = \delta_n(v) \equiv \left(n^2 v - z_0\right)/\sqrt{\mu} \in \left(-\Delta_1(\mu), \Delta_2(\mu)\right). \tag{43}$$

В результате получим краевую задачу

$$u'_t = \left(z_0 + \delta_n\sqrt{\mu}\right)Du''_{xx} + \left(A_0 + \mu A_1\right)u + F(u), \qquad u'_x\big|_{x=0} = u'_x\big|_{x=\pi n} = 0. \tag{44}$$

Обратимся, далее, к вспомогательной краевой задаче (32) и продолжим ее диссипативные структуры (40) по переменной x на отрезок $-\pi \le x \le 0$ четным образом, а затем и на всю ось — периодически с периодом 2π. В результате они будут удовлетворять граничным условиям (44) при любом натуральном n, а при $\delta = \delta_n$ — и уравнению (44).

Возвращаясь теперь к исходной задаче (19), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть в краевой задаче* (19) *выполнены равенство* (25) *и условия* 5 *и* 6. *Тогда найдется такое малое* $\mu_0 > 0$, *что при всех* $0 < \mu \le \mu_0$ *на каждом из интервалов*

$$z_1(\mu)/n^2 < \nu < z_2(\mu)/n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{45}$$

краевая задача (19) *имеет пару диссипативных структур*

$$u_n^1(x, \nu, \mu) = u_0(nx, \delta_n(\nu), \mu), \quad u_n^2(x, \nu, \mu) = u_0(\pi - nx, \delta_n(\nu), \mu). \tag{46}$$

Сопоставляя область неустойчивости (24) с интервалами (45) и учитывая равенства (41), убеждаемся, что семейством (46) исчерпываются все диссипативные структуры краевой задачи (19), (25), бифурцирующие из ее нулевого решения. Отметим еще, что при фиксированном μ и при $\nu \to 0$ количество сосуществующих диссипативных структур (46) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$).

2.2. ***Устойчивость диссипативных структур.*** Линеаризуя краевую задачу (19), (25), на произвольной диссипативной структуре (46) с номером n и выполняя замену $y = nx$, получаем спектральную задачу

$$\left(z_0 + \delta\sqrt{\mu}\right) D h'' + \left(A_0 + \mu A_1\right) h + \sqrt{\mu}\, B_1(y, \delta) h + \mu B_2(y, \delta, \mu) h = \lambda h, \tag{47}$$

$$h'\big|_{y=0} = h'\big|_{y=\pi n} = 0\ , \quad ' = d/dy,$$

где

$$B_1(y, \delta) h = 2 F_2(a, h) \xi(\delta) \cos y,$$

$$B_2(y, \delta, \mu) h = 2 F_2(u_2(y, \delta), h) + 3 F_3(a, a, h) \xi^2(\delta) \cos^2 y; \tag{48}$$

$u_2(y, \delta)$ — результат подстановки выражения (39) в равенство (36), а параметр δ принадлежит интервалу (43). Проблема устойчивости диссипативных структур (46) сводится, очевидно, к анализу расположения спектра краевой задачи (47). В связи с этим напомним, что, как следует из результатов [17], этот спектр состоит из счетного числа собственных значений, а соответствующая им система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в пространстве $\mathring{W}_2^2 \times \mathring{W}_2^2$.

Все возможные пределы при $\mu \to 0$ собственных значений краевой задачи (47) — это собственные значения матриц

$$A_0 - z_0 \sigma^2 D, \quad \sigma = k/n, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{49}$$

которые можно получить из уравнения (47) при $\mu = 0$, $h = c \cos \sigma y$, $c \in R^2$. Отметим, что из условия 5 вытекает гурвицевость матрицы (49) при любом $\sigma \ne \ne 1$ и существование у нее при всех σ, близких к единице, непрерывной ветви собственных значений $\lambda(\sigma)$: $\lambda(1) = \lambda'(1) = 0$, $\lambda''(1) < 0$. А это, в свою очередь, означает, что равномерно по $n = 1, 2, \dots$ все пределы при $\mu \to 0$ собственных значений краевой задачи (47) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le 0$.

Таким образом, исследование устойчивости диссипативных структур (46) сводится к построению асимптотики тех собственных значений задачи (47), которые стремятся к нулю при $\mu \to 0$ или при $n \to \infty$. В связи с этим заметим, что соответствующие данным собственным значениям при $\mu = 0$ собственные функции

$$c \cos(1 + z)\sigma, \quad z = \pm k/n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad c \in R^2,$$

можно представить в виде

$$h = h_1(y) \cos z y - h_2(y) \cos z y, \tag{50}$$

$$\frac{dh_1}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{dh_1}{dy}\Big|_{y=\pi} = 0, \qquad h_2\big|_{y=0} = h_2\big|_{y=\pi} = 0. \tag{51}$$

Поэтому будем искать их в указанном виде и при $\mu > 0$.

Подставляя выражение (50) в уравнение (47), получаем систему $(' = d/dy)$

$$\begin{gathered}\left(z_0+\delta\sqrt{\mu}\right)D\left(h_1''-2zh_2'-z^2h_1\right) + (A_0+\mu A_1)h_1 + \\ + \sqrt{\mu}B_1(y,\delta)h_1 + \mu B_2(y,\delta,\mu)h_1 = \lambda h_1, \\ \left(z_0+\delta\sqrt{\mu}\right)D\left(h_2''+2zh_1'-z^2h_2\right) + (A_0+\mu A_1)h_2 + \\ + \sqrt{\mu}B_1(y,\delta)h_2 + \mu B_2(y,\delta,\mu)h_2 = \lambda h_2,\end{gathered} \tag{52}$$

которую дополним граничными условиями (51). Для удобства параметр z (принимающий, напомним, дискретные значения $\pm k/n$, $k = 0, 1, \ldots$) будем считать меняющимся непрерывно. Из очевидной связи краевых задач (47) и (52), (51) вытекает, что проблема устойчивости диссипативных структур (46) сводится к асимптотическому вычислению собственных значений задачи (52), (51), стремящихся к нулю при μ , $z \to 0$.

При $\mu = z = 0$ краевая задача (52), (51) распадается на две независимые краевые задачи $(' = d/dy)$

$$\begin{gathered}z_0 Dh_1'' + A_0 h_1 = \lambda h_1, \quad h_1'\big|_{y=0} = h_1'\big|_{y=\pi} = 0, \\ z_0 Dh_2'' + A_0 h_2 = \lambda h_2, \quad h_2'\big|_{y=0} = h_2'\big|_{y=\pi} = 0,\end{gathered} \tag{53}$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное значение с собственными функциями $h_1^0(y) = a\cos y$ и $h_2^0(y) = a\sin y$ соответственно. Остальные же собственные значения задач (53), согласно условию 5, находятся в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (52) в пространстве $E = \mathring{W}_2^2\left([0,\pi]; R^4\right)$ вектор-функций $\operatorname{colon}(h_1, h_2)$, удовлетворяющих граничным условиям (51). Из изложенного выше следует, что при всех достаточно малых μ и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\mu, z) = \operatorname{span}\{v_1(y,\mu,z), v_2(y,\mu,z)\} \subset E, \tag{54}$$

где $v_j(y, 0, 0) = e_j(y)$, $j = 1, 2$,

$$e_1(y) = \operatorname{colon}(h_1^0(y), 0, 0), \qquad e_2(y) = \operatorname{colon}(0, 0, h_2^0(y)).$$

Инвариантность пространства (54) означает существование такой матрицы второго порядка $\Lambda(\mu, z)$, $\Lambda(0,0) = 0$, что

$$LV = V\Lambda, \tag{55}$$

где по столбцам матрицы V размера 4×2 стоят базисные функции пространства $E_0(\mu, z)$ (см. (54)). Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\mu}$ и z, так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (52).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (46) свелась к исследованию расположения собственных значений матрицы $\Lambda(\mu, z)$, что, в свою очередь, требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\mu}$ и z. Для их нахождения подставим в равенство (55)

$$\Lambda = \mu\Lambda_1 + \sqrt{\mu}\,z\Lambda_2 + z^2\Lambda_3 + \ldots,$$

$$V = V_0 + \sqrt{\mu}\, V_1 + z V_2 + \mu V_3 + \sqrt{\mu}\, z V_4 + z^2 V_5 + \ldots,$$

где

$$V_0 = [e_1(y), e_2(y)], \qquad V_j = [v_{1j}, v_{2j}], \quad j = 1, \ldots, 5,$$

$$v_{1j} = \mathrm{colon}\,(h_{1j}, 0, 0), \qquad v_{2j} = \mathrm{colon}\,(0, 0, h_{2j}), \quad j = 1, 3, 5,$$

$$v_{1j} = \mathrm{colon}\,(0, 0, h_{1j}), \qquad v_{2j} = \mathrm{colon}\,(h_{2j}, 0, 0), \quad j = 2, 4,$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ и z, для определения функций v_{1j}, v_{2j}, $j = 1, \ldots, 5$, получим рекуррентную последовательность краевых задач, из условий разрешимости которых и находим элементы матриц Λ_i, $i = 1, 2, 3$.

Действуя и далее указанным выше способом, для h_{1j}, h_{2j}, $j = 1, 2$, получаем краевые задачи $\left(L_0 \equiv z_0 D d^2/dy^2 + A_0\right)$

$$L_0 h_{11} + (B_1(y, \delta) - \delta D)\, a \cos y = 0, \qquad \frac{dh_{11}}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{dh_{11}}{dy}\Big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{21} + (B_1(y, \delta) - \delta D)\, a \sin y = 0, \qquad h_{21}\big|_{y=0} = h_{21}\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{12} - 2 z_0 D a \sin y = 0, \qquad h_{12}\big|_{y=0} = h_{12}\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{22} - 2 z_0 D a \cos y = 0, \qquad \frac{dh_{22}}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{dh_{22}}{dy}\Big|_{y=\pi} = 0,$$

разрешимость которых обеспечивается равенством (30). Учитывая здесь явный вид матрицы $B_1(y, \delta)$ (см. (48)), получаем формулы (см. (36))

$$h_{11} = \delta a_1 \cos y + 2\xi(\delta)(v + w \cos 2y), \qquad h_{12} = 2 z_0 a_1 \sin y,$$

$$h_{21} = \delta a_1 \sin y + 2\xi(\delta)\, w \sin 2y, \qquad h_{22} = 2 z_0 a_1 \cos y. \tag{56}$$

Приравнивая в соотношении (55) коэффициенты при μ, $\sqrt{\mu}\, z$, и z^2 для h_{1j}, h_{2j}, $j = 3, 4, 5$, получаем краевые задачи $(' = d/dy)$

$$L_0 h_{13} + \delta D h_{11}'' + A_1 a \cos y + B_1(y, \delta) h_{11} + B_2(y, \delta, 0)\, a \cos y = \lambda_1 a \cos y,$$

$$h_{13}'\big|_{y=0} = h_{13}'\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{23} + \delta D h_{21}'' + A_1 a \sin y + B_1(y, \delta) h_{21} + B_2(y, \delta, 0)\, a \sin y = \lambda_2 a \sin y,$$

$$h_{23}\big|_{y=0} = h_{23}\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{14} - 2\delta D a \sin y + 2 z_0 D h_{11}' + B_1(y, \delta) h_{12} + \delta D h_{12}'' = \lambda_4 a \sin y,$$

$$h_{14}\big|_{y=0} = h_{14}\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{24} - 2\delta D a \cos y - 2 z_0 D h_{21}' + B_1(y, \delta) h_{22} + \delta D h_{22}'' = \lambda_3 a \cos y,$$

$$h_{24}'\big|_{y=0} = h_{24}'\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{15} - 2 z_0 D h_{12}' - z_0 D a \cos y = \lambda_5 a \cos y,$$

$$h_{15}'\big|_{y=0} = h_{15}'\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$L_0 h_{25} + 2z_0 D h'_{22} - z_0 D a \sin y = \lambda_6 a \sin y,$$
$$h_{25}\big|_{y=0} = h_{25}\big|_{y=\pi} = 0.$$

Подставляя сюда известные функции (56) и учитывая формулы (48), из условий разрешимости этих краевых задач находим

$$\lambda_1 = (A_1 a, b) - \delta^2 (D a_1, b) + 3\xi^2(\delta)(F_2(a, w) + $$
$$+ 2F_2(a, v) + \frac{3}{4} F_3(a, a, a), b), \tag{57}$$
$$\lambda_2 = (A_1 a, b) - \delta^2 (D a_1, b) + \xi^2(\delta)(F_2(a, w) + $$
$$+ 2F_2(a, v) + \frac{3}{4} F_3(a, a, a), b),$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -4z_0 \delta (D a_1, b), \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -4 z_0^2 (D a_1, b). \tag{58}$$

Наконец, используя в равенствах (57) формулы (38) и (39), убеждаемся, что

$$\lambda_1 = 2d_0 \xi^2(\delta), \quad \lambda_2 = 0. \tag{59}$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\mu, z)$ достаточно для исследования знаков ее определителя и следа при всех $\mu, |z| << 1$. Действительно, функции $\operatorname{tr}\Lambda(\mu, z)$ и $\det\Lambda(\mu, z)$ четные по z, а $\det\Lambda(\mu, 0) \equiv 0$, так как , во-первых, краевая задача (52), (53) не изменяется при заменах $z \to -z$, $h_2 \to -h_2$, а во-вторых, при $z = 0$ она имеет нулевое собственное значение с собственной функцией

$$\operatorname{colon}(0, 0, \frac{\partial u_0}{\partial y}(y, \delta, \mu)), \tag{60}$$

где u_0 — функция, фигурирующая в (40). Отсюда и из формул (58), (59) заключаем, что

$$\operatorname{tr}\Lambda = 2d_0 \xi^2(\delta)\mu - 8 z_0^2 (D a_1, b) z^2 + O\left(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu}\, z^2 + z^4\right), \tag{61}$$

$$\det\Lambda = 8 z_0^2 (D a_1, b) z^2 \; [((A_1 a, b) — 3\delta^2 (D a_1, b))\mu +$$
$$+ 2 z_0^2 (D a_1, b) z^2 + O\left(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu}\, z^2 + z^4\right)]. \tag{62}$$

Из тейлоровского разложения (61) вытекает отрицательность $\operatorname{tr}\Lambda$ при любом фиксированном $\delta \in (-\Delta_0, \Delta_0)$ и при всех достаточно малых $\mu > 0$, $|z|$. Поэтому в анализе нуждается только равенство $z^{-2}\det\Lambda = 0$, в котором параметр δ, $|\delta| < \Delta_0$, $\delta \neq \Delta_0/\sqrt{3}$, также фиксирован. Но при $\delta < \Delta_0/\sqrt{3}$ первое слагаемое в квадратных скобках формулы (62) положительно, что влечет неравенство $z^{-2}\det\Lambda > 0$ при всех достаточно малых $\mu > 0$, $|z|$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого отрезка*

$$[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3},), \quad \delta_1, \delta_2 > 0,$$

можно указать такое μ_0, *что при всех* $0 < \mu \leq \mu_0$ *и при любом натуральном* n *пара состояний равновесия* (46) *краевой задачи* (19), (25) *экспоненциально устойчива при*

$$\left(z_0 - \delta_1\sqrt{\mu}\right)/n^2 \leq \nu \leq \left(z_0 + \delta_2\sqrt{\mu}\right)/n^2.$$

Обратим внимание, что как и в лемме 2, при фиксированном μ и при $\nu \to 0$ количество устойчивых сосуществующих диссипативных структур (46) имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$.

При $\Delta_0/\sqrt{3} < |\delta| < \Delta_0$ из уравнения $z^{-2}\det\Lambda = 0$ с помощью теоремы о неявной функции, применимость которой гарантирует разложение (62), однозначно определяется функция $\mu = \Psi(z)$, $\Psi(-z) \equiv \Psi(z)$:

$$\Psi(z) = 2z_0^2(Da_1, b)z^2/[3\delta^2(Da_1, b) - (A_1 a, b)] + O(z^4).$$

Следовательно, при каждом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ существует интервал $|z| < z_*(\mu)$, где $z_*(\mu)$, $z_*(0) = 0$ — положительный корень уравнения $\mu = \Psi(z)$, в котором $z^{-2}\det\Lambda < 0$. Напомним, однако, что при переходе от краевой задачи (52), (51) к краевой задаче (47) следует положить $z = \pm k/n$, $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому для того чтобы последняя имела точки спектра, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$1/n < z_*(\mu), \tag{63}$$

означающего, что хотя бы одно из ненулевых значений z попадает в интервал $(-z_*(\mu), z_*(\mu))$. Заметим, что значение $z = 0$ при этом исключается, так как при $z = 0$ одно из собственных значений матрицы $\Lambda(\mu, z)$ отрицательно, а другое — равно нулю. При переходе же от задачи (52), (51) к задаче (47) нулевое собственное значение пропадает, так как в силу (50), (60) ему соответствует нулевая собственная функция.

Суммируя изложенное, приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Для любых отрезков*

$$[-\delta_1, -\delta_2] \subset (-\Delta_0, -\Delta_0/\sqrt{3}), \quad [\delta_3, \delta_4] \subset (\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0),$$

$\delta_j > 0, j = 1, \ldots, 4$, *можно указать такое достаточно малое* $\mu_0 > 0$, *что при всех* $0 < \mu \le \mu_0$ *пара состояний равновесия* (46) *с любым номером* n, *удовлетворяющим оценке* (63), *экспоненциально неустойчива как при*

$$\left(z_0 - \delta_1\sqrt{\mu}\right)/n^2 \le \nu \le \left(z_0 - \delta_2\sqrt{\mu}\right)/n^2, \tag{64}$$

так и при

$$\left(z_0 + \delta_3\sqrt{\mu}\right)/n^2 \le \nu \le \left(z_0 + \delta_2\sqrt{\mu}\right)/n^2. \tag{65}$$

В дополнение к лемме 4 заметим, что если выполняется строго противоположное (63) неравенство, то соответствующая пара состояний равновесия (46) экспоненциально устойчива при всех ν из отрезков (64), (65). Подчеркнем также, что неравенство (63) начинает выполняться только для асимптотически больших (порядка $\mu^{-1/2}$) номеров n.

2.3. ***Заключительные замечания.*** Полученные результаты позволяют теперь обосновать теорему 2.

Действительно, для доказательства существования набора параметров (18) с требуемыми свойствами обратимся к формулам (13) и будем считать, что

$$\sigma^2/2 = \nu \ll 1, \quad \alpha = 2 + \mu, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad \delta > 0. \tag{66}$$

Переписывая, далее, краевую задачу (10) при условиях (66) в форме (19), (25), легко убеждаемся, что

$$P(z, \mu) = (z - \delta)^2 - \frac{\mu}{4} - \frac{\mu^2}{16},$$

а значит, выполняется условие 5 и, в частности, $z_0 = \delta$. Условие 6 здесь также выполняется, поскольку $a = \operatorname{colon}(1, 1)$, $b = \operatorname{colon}(1/2, 1/2)$ и, следовательно, $d_0 = 3/2 \operatorname{Re} d < 0$.

Таким образом, остается воспользоваться леммой 3, гарантирующей существование у краевой задачи (10) при условиях (13), (66) любого фиксированного числа устойчивых состояний равновесия. Существование набора параметров (17) с нужными свойствами устанавливается аналогично.

Заключение. Отметим, что в процессе доказательства теоремы 2 решена более общая проблема, а именно: построены все диссипативные структуры краевой задачи (19), (25), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия, и выявлены основные особенности их динамики при фиксированном $\mu > 0$ и при $\upsilon \to 0$.

Достаточно полный их перечень включает следующее:

1. *Ячеистость.* При $\nu \to 0$ состав диссипативных структур (46) постоянно обновляется, так как каждая из этих диссипативных структур „живет" лишь в ячейке (45).

2. *Принцип подобия.* Все диссипативные структуры (46) получаются с помощью описанного в п. 2.1 правила из одной уникальной пары состояний равновесия (39).

3. *Принцип максимума амплитуды.* Устойчивыми могут быть лишь диссипативные структуры с достаточно большими амплитудами (39). В частности, состояние равновесия с наибольшей амплитудой всегда устойчиво (см. леммы 3 и 4).

4. *Буферность.* При $\nu \to 0$ количество устойчивых диссипативных структур неограниченно увеличивается.

Остается добавить, что поскольку параметры ν и μ независимы, то краевой задачей (19), (25) моделируется общая ситуация, когда многочлен (23) имеет два положительных корня. Поэтому есть все основания ожидать, что перечисленные выше особенности динамики сохраняются и в нелокальном случае.

1. *Захаров А. А., Колесов Ю. С.* Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник-жертва // Нелинейные колебания и экология – Ярославль, 1984. – С. 3–15.
2. *Колесов А. Ю.* Теоретическое объяснение явления диффузионной буферности // Моделирование динамики популяций. – Н. Новгород, 1990. – С. 35–38.
3. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С* Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. – 1990. – **315**, № 2. – С. 281–283.
4. *Колесов А. Ю.* Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 2. – С. 59–65.
5. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Построение периодических решений уравнения типа Буссинеска с помощью метода квазинормальных форм // Фундам. и прикл. математика. – 1995. – **1**, № 1. – С. 207–220.
6. *Колесов А..Ю.* Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – **59**, № 3. – С. 141 – 158.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
8. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища шк., 1976. – 589 с.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Лиейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
10. *Фомин В.Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. – 239 с.
11. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* Принцип сведения Боголюбова-Митропольского в задаче о параметрическом возбуждении автоволн // Докл. АН СССР. – 1989. –**307**, № 4. – С. 837 – 840.
12. *Колесов Ю.С.* Нелинейный параметрический резонанс в сингулярно возмущенном телеграфном уравнении // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1828 – 1829.
13. *Колесов Ю. С.* Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнении // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 10. – С. 57–72.
14. *Колесов Ю. С.* Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Там же. – 1993. – **184**, № 3. – С. 121 – 136.
15. *Turing A.* The chemical basis of macrogenesis // Philos. Trans. Roy. Soc. – 1952.– **237**. – P. 37–72.
16. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
17. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

Получено 07.10.97